

МЕХАНІЧНИЙ ІМПЕДАНС В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ШАРУ БІОТКАНИНИ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ КРУГОВИМ ШТАМПОМ

В. Т. ГРІНЧЕНКО, В. Н. ОЛІЙНИК

Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Желябова, 8/4, 03680, Київ-180, МСП, Україна
тел. (044) 456-43-13, 456-69-83; e-mail: vin-igm@gu.kiev.ua, v_oliyuk@yahoо.com

Розв'язано лінійну задачу про гармонічні коливання навантаженого плоским круговим штампом (вібратором або сенсором) в'язко-пружного шару біотканини. Встановлено, що у розглянутому діапазоні частот система демонструє резонансну поведінку. Для малих штампів активна і реактивна частини імпедансу мають один порядок. При зростанні радіуса штампів відносна доля активної частини імпедансу зменшується. Показано, що реактивні частини імпедансу при гладкому контакті та прилипанні мають близькі значення. Водночас, при повному прилипанні штампів активна частина імпедансу шару зростає з частотою значно швидше. Для відносно малих вібраторів і сенсорів величина імпедансу поверхні піддатливого шару значно менша за значення, яке дається стержньовим наближенням для циліндра. Для пристроїв з радіусом контактної зони, який перевищує товщину шару, імпеданс поверхні зростає у порівнянні зі стержньовим наближенням.

ВСТУП

Відомо, що присутність контактного сенсора на піддатливій поверхні може стати причиною істотного спотворення віброакустичного поля в околі точки прийому [1, 2]. Тому вивчення особливостей динамічної взаємодії поверхні грудної клітки з пристроями різного призначення є важливим для розвитку методик електронної реєстрації звуків життєдіяльності організму [1, 3] і акустичних систем активного контролю стану бронхолегеневого тракту [4]. На жаль, незважаючи на значну кількість експериментальних і теоретичних робіт, присвячених цій проблемі, на сьогоднішній день не існує чіткого і однозначного уявлення про основні риси формування імпедансних властивостей поверхні тіла людини. Попередні модельні дослідження (див. роботу [6] і огляд літератури у ній) дозволили обґрунтувати твердження про те, що для відносно легких сенсорів поведінка м'яких поверхневих біотканей тіла людини залишається лінійною, а геометричні та фізичні параметри системи не змінюються. Окрім того, показано, що спрощений підхід, який дозволяє обчислити механічний імпеданс зони контакту в стержньовому наближенні (при нехтуванні поперечними хвилями), виявляється недостатнім. При цьому суттєвим є урахування наявності вільної поверхні за краєм сенсора або вібратора, що контактує з тілом.

У роботі [6] моделювалась поведінка в'язко-пружного шару біотканини при гармонічному навантаженні круговим гладким штампом. Тут досліджується ще один важливий випадок граничних умов – повне прилипання штампів до піддатливої поверхні і проводиться порівняльний аналіз обчислених динамічних характеристик при гладкому контакті та повному прилипанні.

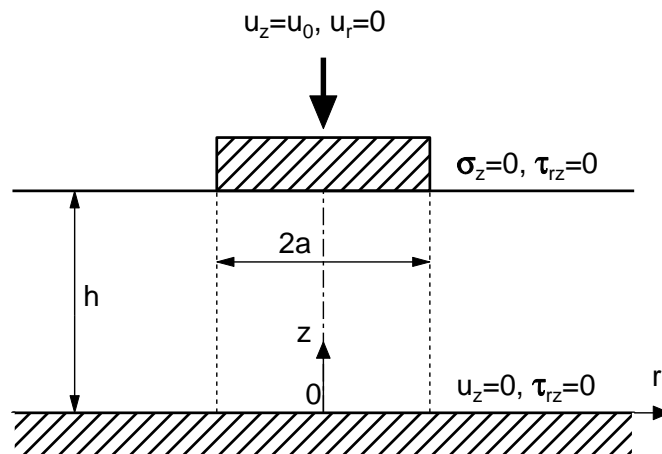


Рис. 1. Схема в'язко-пружного шару, навантаженого штампом

1 ПОСТАНОВКА І МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу про коливання в'язко-пружного шару $0 \leq r < \infty$, $0 \leq z \leq h$ при навантаженні його абсолютно жорстким штампом радіусу a за умови повного прилипання (зчеплення). Вважатимемо, що на торці штамп $z = h$ задані гармонічні нормальні зміщення $u_z(r, h) = u_0 e^{i\omega t}$, $\omega = 2\pi f$ (рис. 1). Будемо досліджувати закономірності поведінки механічного імпедансу поверхні під штампом

$$\mathcal{Z} = \frac{2\pi}{i\omega u_0} \int_0^a \sigma_z r dr \quad \text{при} \quad z = h \quad (1)$$

