

## ЗНАХОДЖЕННЯ ПОТЕНЦІАЛУ ШВИДКОСТЕЙ РІДИНИ ПРИ РОЗПОВСЮДЖЕННІ ХВИЛЬ У НЕСКІНЧЕННІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З РІДИНОЮ

**А.П.Коваленко**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України*

### АНОТАЦІЯ

В роботі розглядається нескінченна та напівнескінченна оболонка, заповнена рідиною. Рідина розглядається в акустичному наближенні. Рух оболонки описується рівняннями руху по моделі Тимошенка. Задача розглядається в безрозмірному вигляді. На першому етапі розглянуто рух рідини під дією деформації стінок оболонки. У просторі зображень по Лапласу-Карсону побудовано потенціал швидкостей рідини через невідомі переміщення стінок оболонки. На другому етапі на основі даного підходу розглянута конкретна задача про динамічні процеси в даній гідропружній системі при імпульсному навантаженні на торці оболонки. Показано вплив коефіцієнта взаємозв'язку елементів системи на характер хвильових процесів.

### 1. ВСТУП

Сучасний розвиток техніки приводить до необхідності врахування взаємного впливу рідини й оболонки як елементів гідропружної системи при різноманітних навантаженнях. Актуальність даних досліджень викликана також проблемами зниження матеріалоємності таких гідропружних систем як елементів різноманітних технічних конструкцій. Необхідність аналізу взаємодії елементів в поліагрегатних системах викликана також і практичними потребами, а саме: при розрахунку на міцність і покращенні експлуатаційних характеристик трубопроводів, паливних систем літальних апаратів, ємностей для транспортування рідких і газоподібних продуктів тощо.

На протязі останніх десятиліть проводяться дослідження, в яких розглядаються оболонкові та гідропружні системи під дією хвильових та динамічних навантажень [1,3-5,9,13-16]. Разом із тим недостатньо досліджено взаємний вплив елементів гідропружної системи при торцевих динамічних та імпульсних навантаженнях. На основі вищенаведеного, в даній роботі ставиться мета продовжити розробку започаткованого автором підходу до аналізу системи циліндрична оболонка – рідина [14] і дослідити вплив рідини на хвильовий рух оболонки при імпульсному навантаженні.

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається рідина в акустичному наближенні [10], яка знаходиться в нескінченній циліндричній оболонці. Задачу можна записати у наступному вигляді.

Рівняння руху:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Початкові та граничні умови:

$$t=0: \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0; \quad r=1: \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial t}; \quad x = \pm \infty: \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Тут  $\varphi$  - потенціал швидкостей рідини,  $W$  - поперечне переміщення стінок оболонки,  $x, r$  - повздовжня і радіальна координати стінки оболонки,  $t$  - час,  $a$  - швидкість звуку в рідині.

Задача записана в безрозмірній формі і за характерні величини вибрано характерну довжину  $L = R$  і характерний час  $T = R\sqrt{\frac{(1-v^2)\rho_1}{E}}$ .  $R$  - радіус оболонки,  $v, \rho_1, E$  - коефіцієнт Пуассона, густина та модуль Юнга матеріалу оболонки відповідно. Покладаємо, що при  $r = 0$  розв'язок обмежений.

### 3. ПОБУДОВА ПОТЕНЦІАЛУ ШВИДКОСТЕЙ РІДИНИ

Для розв'язання поставленої задачі застосуємо інтегральне перетворення Лапласа-Карсона [7]  $f^*(p) = p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ . Тоді в просторі зображень по Лапласу-Карсону задача запишеться у вигляді

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} - \frac{p^2}{a^2} \varphi^* = 0; \quad r = 1: \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} = pW^*; \quad x = \pm\infty: \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Тут  $p$  - параметр інтегрального перетворення, зірочкою позначені величини в просторі зображень. Розв'язок даної задачі знаходимо за методом Бубнова-Гальоркіна [8] у вигляді

$$\varphi^* = aW^* e^{-\beta(1-r)} + \sum_{j=0}^N \Phi_j(x) J_0(\alpha_j r), \quad (4)$$

