

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТРУБКАХ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

**Н.Н.Кизилова**

*Кафедра теоретической механики, Харьковский национальный университет,  
пл.Свободы, 4, 61077, Харьков, тел.+38(0577)5057287  
e-mail: nnk\_@bk.ru*

Pressure wave propagation in the multilayered thick-walled viscoelastic tubes filled with a homogeneous viscous liquid is investigated. The asymptotic analysis of pressure and velocity fields in the liquid and the displacements and pressures in the layers when both the radius to length and the radial displacement to the radius ratios are small is carried out. The solution of the problem, correct to second order small variable, is obtained. The influence of the viscosity of the liquid, elasticity and viscosity of the wall material and thicknesses of the layers on the strain-stress state of the wall and the flow rate in the tube is analyzed. It is shown that the material parameters define the flow rate through the tube and the shear stress at the inner wall of the tube significantly. The problem is related to the pulse wave propagation in the arterial beds. It is shown that when the real multilayered structure of the arterial wall and difference of the mechanical properties and thicknesses of the layers are taken into account the more refined data on the shear stress, which is a very important factor of the atherosclerosis, can be obtained.

**1. ВСТУПЛЕНИЕ.** Задача о распространении волн в податливых трубках, заполненных жидкостью, исследуется как модель пульсовых волн, которые генерируются сердцем и распространяются по артериям. Исследования последних лет показали, что многослойная структура стенки, различие свойств материала слоев играют существенную роль при распространении пульсовых волн по артериям [1-2]. Реологические параметры слоев измерялись для крупных и средних артерий эластического типа [3-5]. Учитывая, что решение задачи о волновом течении крови по артериям лежит в основе методик расчета напряжения сдвига на стенке сосуда, объемного расхода крови, внутрисосудистого давления с помощью ультразвуковых диагностических аппаратов, обобщение решения на основе современных уточненных данных о строении и механических свойствах сосудистой стенки чрезвычайно важно для клинических приложений.

**2. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ.** Рассмотрим осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости по длинной толстостенной многослойной цилиндрической трубке кругового сечения с внутренним радиусом  $R_0$  и длиной  $L \gg R_0$ . Материал слоев считается вязкоупругим несжимаемым, толщины слоев  $H_1, H_2, H_3, H_{1-3} \leq R_0$ . На конце  $x = L$  трубки имеется терминальный элемент с волновой проводимостью  $Y_t = Y_{t1} + iY_{t2}$ , представленный нижележащим руслом. На входе в трубку задана волна давления, которая распространяется вдоль трубки и отражается на ее конце  $x = L$ . Колебания давления жидкости вызывают изменения радиальных координат слоев, так что:

$$R_1(t) = R_0 + u_r(t, R_0), \quad R_2(t) = R_0 + H_1 + u_r(t, R_0 + H_1),$$

$R_3(t) = R_0 + H_1 + H_2 + u_r(t, R_0 + H_1 + H_2)$ , где  $u_r(t, r, x)$  - перемещение стенки в радиальном направлении. Уравнения движения жидкости и стенки имеют вид:

$$\operatorname{div}(\bar{v}) = 0, \quad \rho_f \frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p + \mu_f \Delta \bar{v} \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\bar{u}^{(j)}) = 0, \quad \rho_s^{(j)} \frac{\partial^2 \bar{u}^{(j)}}{\partial t^2} = -\nabla p_s^{(j)} + \operatorname{div} \sigma^{(j)} \quad (2)$$

где  $\bar{v} = (v_r, 0, v_x)$  и  $p$  - скорость и давление в жидкости,  $\rho_f$  и  $\mu_f$  - вязкость и плотность жидкости,  $\bar{u}^{(j)} = (u_r^{(j)}, 0, u_x^{(j)})$ ,  $p_s^{(j)}$  и  $\rho_s^{(j)}$  - перемещение, давление и плотность  $j$ -го слоя стенки,  $\hat{P}^{(j)} = -p_s^{(j)} \hat{I} + \sigma^{(j)}$  - тензор напряжений материала слоев стенки,  $\hat{I}$  - единичный тензор,  $j=1-3$ . Реологическое соотношение для стенки примем в общем виде:

$$\sigma^{(j)} + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(j)} \frac{\delta^k \sigma^{(j)}}{\delta t^k} = 2G^{(j)} \left( \hat{e}^{(j)} + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(j)} \frac{\delta^k \hat{e}^{(j)}}{\delta t^k} \right) \quad (3)$$

где  $\hat{e}^{(j)}$  - тензор деформаций,  $G^{(j)}$  - модули сдвига,  $\lambda_{1k}^{(j)}$  и  $\lambda_{2k}^{(j)}$  - реологические коэффициенты,  $\delta/\delta t$  - производная по времени.