як функції частоти і геометричних параметрів системи (σ_z – осьові нормальні напруження у шарі). Тому, аналогічно до [6], знак показника комплексної експоненти вибрано таким, щоб у $\text{Im } \mathcal{Z}$ знак “–” відповідав імпедансу типу пружності, а “+” – імпедансу типу маси.

Динамічні деформації матеріалу шару описуються рівнянням Ламе, яке для гармонічного випадку має вигляд

$$c_1^2 \text{grad div } \mathbf{u} - c_2^2 \text{rot rot } \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{u} \quad c_1^2 = 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{G}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho} \quad (2)$$

(експоненційний часовий множник $e^{i\omega t}$ опущено). Тут $\mathbf{u} = \{u_r, u_z\}$ – вектор амплітуд зміщень; c_1 , c_2 – комплексні швидкості поздовжніх та поперечних хвиль у матеріалі відповідно; ρ – густина матеріалу циліндра; G – комплексний модуль зсуву для в'язко-пружного матеріалу; ν – коефіцієнт Пуассона.

Сформулюємо граничні умови при $z = h$. Під штампом задані осьові й радіальні зміщення (останні при повному прилипанні будуть нульовими):

$$u_z = u_0, \quad u_r = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \quad 0 \leq r \leq a, \quad (3)$$

а на поверхні за межами контакту відсутні нормальні й дотичні напруження:

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \quad r \geq a. \quad (4)$$

Нехай шар лежить на абсолютно жорсткій гладкій основі:

$$u_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (5)$$

Напруження σ_z і τ_{rz} виражаються через компоненти зміщень відповідно до закону Гука.

Змішану задачу динамічної теорії пружності (2)–(4) розв'язуватимемо за допомогою методики, запропонованої у попередній роботі [6]. Для цього компоненти зміщень і механічних напружень у шарі представимо у вигляді інтегралів Ханкеля [6]:

$$\frac{u_r(r, z)}{u_0} = \int_0^\infty U(\lambda, z) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad \frac{u_z(r, z)}{u_0} = \int_0^\infty W(\lambda, z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (6)$$

$$\frac{\sigma_z(r, z)}{2G} = \int_0^\infty S(\lambda, z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad \frac{\tau_{rz}(r, z)}{2G} = \int_0^\infty T(\lambda, z) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (7)$$

Використання закону Гука дозволяє зв'язати образи напружень і зміщень:

$$2S(\lambda, z) = (\kappa - 2)\lambda U + \kappa \frac{dW}{dz}, \quad 2T(\lambda, z) = \frac{dU}{dz} - \lambda W, \quad \kappa = \frac{c_1^2}{c_2^2} = 2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} > 1. \quad (8)$$

Відомо, що вирази (6) будуть розв'язками динамічного векторного рівняння Ламе (2), якщо [6]

$$U(\lambda, z) = \kappa \lambda A(\lambda) \operatorname{ch} p_1 z - p_2 B(\lambda) \operatorname{ch} p_2 z, \quad (9)$$

$$W(\lambda, z) = -\kappa p_1 A(\lambda) \operatorname{ch} p_1 z + \lambda B(\lambda) \operatorname{ch} p_2 z.$$

Тут $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ – деякі невідомі функції параметра перетворення Ханкеля; $p_{1,2} = p_{1,2}(\lambda, \omega) = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2/c_{1,2}^2}$.