де  $\beta = p/a$ ,  $J_0(x)$  - функція Бесселя нульового порядку,  $\alpha_j$  - корені рівняння  $J_1(x) = 0$  ( $J_1(x)$  - функція Бесселя першого порядку). Функція  $f^* = aW^* e^{-\beta(1-r)}$  задовольняє граничним умовам за умови  $W_x^*|_{x=\pm\infty} = 0$  і враховує ту обставину, що збурення від стінки оболонки поширюються в рідині зі швидкістю звуку і в області, не обхваченій збуреннями функція  $f = 0$  (теорема запізнення). Функції  $J_0(\alpha_j r)$  ( $j = \overline{0, N}$ ) - неперервні, диференційовані і задовольняють однорідній граничній умові по  $r$ . Отже, система функцій  $J_0(\alpha_j r)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) задовольняє умові застосування методу Бубнова-Гальоркіна [8]. Як це прийнято при застосуванні методу Бубнова-Гальоркіна, обмежимося  $N + 1$  функціями  $J_0(\alpha_j r)$ .

Функції  $\Phi_j(x)$  знаходяться з умови ортогональності “нев'язки”. Для отримання „нев'язки” підставимо вираз (4) у рівняння (3) і в результаті отримаємо

$$R = \sum_{j=0}^N \left( \frac{d^2 \Phi_j(x)}{dx^2} - \lambda_j^2 \Phi_j(x) \right) J_0(\alpha_j r) + \frac{p}{r} e^{-\beta(1-r)} W^* + a e^{-\beta(1-r)} \frac{d^2 W^*}{dx^2}. \quad (5)$$

Тут  $\lambda_j^2 = \alpha_j^2 + \beta^2$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, N$ ). При отриманні виразу для  $R$  використано формули

$$\text{диференціювання функцій Бесселя [11]:} \quad \frac{dJ_0(\alpha_j r)}{dr} = -\alpha_j J_1(\alpha_j r), \quad (6)$$

$$\frac{d^2 J_0(\alpha_j r)}{dr^2} = -\alpha_j \left( J_0(\alpha_j r) - \frac{1}{\alpha_j r} J_1(\alpha_j r) \right) \alpha_j = -\alpha_j^2 J_0(\alpha_j r) + \frac{\alpha_j}{r} J_1(\alpha_j r) \quad (7)$$

Для того щоб вираз (4) був розв'язком задачі (3), необхідно, щоб функція  $R$  була ортогональна до всіх функцій  $J_0(\alpha_j r)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, N$ ). Для цього помножимо вираз  $R$  (5) на  $rJ_0(\alpha_j r)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, N$ ) і проінтегруємо по  $r$  від 0 до 1. В результаті отримаємо

$$\|J_0(\alpha_j r)\|^2 \left( \frac{d^2 \Phi_j(x)}{dx^2} - \lambda_j^2 \Phi_j(x) \right) = -pW^* \int_0^1 e^{-\beta(1-r)} J_0(\alpha_j r) dr - a \frac{d^2 W^*}{dx^2} \int_0^1 r e^{-\beta(1-r)} J_0(\alpha_j r) dr \quad (8)$$

Звідси отримаємо рівняння та граничні умови для обчислення функцій  $\Phi_j(x)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, N$ ):

$$\frac{d^2 \Phi_j(x)}{dx^2} - \lambda_j^2 \Phi_j(x) = -pB_{1j}W^* - aB_{2j} \frac{d^2 W^*}{dx^2} \quad (9)$$

$$x = \pm\infty: \frac{d\Phi_j(x)}{dx} = 0 \quad (10)$$

В виразах (8), (9) прийняті позначення

$$B_{ij} = \|J_0(\alpha_j r)\|^{-1} \int_0^1 r^{i-1} e^{\beta(r-1)} J_0(\alpha_j r) dr, \quad (i = 1, 2; j = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

$$\|J_0(\alpha_j r)\|^2 = \int_0^1 r J_0^2(\alpha_j r) dr = \frac{1}{2} J_0^2(\alpha_j) \quad (J = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

Таким чином, вдалося в просторі зображень по Лапласу-Карсону розробити підхід до побудови потенціалу швидкостей рідини через переміщення оболонки.

