

# КОЛИВАННЯ П-ПОДІБНОГО МАЯТНИКА

О. М. ВОВЧЕНКО, А. В. НІКІТЕНКО, В. В. МЕЛЕШКО

*Кафедра теоретичної та прикладної механіки,  
Київський Національний університет імені Тараса Шевченка,  
вул. Володимирська, 64 01033 Київ, Україна  
e-mail: vovchenko@univ.kiev.ua, nikitenko@univ.kiev.ua, meleshko@univ.kiev.ua*

Розглянуто нелінійні коливання подвійного фізичного маятника. Побудовані за допомогою методу Хенона перерізи Пуанкаре демонструють хаотичність руху подвійного маятника в одному випадку і квазіперіодичність в іншому. Мала різниця між початковими умовами траєкторій доводить непередбачуваність поведінки системи вже при двох степенях вільності.

## ВСТУП

Хаотична динаміка представляє нову галузь нелінійної механіки, що стрімко розвивається в наш час [1, 2]. Хаотична динаміка має своє застосування в багатьох областях наук та техніки, включаючи астрономію, фізику плазми, статистичну механіку та гідродинаміку, що доводить перспективність розвитку цієї галузі та досліджень, пов'язаних з хаотичною поведінкою різноманітних систем. Дослідження в цій галузі почалися ще наприкінці XIX століття, коли А. Пуанкаре намагався побудувати аналітичну теорію нелінійних збурень планетних рухів. Проте сучасний підхід до проблеми також базується на чисельних результатах, отриманих за допомогою швидкодіючих ЕОМ.

В докладі розглядається класична задача про нелінійні коливання подвійного фізичного маятника. Така консервативна система, котра у лінійному наближенні є типовим прикладом малих коливань зв'язаних систем з двома ступенями вільності (зокрема, на її основі було отримане практичні рекомендації по подоланню беззвучності дзвону нового колокола в Кельнському соборі [3]), при немалих нелінійних коливаннях може проявляти хаотичну поведінку [4, 5].

Ми зупинимось на типовій задачі про коливання так званого П-подібного фізичного маятника, схематично зображеного на рис. 1, а, б). Метою роботи є доповнити наближені аналітичні результати Н. Ротта [6] чисельним аналізом такої нелінійної консервативної системи методами сучасної хаотичної динаміки.

## 1 ПОСТАНОВКА ТА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо плоскі коливання подвійного маятника, який зображений на рис. 1, а. В фіксованій точці  $O$  знаходиться шарнір, на якому закріплене тіло I, що вільно обертається у площині  $Oxy$ . Тіло II шарнірно з'єднане з тілом I у точці  $B$ , причому воно може коливатись також тільки у площині  $Oxy$ . Взагалі кажучи, такий подвійний маятник може складатися з тіл довільної форми, але перш за все нас цікавитиме П-подібний маятник, що складається з трьох однорідних стержнів однакової лінійної густини  $\rho$ . У цьому випадку тіло I - шарнірно закріплений в середині стержень, довжини  $2b$ , зварений зі стержнем довжини  $c'$  під прямим кутом в одному кінці і шарнірно з'єднаний з іншим стержнем такої ж довжини. У такому маятнику в стані рівноваги два шарніри