Из (2)-(3) получим уравнение движения стенки в перемещениях:

$$\left( 1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(j)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \rho_s^{(j)} \frac{\partial^2 \bar{u}^{(j)}}{\partial t^2} + \nabla p_s^{(j)} = G^{(j)} \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(j)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \Delta \bar{u}^{(j)} \quad (4)$$

Граничные условия суть условия на оси трубки и условия непрерывности напряжений и перемещений на границах раздела слоев и жидкости:

$$r = 0: \quad |v_x| < \infty, \quad v_r = 0 \quad (5)$$

$$r = R_1: \quad \bar{v} = \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial t}, \quad P_{rr} = \Sigma_{rr}, \quad P_{rx} = \Sigma_{rx} \quad (6)$$

$$r = R_i, \quad i = 2, 3: \quad \bar{u}^{(i-1)} = \bar{u}^{(i)}, \quad \sigma_{rr}^{(i-1)} = \sigma_{rr}^{(i)}, \quad \sigma_{rx}^{(i-1)} = \sigma_{rx}^{(i)} \quad (7)$$

$$r = R_0 + H: \quad \bar{u} = 0 \quad (8)$$

$$x = 0: \quad \langle p \rangle = p_0(t) \quad (9)$$

$$x = L: \quad Y_t = \pi R_1^2 \langle v_x \rangle / \langle p \rangle \quad (10)$$

где  $\langle p, v_x \rangle = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} r \{p, v_x\} dr$  - средние по сечению давление и продольная скорость.

Вводя для величин, входящих в (1)-(10), значения, характерные для крови и артериальной стенки, получим, что  $u_r/R_0 \sim \varepsilon$ , где  $\varepsilon = R_0/L$ . Будем искать решение задачи (1)-(10) в виде разложений по малому параметру  $\varepsilon$ . Записывая уравнения в безразмерной форме, получим для нулевого приближения следующую систему:

$$\frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial r} + \frac{v_r^{(0)}}{r} + \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v_x^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial r} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(0)}}{r} + \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

$$\left( 1 + \sum_{k=1}^m \lambda_{1k}^j \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \frac{\partial p_s^{j(0)}}{\partial r} = 0 \quad (15)$$

$$\left( 1 + \sum_{k=1}^m \lambda_{1k}^j \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \rho^j \frac{\partial^2 u_x^{j(0)}}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s^{j(0)}}{\partial x} = \frac{\Gamma^j}{\text{Re}} \left( 1 + \sum_{k=1}^m \alpha_{2k}^j \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left( \frac{\partial^2 u_x^{j(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x^{j(0)}}{\partial r} \right) \quad (16)$$

$$r=0: \quad v_r^{(0)} = 0, \quad |v_x^{(0)}| < \infty \quad (17)$$

$$r=1: v_r^{(0)} = \frac{\partial u_r^{1(0)}}{\partial t}, \quad v_x^{(0)} = \frac{\partial u_x^{1(0)}}{\partial t}, \quad \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^1 \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) (p_s^{1(0)} - p^{(0)}) = 0, \quad \left( 1 + \sum_{k=1}^m \lambda_{2k}^{(1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \frac{\partial u_x^{(1)(0)}}{\partial r} = 0 \quad (20)$$

$$r=1+h_i, \quad i=1,2: \quad u_r^{(i)(0)} = u_r^{(i+1)(0)}, \quad u_x^{(i)(0)} = u_x^{(i+1)(0)} \quad (21)$$

$$\left( 1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(i+1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(i)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) (p_s^{(i+1)(0)} - p_s^{(i)(0)}) = 0 \quad (22)$$

$$G^{(i)} \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(i+1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(i)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \frac{\partial u_x^{(i)(0)}}{\partial r} = G^{(i+1)} \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(i)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(i+1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \frac{\partial u_x^{(i+1)(0)}}{\partial r} \quad (23)$$

$$x=0: \quad 2 \int_0^1 r p^{(0)} dr = p_o(t) \quad (24)$$

$$x=1: \quad y_t \int_0^1 r p^{(0)} dr = \int_0^1 r v_x^{(0)} dr \quad (25)$$

Решение системы (11)-(25) будем искать в виде  $f^{(0)}(t,r,x) = f^*(r,x)e^{i\omega t}$ , где  $f = \{u_r, u_x, v_r, v_x, p, p_s\}$ . Из (11)-(16) получим обыкновенные дифференциальные уравнения для амплитуд, решение которых имеет вид:

$$v_x^*(r,x) = C_1 J_0(\gamma r) + \frac{i}{\omega} \frac{dp^*}{dx} \quad (26)$$

$$v_r^*(r,x) = -\frac{J_1(\gamma r)}{\gamma} \frac{dC_1}{dx} - \frac{ir}{2\omega} \frac{d^2 p^*}{dx^2} \quad (27)$$

$$u_x^{j*}(r,x) = C_2^j J_0(\beta^{(j)} r) + C_3^j Y_0(\beta^{(j)} r) + \frac{1}{\omega^2 \rho^{(j)}} \frac{dp^*}{dx} \quad (28)$$

$$u_r^{j*}(r,x) = -\frac{r}{2\omega^2 \rho^{(j)}} \frac{d^2 p^*}{dx^2} - \frac{J_1(\beta^{(j)} r)}{\beta^{(j)}} \frac{dC_2^j}{dx} - \frac{Y_1(\beta^{(j)} r)}{\beta^{(j)}} \frac{dC_3^j}{dx} + \frac{C_4^j}{r} \quad (29)$$

$$p^*(x) = p_0 + C_6 \int_0^x F(x) dx, \quad F(x) = \exp\left(\int \frac{N_2(x)}{N_1(x)} dx\right) \quad (30)$$

где  $\gamma = (-i\omega \text{Re})^{0.5}$ ,  $\beta^{(j)} = i\omega \sqrt{\rho^{(j)} \xi^{(j)}}$ ,  $J_0$  и  $Y_0$  - функции Бесселя 1-го и 2-го рода,

$$\xi^{(j)} = \text{Re}\left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^j (i\omega)^k\right) / \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^j (i\omega)^k\right) / \Gamma^{(j)},$$

$$C_2^1(x) = \left( J_0(\beta^{(1)}) - \frac{Y_0(\beta^{(1)})J_1(\beta^{(1)})}{Y_1(\beta^{(1)})} \right)^{-1} \left( \frac{\rho^1 - 1}{\rho^1 \omega^2} \frac{dp^*}{dx} - \frac{i}{\omega} J_0(\gamma) C_1(x) \right),$$

$$C_3^1(x) = \left( Y_0(\beta^{(1)}) - \frac{Y_1(\beta^{(1)})J_0(\beta^{(1)})}{J_1(\beta^{(1)})} \right)^{-1} \left( \frac{\rho^1 - 1}{\rho^1 \omega^2} \frac{dp^*}{dx} - \frac{i}{\omega} J_0(\gamma) C_1(x) \right),$$

$$C_4^1(x) = \frac{i}{\gamma \omega} J_1(\gamma) \frac{dC_1(x)}{dx} - \frac{\rho^1 - 1}{2\rho^1 \omega^2} \frac{d^2 p^*}{dx^2},$$

$$C_2^i(x) = (Y_1(z_{i1})J_0(z_{i1}) - Y_0(z_{i1})J_1(z_{i1}))^{-1} \left( Y_1(z_{i1}) \left( \frac{\rho^i - \rho^{i-1}}{\rho^i \rho^{i-1} \omega^2} \frac{dp^*}{dx} - A_{i-1} \right) - \frac{\xi^{(i)} \beta^{(i-1)}}{\xi^{(i-1)} \beta^{(i)}} Y_0(z_{i1}) E_{i-1, i-1} \right)$$

$$, C_3^i(x) = (Y_1(z_{i, i-1}))^{-1} \left( \frac{\xi^{(i)} \beta^{(i-1)}}{\xi^{(i-1)} \beta^{(i)}} E_{i-1, i-1} - J_1(z_{i, i-1}) C_2^i(x) \right),$$

$$C_4^i(x) = C_4^{i-1}(x) + \frac{(\rho^{i-1} - \rho^i)(1 + h_{i-1}^2)}{2\rho^{i-1} \rho^i \omega^2} \frac{d^2 p^*}{dx^2} + (1 + h_{i-1}) \left( \frac{1}{\beta^{(i)}} \frac{dE_{i, i-1}}{dx} - \frac{1}{\beta^{(i-1)}} \frac{dE_{i-1, i-1}}{dx} \right),$$

$$A_i = C_2^i J_0(z_{i, i}) + C_3^i Y_0(z_{i, i}), \quad E_{ik} = C_2^i J_1(z_{ik}) + C_3^i Y_1(z_{ik}), \quad z_{ik} = \beta^{(i)} (1 + h_k), \quad i, k = 1 - 3,$$

$$C_6 = \left( y_t \int_0^1 F(x) dx - \frac{i\pi a^2(1)F(1)}{\omega} \right)^{-1} \left( \frac{2\pi a(1)}{\gamma} J_1(\gamma a(1)) C_1(1) - p_0 y_t \right)$$