#### 4. РОЗВ'ЯЗОК КОНКРЕТНОЇ ЗАДАЧІ

На основі даного підходу розглянемо задачу про хвильові процеси в напівнескінченній оболонці під дією імпульсного навантаження на торці оболонки. Для опису руху оболонки використаємо рівняння руху по моделі Тимошенка [12], які враховують хвильовий рух стінок оболонки. Рідина розглядається в акустичному наближенні [10]. Початково-крайова задача при цьому має наступний вигляд.

$$\text{Система рівнянь: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -v \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{2}{k^2(1-v)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{2}{k^2(1-v)} W + \frac{2v}{k^2(1-v)} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} + K_s, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{6k^2 R^2(1-v)}{h^2} \Psi + \frac{6k^2 R^2(1-v)}{h^2} \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\text{Початкові умови: } t = 0: U = W = \Psi = \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0; \quad (14)$$

$$\text{Граничні умови: } x = 0: \frac{\partial W}{\partial x} = \Psi = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = V_0 \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t}; \quad (15)$$

$$x = \infty: U = W = \Psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0; \quad (16)$$

$$r = 1: \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (17)$$

Тут прийняті наступні позначення:  $U, W$  – поздовжнє та радіальне переміщення стінок оболонки,  $\Psi$  – кут повороту радіального волокна відносно осі  $x$ ,  $h$  – товщина стінки оболонки,  $k^2$  – коефіцієнт здвигу по моделі Тимошенка. При даному виборі характерних

величин швидкість розповсюдження поздовжніх хвиль в оболонці  $C_p = 1$ . Величина

$$C_s = \sqrt{\frac{k^2(1-\nu)}{2}}$$
 є швидкість поперечних хвиль в оболонці. Коефіцієнт  $K_s = \frac{2R\rho_0}{h\rho_1 k^2(1-\nu)}$  є

характерним коефіцієнтом даної системи і характеризує взаємний вплив елементів даної гідропружної системи ( $\rho_0, \rho_1$  питома вага рідини та матеріалу оболонки відповідно). Як показано, при  $V_0 \leq 0,03C_p$  лінійна постановка задачі досить адекватно описує динамічні процеси в даній гідропружній системі [9].

У просторі зображень по Лапласу-Карсону на основі запропонованого підходу потенціал швидкостей рідини можна представити у вигляді

$$\varphi^* = -\frac{1}{\beta} V_0 e^{-\beta x} + a W^* e^{-\beta(1-r)} + \sum_{j=0}^N \Phi_j(x) J_0(\alpha_j r). \quad (18)$$

Тоді дану задачу можна записати в наступному вигляді.

$$\text{Система рівнянь : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 U^*}{dx^2} - p^2 U^* = -\nu \frac{dW^*}{dx}, \\ \frac{d^2 W^*}{dx^2} - \frac{2p^2}{k^2(1-\nu)} W^* = \frac{2}{k^2(1-\nu)} W^* + \frac{2\nu}{k^2(1-\nu)} \frac{dU^*}{dx} - \frac{d\Psi^*}{dx} + \\ + K_s p \left( -\frac{1}{\beta} V_0 e^{-\beta x} + a W^* e^{-\beta(1-r)} + \sum_{j=0}^N \Phi_j(x) J_0(\alpha_j r) \right), \\ \frac{d^2 \Psi^*}{dx^2} - p^2 \Psi^* = \frac{6k^2 R^2 (1-\nu)}{h^2} \Psi^* + \frac{6k^2 R^2 (1-\nu)}{h^2}. \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\text{Граничні умови: } x=0: \frac{dW^*}{dx} = \Psi^* = 0, \quad U^* = \frac{V_0}{p}; \quad (20)$$

$$x=\infty: U^* = W^* = \Psi^* = 0 \quad (21)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (19) знаходимо по методу простих ітерацій. За початкове наближення виберемо  $W^* = W_0^* = 0$ . Із першого й третього рівнянь системи (19) знаходимо початкові наближення  $U_0^*$  і  $\Psi_0^*$ . По відомому значенню  $W_0^*$  по запропонованому підходу знаходимо початкове наближення для потенціалу швидкостей рідини  $\varphi_0^*$ . Знайдені значення  $U_0^*, \Psi_0^*, \varphi_0^*$  підставляємо в друге рівняння системи (19) і отримуємо перше наближення для радіального переміщення стінок оболонки  $W_1^*$ . Наступні наближення розв'язку системи (19) знаходимо за цією схемою. Були отримані початкове, перше і друге наближення.