Застосування співвідношень (8), (9) дає лінійний зв'язок між образами зміщень і напружень на поверхні шару $z = h$:

$$U(\lambda, h) = -\frac{1}{\Delta(\lambda, \omega)} \left\{ S(\lambda, h) \lambda \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) \operatorname{cth} p_1 h - p_1 p_2 \operatorname{cth} p_2 h \right] + \right. \\ \left. + T(\lambda, h) \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2} p_2 \operatorname{cth} p_1 h \operatorname{cth} p_2 h \right\}, \quad (10)$$

$$W(\lambda, h) = -\frac{1}{\Delta(\lambda, \omega)} \left\{ T(\lambda, h) \lambda \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) \operatorname{cth} p_1 h - p_1 p_2 \operatorname{cth} p_2 h \right] + S(\lambda, h) \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2} p_1 \right\}.$$

Тут введено позначення для визначника Релея–Лемба:

$$\Delta(\lambda, \omega) = \left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2} \right)^2 \operatorname{cth} p_1 h - \lambda^2 p_1 p_2 \operatorname{cth} p_2 h.$$

Запишемо нормальні й дотичні напруження під штампом у вигляді деякої невідомої неперервної функції радіальної координати. Це дозволяє формально поширити граничні умови для напружень всю поверхню шару:

$$\sigma_z(r, h) = \begin{cases} \sigma(r), & 0 \leq r \leq a, \\ 0, & a < r < \infty, \end{cases} \quad \tau_{rz}(r, h) = \begin{cases} \tau(r), & 0 \leq r \leq a, \\ 0, & a < r < \infty. \end{cases} \quad (11)$$

Невідомі функції $\sigma(r)$, $\tau(r)$ можна розкласти у ряди Фур’є–Діні за відповідними повними і ортогональними на проміжку $0 \leq r \leq a$ системами базисних функцій:

$$\frac{\sigma(r)}{2G} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n J_0(\mu_n r), \quad \frac{\tau(r)}{2G} = \sum_{m=1}^{\infty} T_m J_1(\mu_m r), \quad \mu_0 = 0, \quad J_0'(\mu_n a) = 0, \quad n \geq 1. \quad (12)$$

У рядах для $\sigma(r)$, $\tau(r)$ коефіцієнти S_n ($n=0, 1, 2, \dots$) і T_m ($m=1, 2, \dots$) – довільні. Їхні величини мають бути визначені з граничних умов у зоні контакту.

Враховуючи властивості інтегральних перетворень Ханкеля для напружень (7) і властивості використаних власних функцій, зі співвідношень (12) легко одержати образи $\sigma_r(r, h)$, $\tau_{rz}(r, h)$ у вигляді відповідних рядів:

$$S(r, h) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\lambda a}{\lambda^2 - \mu_n^2} J_0(\mu_n a) J_1(\lambda a), \quad T(r, h) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m \frac{\mu_m a}{\lambda^2 - \mu_m^2} J_0(\mu_m a) J_1(\lambda a). \quad (13)$$

На основі перетворень Ханкеля (6), з граничних умов для зміщень під штампом (3) маємо два інтегральних рівняння

$$\int_0^{\infty} U(\lambda, h) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda = 0, \quad \int_0^{\infty} W(\lambda, h) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = 1. \quad (14)$$

Підставивши у формули (14) співвідношення між образами зміщень і напружень (10), а також дискретні представлення (13), одержуємо систему двох функціональних рівнянь, алгебраїзація якої дає нескінченну лінійну алгебраїчну систему для визначення коефіцієнтів S_n , T_n . При обчисленні шуканих фізико-механічних полів слід застосувати метод редукції, який полягає у заміні рядів (12) їх скінченними відрізками з N та $N-1$ членів відповідно.

2 АНАЛІЗ ЧИСЕЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Як і в роботі [6], обчислення проведемо у частотній смузі $f \leq 400$ Гц для шару з такими фізичними характеристиками: $\rho = 1100$ кг/м³, $c_1 = \mathbf{Re} c_1 = 1500$ м/с, $\mathbf{Re} c_2 = 1.7$ м/с, ($c_2 = \mathbf{Re} c_2(1 + i(\delta_1 + \omega\delta_2))$), причому $\delta_1 = 0.1$, $\delta_2 = 0.0001$ с). Товщину в’язкопружного шару прийемо рівною $h = 20$ мм. Радіус штампа a будемо варіювати у межах від 8 до 80 мм ($0.4 \leq a/h \leq 4$). Це відповідає розмірам вібраторів у натурних експериментах [2, 5] і сенсорів, які використовуються для електронної аускультатії звуків дихання [3].