Соотношения (22)-(30) позволяют вычислять характеристики течения, которые наиболее важны для приложений, в том числе для определения диагностически значимых параметров течения крови: объемного расхода  $Q(t)$ , напряжения сдвига на стенке  $\tau_w(t)$ ,

линейной скорости на оси трубки  $v_x(t)$  и волновой проводимости  $Y_{in} = Q^* / p^* \Big|_{x=0}$ , где

$Q^*$  - амплитуда расхода. Окончательные выражения для указанных величин, а также решение системы для первого приближения не приводятся здесь в силу их громоздкости.

**3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ.** При численных расчетах исследовалось влияние параметров модели на решение задачи и интегральные характеристики  $Q(t)$  и  $Y_{in}$ ,  $\tau_w(t)$  и осцилляции внутреннего диаметра трубки  $d(t)$ . Диапазоны изменения безразмерных параметров выбирались в соответствии с данными для артериальной системы человека в норме и при патологиях. Исследование показало, что модули сдвига слоев стенки влияют на распределение скоростей в жидкости, приводя к некоторому

уплощению профиля при малых значениях модуля сдвига  $G^{(j)}$ , и на перемещения стенки. Расчеты объемного расхода показали, что величина  $Q$  при этом остается практически неизменной за счет ускорения тока жидкости у стенки и замедления течения вблизи оси трубки. Незначительное влияние на движение жидкости и стенки оказывают параметры  $\lambda_{1,2}$ . На рис.1 показан профиль скорости в жидкости и стенке при разных значениях коэффициента отражения  $\Gamma = (\pi R_1^2 - \rho c Y_t) / (\pi R_1^2 + \rho c Y_t)$ ,  $c$  – скорость волны.

На рис.2 приведены зависимости  $Q(h)$  для разных характерных значений модуля сдвига  $G^0$  слоев материала стенки. С увеличением толщины и податливости стенки расход жидкости уменьшается и для предельных для артериальной стенки значений  $G^{(j)}$ ,  $\lambda_{1,2}$  может снижаться до 30%. С ростом частоты  $\omega$  входной волны  $p_0(t)$  выраженность эффекта уменьшается. Для достаточно толстой стенки  $h = 0.3 - 0.5$  вариации  $\lambda_{1,2} \in [0;1]$  вызывают разнонаправленные изменения расхода, не превышающие 5%. Расход увеличивается при уменьшении значений  $\lambda_2$  и увеличении  $\lambda_1$ . Изменения объемного расхода, связанные с параметрами стенки, объясняются взаимодействием стенки с потоком жидкости. В системе жидкость-трубка часть кинетической энергии движущейся жидкости расходуется на деформацию стенки и диссипацию энергии в ней. Как показали расчеты, при увеличении доли энергии, которая передается от потока к стенке и вызывает ее деформации, расход жидкости уменьшается, что имеет место при увеличении податливости стенки, увеличении времени релаксации и уменьшении времени ретардации материала слоев.

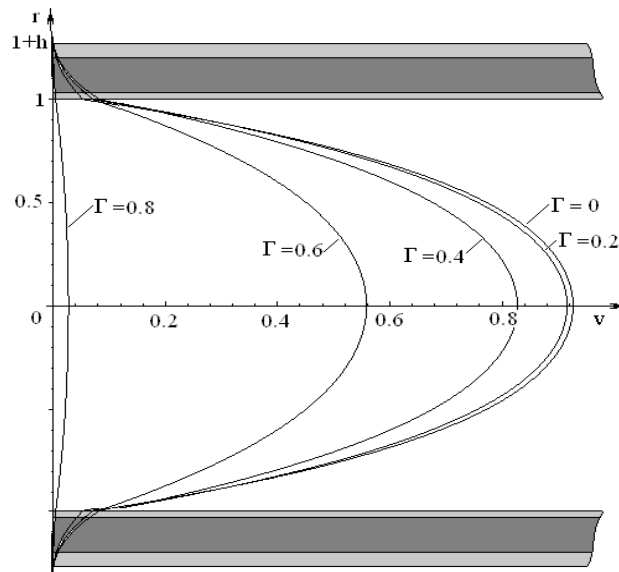


Рис.1.