Початкове наближення має вигляд

$$W_0^* = 0, \quad U_0^* = \frac{V_0}{p} e^{-px}, \quad \Psi_0^* = 0, \quad \varphi_0^* = -\frac{V_0}{\beta} e^{-\beta x} \quad (22)$$

Перше наближення має наступну структуру

$$W_1^* = C_1 e^{-d_1 x} + N_1 e^{-px} + N_2 e^{-\beta x}, \quad U_1^* = (C_2 + N_3 x) e^{-px} + N_4 e^{-d_1 x} + N_5 e^{-\beta x}$$

$$\Psi_1^* = C_3 e^{-d_2 x} + N_6 e^{-d_1 x} + N_7 e^{-px} + N_8 e^{-\beta x}, \quad \varphi_1^* = -\frac{V_0}{\beta} e^{-\beta x} + a W_1^* e^{-\beta(1-r)} + \sum_{j=0}^N Y_j(x) J_0(\alpha_j r). \quad (23)$$

Для другого наближення наведемо структуру розв'язку тільки для  $W^*$

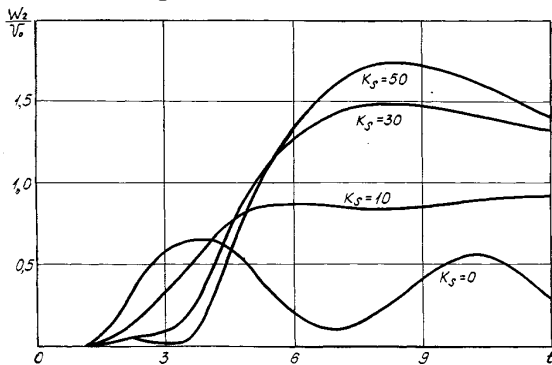
$$W_2^* = (C_4 + N_9)e^{-d_1x} + (N_{10} + N_{11}x)e^{-px} + N_{12}e^{-d_2x} + (N_{13} + N_{14}x)e^{-\beta x} + \sum_{j=0}^N K_j e^{-\lambda_j x} \quad (24)$$

Коефіцієнти  $C_i$  ( $i=1,2,3,4$ ),  $N_i$  ( $i=1,2,\dots,14$ ) та  $Y_j(x)$ ,  $K_j$  ( $j=0,1,2,\dots,N$ ) є функції від характеристичних коефіцієнтів системи, поздовжньої координати  $x$  та параметру інтегрального перетворення  $p$ ,  $d_1^2 = \frac{2\nu(p^2+1)}{k^2(1-\nu)}$ ,  $d_2^2 = p^2 + \frac{6k^2R^2(1-\nu)}{h^2}$ .

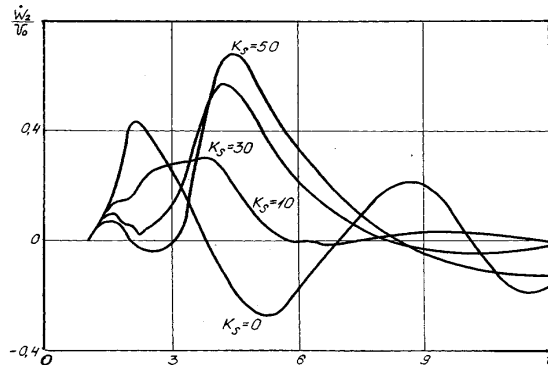
## 5. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Перехід до оригіналів здійснювався чисельно по зміщеним поліномам Лежандра [6]. Автором проведено модифікацію даного методу і показано, що для неперервних, достатньо гладких функцій похибка при обчисленнях не перевищує 1% [2]. На основі дослідження тестових задач аналогічного типу автором показано, що при застосування методу простих ітерацій друге наближення досить точно описує динамічні процеси в даній системі. При застосуванні методу Бубнова-Гальоркіна обчислення проводилися до практичної збіжності рядів. Як правило досить було значень  $N = 4, 5, 6$ .

Обчислення проводились для значень  $a = 0,25$ ,  $k^2 = 0,87$ ,  $h/R = 0,1$ . Результати обчислень представлені на мал.1 і мал.2.