На рис. 2 показані частотні залежності $\mathbf{Re} Z$ та $\mathbf{Im} Z$ у заданому частотному діапазоні при різних співвідношеннях a/h . На графіках індексом “ u ” позначені величини, обчислені при повному прилипанні штампа (неперервні криві), а “ τ ” – при гладкому контакті (штрихові) [6]. Окрім того, штрих-пунктиром показано $\mathbf{Im} Z_{\text{rod}}$ – імпеданс циліндра з вільною боковою поверхнею, обчислений у стержньовому наближенні за умови відсутності затухання. Проведений аналіз дозволив зробити висновок про те, що в широкому діапазоні зміни a/h загальна поведінка імпедансу залишається незмінною: на низьких частотах $\mathbf{Im} Z$ має характер пружності, при певному f_0 переходить через резонанс і набуває характеру маси. Для $0.4 \leq a/h \leq 4$ значення резонансної частоти $f_0 < 100$ Гц і

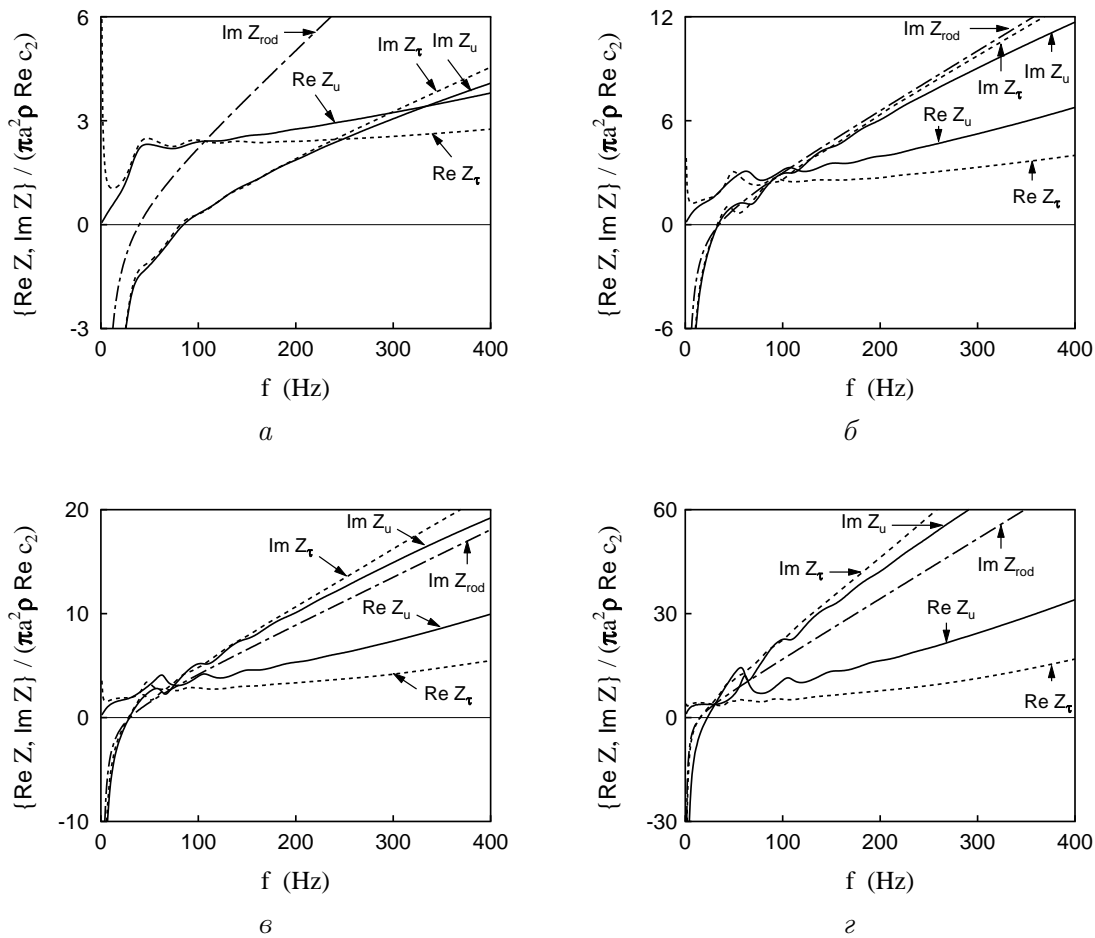


Рис. 2. Частотні залежності імпедансу контактної ділянки поверхні шару:
 а - $a = 8$ мм ($a/h = 0.4$), б - $a = 20$ мм ($a/h = 1$), в - $a = 30$ мм ($a/h = 1.5$), г - $a = 80$ мм ($a/h = 4$)

