МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕЧІЇ В’ЯЗКОЇ РІДИНИ СТОКСА ЧЕРЕЗ КРУГЛИЙ ОТВІР В НЕРУХОМОМУ ЕКРАНІ.

В.А. Галазюк, Г.Т. Сулим
Львівський національний університет імені Івана Франка
sulym@franko.lviv.ua

Запропоновано модель течії з пом’якшеною умовою „прилипання”, за якою швидкість руху рідини вздовж поверхні пластини детермінована дотичними напруженнями, які обумовлені фізичними властивостями поверхні контакту. За цієї умови виникає стрибок дотичної складової вектора швидкості $\mathbf{V}$, який за фізичної вимоги неперервності компонент вектора $\mathbf{\Omega} = 0{,}5 rot\mathbf{V}$ на краю пластини поширюється у її площині поза її межі і утворює, відповідно до означення [1], вихрову пелену.

В основу проведених досліджень покладена система рівнянь стаціонарного руху в’язкої нестисливої рідини Стокса при малих числах Рейнольдса , яка в циліндричній системі координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$ у осесиметричній задачі стосовно компонент $V_0 V_\alpha$ і $V_0 V_\gamma$ вектора швидкості $\mathbf{V}$ набуде вигляду:

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha P + 2\partial_\gamma \omega_\beta = -2\delta'(\gamma)\int_0^\infty \left[A(\xi) - \xi B(\xi)\right] J_1(\xi\alpha) d\xi ,\\ &\partial_\gamma P - 2\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\omega_\beta) = -2\delta\ (\gamma)\int_0^\infty \left[A(\xi) + \xi B(\xi)\right]\xi J_0(\xi\alpha) d\xi ; \end{aligned} \tag{1}$$

$$2\omega_\beta = \partial_\gamma V_\alpha - \partial_\alpha V_\gamma ,\ \ \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha V_\alpha) + \partial_\gamma V_\gamma = 0 . \tag{2}$$

В рівняннях (1) функції $A(\xi)$ і $B(\xi)$ визначають наперед відомі густини розподілу складових вектора масових сил та масових силових диполів у площині $\gamma = 0$; $\delta(\gamma)$; $\delta'(\gamma)$ – дельта-функція Дірака та її похідна; $J_0(\xi\alpha)$ та $J_1(\xi\alpha)$ – функції Беселля першого роду; $P(\alpha,\gamma) = k^2 p(\alpha,\gamma)$ – безрозмірний тиск, $k^2 = R\rho_0 / \mu V_0$; ρ_0, V_0 – тиск і швидкість на безмежності; μ – в’язкість рідини; R – радіус пластини. Поле швидкості і тиску, які визначаються рівняннями (1) і (2) подамо у вигляді інтегралів Ганкеля:

$$\begin{aligned} &V_\alpha(\alpha,\gamma) = sign(\gamma)\int_0^\infty \left[\xi B(\xi) - A(\xi)\right] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi + \gamma\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi ,\\ &V_\gamma(\alpha,\gamma) = 1 + \int_0^\infty \xi B(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi + |\gamma|\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi ,\\ &P(\alpha,\gamma) = -2 sign(\gamma)\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi , \end{aligned} \tag{3}$$

де $sign(\gamma)$- функція стрибка. За відомим полем швидкостей (3) визначимо єдину не рівну нулю в осесиметричному випадку компоненту $\omega_\beta(\alpha,\gamma)$ вектора $\mathbf{\tilde{\upsilon}}$:

$$\omega_\beta(\alpha,\gamma)=\delta(\gamma)\int_0^\infty[\xi B(\xi)-A(\xi)]J_1(\xi\alpha)d\xi+\gamma\int_0^\infty \xi A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)d\xi\,,$$

де перший доданок є математичною моделлю вихрової пелени та дотичне напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma)$:

$$\frac{\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma)}{2\mu}=\delta(\gamma)\int_0^\infty[\xi B(\xi)-A(\xi)]J_1(\xi\alpha)d\xi-\int_0^\infty \xi[\xi B(\xi)-A(\xi)]e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)d\xi-|\gamma|\int_0^\infty \xi^2 A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)d\xi\,.$$

Якщо функції $A(\xi)$ і $B(\xi)$, які відповідно з поданнями (3) визначають усі характеристики течії, задати узагальненими рядами Неймана [2]

$$\xi B(\xi)=\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{J_{2n+r+1}(\xi)}{\xi^r},\quad \xi[\xi B(\xi)-A(\xi)]=\sum_{n=0}^\infty b_n\frac{J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^q}\ ,\ r>0\ ,\ q>-1$$

з невизначеними наперед коефіцієнтами a_n і b_n, то відповідним їх вибором можна забезпечити виконання таких крайових умов в межах отвору і поза ним на поверхнях пластини $\gamma=\pm 0$:

$$V_\gamma(\alpha,\pm 0)=\left(1-\alpha^2\right)^r f\left(\alpha^2\right)\ \ (0\le\alpha\le 1),\qquad V_\gamma(\alpha,\pm 0)=0\quad (1\le\alpha<\infty),$$

де $r>1$ забезпечує узгодженість цих умов на краю $\alpha=1$, а $f\left(\alpha^2\right)$- довільна неперервна функція. Разом з тим дотичне напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\pm 0)$ в області $0\le\alpha\le 1$ є довільна неперервна функція, яка разом з її значенням в області $1\le\alpha<\infty$ забезпечує виконання додаткової вимоги неперервності компоненти $\omega_\beta(\alpha,\pm 0)$ вектора Ω:

$$\lim_{\alpha\to 1-0}\omega_\beta(\alpha,\pm 0)=\lim_{\alpha\to 1+0}\omega_\beta(\alpha,\pm 0)\quad ,$$

на краю отвору $\alpha=1$ при такому значенні параметрів $0<q<1$ При цьому існування вихрової пелени в межах отвору спричиняє появу стрибка тиску $P(\alpha,\pm 0)$ у ньому (ефект вихрової пелени). З’ясовано також, що за припущення про відсутність вихрової пелени і стрибка тиску в межах отвору задача має тільки розв’язок $A(\xi)=0,\quad \xi B(\xi)=A(\xi)=0$.

Література

1. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир. 1973.

2. Галазюк В.А., Сулим Г.Т. Рівновга дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями. *Фіз.-хім. Механіка матеріалів*, 2004, 40, №4., с. 17-33.