Мал.1



Мал.2

На мал.1 представлено значення поперечного прогину оболонки  $W$  (друге наближення), віднесене до величини  $V_0$ , в перерізі  $x=1$ . Показано як розповсюджується збурення по часові для різних значень коефіцієнта  $K_s$ . Значення  $K_s = 0$  відповідає відсутності рідини в оболонці. Чим більш велике значення питомої ваги рідини, тим більш високе значення коефіцієнта  $K_s$ . Для прикладу зазначимо, що для матеріалів керосин-алюміній при  $h/R = 0,1$  коефіцієнт  $K_s \approx 10,2$ . Аналіз чисельних результатів показує, що до приходу збурення ( $t < 1$ ) поперечне переміщення стінки оболонки рівне нулеві. В момент часу  $t=1$  цього перерізу досягають збурення, які розповсюджуються з найбільшою швидкістю  $C_p = 1$ . При  $K_s = 0$  (немає рідини) маємо майже синусоїдальний характер коливання. Із збільшенням коефіцієнта  $K_s$  спостерігається затухання хвильового характеру розповсюдження і збільшується випучування оболонки. Хвиля тиску в рідині розповсюджується зі швидкістю  $a = 0,25$  і досягає даного перерізу в момент часу  $t = 4$ . Це зумовлює більш виразніше випучування оболонки.

На мал.2 показано значення швидкості поперечного переміщення оболонки (віднесене до  $V_0$ ) в тому ж перерізі оболонки ( $x=1$ ). Тут також видно, що при відсутності

рідини ( $K_s = 0$ ) маємо яскраво виражений хвильовий характер розповсюдження збурень. Із збільшенням коефіцієнта  $K_s$  відбувається затухання хвильового характеру даного процесу. Також чітко видно прихід хвилі тиску в рідині до даного перерізу (при  $t = 4$ ). Разом з тим слід відмітити, що вплив рідини на розповсюдження поздовжніх переміщень стінок оболонки є незначним.

Таким чином, в даній роботі розроблено підхід до аналізу взаємного впливу рідини і напівнескіченної циліндричної оболонки під дією імпульсного навантаження, виділено коефіцієнт взаємодії та показано вплив даного коефіцієнта на розповсюдження збурень в оболонці.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Динамика элементов конструкций / Под ред. В.Д.Кубенко.–К.: “АСК”,1999.–379с.– (Механика композитов. В 12-ти томах: Т.9)
2. Коваленко А.П. Анализ погрешности численного обращения преобразования Лапласа-Карсона. //Труды IX научн. Конф. мол. ученых Имех АН УССР.–К., 1982.– С.103-107.
3. Ковальчук П.С., Кубенко В.Д. Взаимодействие колеблющихся цилиндрических оболочек с содержащейся в них жидкостью /Динамика тел взаимодействующих со средой/. Под ред. А.Н.Гузя.–К.: Наук. Думка,1991.–С.168-214.
4. Ковальчук П.С., Крук Л.А. К задаче о вынужденных колебаниях цилиндрических оболочек, полностью заполненных жидкостью// Прикл.механика.–2005–**41**,№2.– С.52-59.
5. Ковальчук П.С., Крук Л.А. О волновых формах деформирования цилиндрических оболочек с жидкостью при периодическом воздействии// Прикл.механика.–2005–**41**,№5.–С.76-82.
6. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа.– М.: Наука, 1974.–224с.
7. Лурье А.И. Операционное исчисление. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.– 431с.
8. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов.– М.: Наука, 1966.–432с.
9. Сагомоян Е.А. О распространении продольных волн в цилиндрической оболочке.– Вестн.Моск.ун-та. Математика, механика. 1977.– №1.–С.111-112.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1976.–Т.2.–574с.
11. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции.– М.: Наука, 1977.– 342с.
12. Gertmann G., Mirsky J. Three-dimensional and shell-theory analysis of axially motions of cylinder// J. Appl. Mech.–1956.–**23**, №4.–P.563-568.
13. Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Lysyuk N.A. Propagation of Harmonic Waves in a Cylindrical Shell (Timoshenko Model) // Int. Appl. Mech.– 2003–**39**, №4–С.472-478.
14. Kovalenko A.P. Investigation of Transients in a Cylindrical Shell with Fluid under Shock Excitation //Soviet Appl. Mech.– 1979.–**15**, №11.–P.1067-1072.
15. Koval'chuk P.S., Podchasov N.P., Kholopova. Analysis of Nonlinear Bulding of Liquid-Filled Cylindrical Shells Under Local Dynamic Loading// Int. Appl. Mech.– 2003.–**39**, №3.–С.74-80.
16. Koval'chuk P.S., Filin V.G. On modes of Flexural of initially Bent Cylindrical Shells Partially Filled with a Liquid // Int. Appl. Mech.– 2003.–**39**, №4.–P.464-471.