істотно знижується при зростанні відносного діаметра штампa. Цікаво, що в цілому значення уявних частин імпедансу для різних варіантів граничних умов виявились дуже близькими. Водночас, для усіх a/h значення $\mathbf{Re} Z$ зростає з частотою значно швидше за умови повного прилипання штампa до поверхні шару. Очевидно, цей ефект пов'язаний з тим, що у цьому випадку на краю штампa сильніше збуджуються поперечні моди, пов'язані з загасанням по c_2 . Для $a/h < 1$ активна і реактивна частини імпедансу мають один порядок. При зростанні a/h відносна доля $\mathbf{Re} Z$ зменшується. Відзначимо ще один важливий момент. Для малих відносних радіусів штампa (див. рис. 2, а) на усіх частотах справедливо $\mathbf{Im} Z / \mathbf{Im} Z_{\text{rod}} < 1$. При збільшенні a це відношення зростає. Для $a/h > 1$ (див. рис. 2, в, г) при $f > f_0$ виконується співвідношення $\mathbf{Im} Z > \mathbf{Im} Z_{\text{rod}}$, оскільки у шарі бічні стінки умовного циліндра $0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq h$ додатково навантажені інерційністю матеріалу поза межами штампa. Таким чином, величина механічного імпедансу поверхні шару під штампом контролюється, насамперед, геометричним параметром – відношенням висоти шару до радіуса штампa. При урахуванні загасання поперечних хвиль тип граничних умов впливає, здебільшого, на активну частину імпедансу. Для вібраторів і сенсорів з більшою площею контактної зони імпеданс поверхні піддатливого

шару зростає (при $a/h > 1$ поверхня “краще тримає” пристрій, який закріплюється на ній). Такий характер взаємодії дозволяє адекватно описати в рамках єдиного підходу результати, одержані незалежно різними групами експериментаторів [1, 2, 5].

ВИСНОВКИ

Встановлено, що у розглянутому діапазоні частот, незалежно від співвідношення геометричних параметрів a/h , система демонструє резонансну поведінку, причому частота резонансу спадає при збільшенні відносного діаметра штамп. Для $a/h < 1$ активна і реактивна частини імпедансу мають один порядок. При зростанні a/h відносна доля активної частини імпедансу зменшується. Порівняння показало, що значення реактивних частин імпедансу при гладкому контакті та прилипанні виявились дуже близькими. Водночас, при повному прилипанні штамп активна частина імпедансу шару зростає з частотою значно швидше. Показано, що для відносно малих вібраторів і сенсорів величина імпедансу поверхні піддатливого шару значно менша за значення, яке дається стержньовим наближенням для циліндра. Для пристроїв з діаметром контактної зони, який перевищує товщину шару, імпеданс поверхні зростає у порівнянні зі стержньовим наближенням. Таким чином, при моделюванні віброакустичної взаємодії тіла людини з вимірювальними пристроями суттєвим виявляється урахування товщини. Це дозволяє адекватно описати в рамках єдиного підходу результати, одержані різними групами дослідників при різних геометричних параметрах системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Verburg J., van Vollenhoven E.* Phonocardiography: physical and technical aspects and clinical uses // Non invasive physiological measurements.– London: Academic press, 1979.– P. 213–259.
2. *Vermarien H., van Vollenhoven E.* The recording of heart vibrations: A problem of vibration measurement on soft tissue // Med. Biol. Engng Comput.– 1984.– **22**.– P. 168–178.
3. *Вовк И. В., Дахнов С. Л., Крижановский В. В., Олійник В. Н.* Возможности и перспективы диагностики легочных патологий с помощью компьютерной регистрации и обработки шумов дыхания // Акуст. вісн.– 1998.– **1**, N 2.– С. 21–33.
4. *Paciej R., Vyshedskiy A., Shane J., Murphy R.* Transpulmonary speed of sound input into the supraclavicular space // J. Appl. Physiol.– 2003.– **94**, N 2.– P. 604–611.
5. *Тиманин Е. М.* Модель формирования импедансных свойств мягких биологических тканей // Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей.– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– С. 75–91.
6. *Грінченко В. Т., Олійник В. Н.* Гармонічні коливання в'язко-пружного шару біотканини при навантаженні круговим гладким штампом // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, N 4.– С. 34–47.