В физиологическом диапазоне значений параметров следует ожидать небольших изменений расхода, обусловленных описанным взаимодействием на границе жидкость-стенка. При развитии патологий, связанных с утолщением стенки при одновременном снижении ее плотности за счет разрыхления и накопления жировых компонент, уменьшение расхода крови, как показывают расчеты, будет сопоставимо со снижением  $Q$  за счет уменьшения проводимости  $Y_t$  при  $\Gamma = 0.2 - 0.3$ .

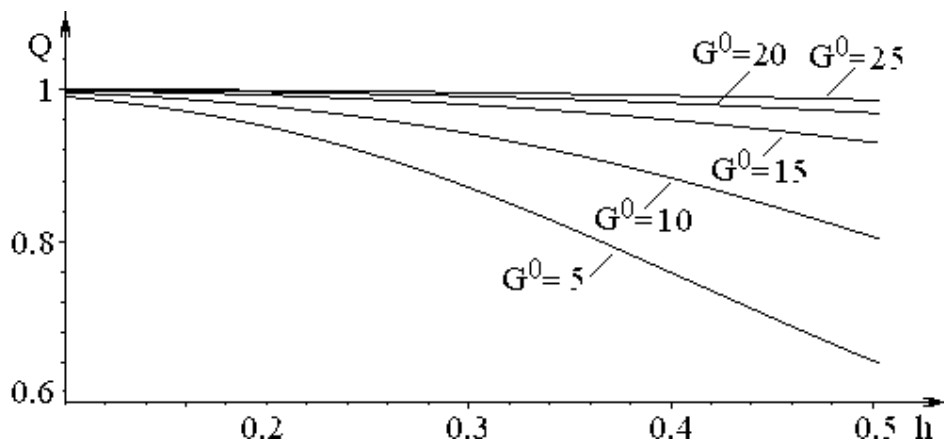


Рис.2.

Результаты расчетов также показали, что важным информативным параметром для медицинской диагностики может служить фаза  $\varphi$  объемного расхода. При этом изменения параметров стенки изменяют фазу незначительно ( $\delta\varphi \sim 4-8^\circ$ ), в то время как изменение коэффициента отражения  $\Gamma$  приводит к вариациям  $\delta\varphi \sim 40-50^\circ$  и изменению знака величины  $\varphi$ , что можно использовать для диагностики патологически сниженной проводимости артериального русла.

**4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Исследование влияния параметров материала стенки, условий течения крови и отражения волн важно для оценки диагностически значимой информации, которая получается путем ультразвуковой регистрации кривых  $d(t)$  и  $u_x(t)$ . Полученные в работе соотношения могут использоваться для расчета интегральных характеристик течения крови и перемещения стенки артерии. Результаты исследования показали, что некоторые параметры пульсовых волн, такие как фазовый спектр объемного расхода, слабо зависят от реологических параметров слоев сосудистой стенки и сильно зависят от условий отражения волн и, таким образом, могут быть использованы в медицинской диагностике. Показано также, что существующие методики восстановления кривых  $p(t)$  по измеренным значениям  $d(t)$  нуждаются в уточнении, по крайней мере в случае повышенного артериального давления и патологий, связанных с утолщением внутреннего слоя и увеличением жесткости среднего слоя стенки артерии.

#### 5. ЛИТЕРАТУРА.

1. Nichols W.W, O'Rourke M.F. McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretical, Experimental and Clinical Principles. Oxford: Oxford University Press. – 1997. – 564p.
2. Hamadiche M., Kizilova N.N. Temporal and Spatial Instabilities of the Flow in the Blood Vessels as Multi-Layered Compliant Tubes. //Int.J.Fluid.Dyn. – 2005. - v.1,N1. – P.1-23.
3. Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. //J.Elasticity. - 2000. - v.61. - P.1-48.
4. Stephanisa C.G., Mourmourasa D.E., Tsagadopoulos D.G. On the elastic properties of arteries. //J.Biomech. - 2003. - v.36. - P.1727-1731.
5. McVeigh G.E. Pulse Waveform Analysis and Arterial Wall Properties. //Hypertension. - 2003. - v.41. - P.1010-1011.