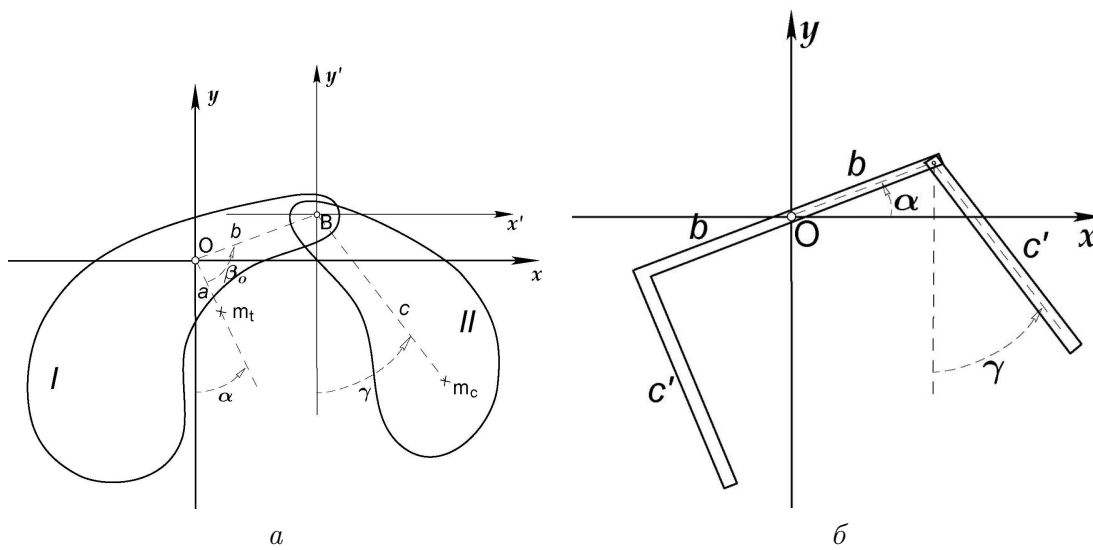


Рис. 1. Подвійний маятник:  
 а – Загальний випадок б – П-подібний маятник

будуть розташовані на вісі  $Ox$ . Хоча в загальному випадку взаємовплив двох коливальних систем у такому маятнику слабкий – кожна з них по суті підтримує тільки свою частоту при малих коливаннях, – все ж існує частинний випадок, коли зв'язок має сильний вплив. Така ситуація спостерігається при відношенні власних частот  $1 : 2$ . Добре відомо, що при дії на маятник періодичної сили найбільш ефективною буде та, частота якої співпадає з частотою маятника за виключенням випадку, коли сила напрямлена прямо на шарнірне закріплення. В такому разі резонансною буде частота, вдвічі більша за власну частоту маятника [6].

Загальна методика аналізу цієї задачі є такою. Перш за все запишемо систему рівнянь Лагранжа другого роду, що описують рух коливань маятника. Не зважаючи на те, що модель маятника має тільки дві степені вільності і до того ж є консервативною, з математичної точки зору така система рівнянь є неінтегрованою. Для знаходження чисельного розв'язку використаємо метод Рунге-Кутта, задавши відповідний максимальний крок інтегрування для досягнення потрібної точності. Побудуємо перерізи Пуанкаре, що характеризуватимуть регулярність або нерегулярність руху системи. Цей метод дозволяє досліджувати коливання протягом багатьох періодів і з'ясувати чи є хаотичною поведінка моделі. При чисельному розв'язанні задачі постає проблема точності обчислень та отриманих результатів. Нелінійні системи дуже чутливі до задання початкових умов, і чим далі в часі ми хочемо отримати відповідь на питання про стан системи, тим точніше треба задавати початкові значення аргументів.

Для побудови перерізів Пуанкаре скористаємось методом Хенона [7], котрий дозволяє точно обрахувати точки перетину траєкторії з деякою заданою поверхнею, уникаючи непередбачуваних помилок при чисельному інтегруванні диференціальних рівнянь руху системи.

## 2 РІВНЯННЯ РУХУ

Виберемо нерухому систему координат з початком в точці  $O$ , в якій знаходиться шарнірне закріплення тіла I. Тіло II з'єднане з першим в точці  $B$ . Нехай точка  $D$  - центр мас системи, тільки при умові, що маса другого тіла точково зосереджена в шарнірі  $B$ . Позначимо відстані:  $OB = b$ ,  $BC = c$ ,  $OD = a$ . Нехай  $m_b$  - маса тіла I,  $m_c$  - тіла II і  $m_t = m_b + m_c$ . Позначимо через  $\alpha$ ,  $\gamma$  кути відхилення від вертикалі точок  $D$  і  $C$  відповідно, та виберемо ці кути за незалежні узагальнені координати. Позначимо кут нахилу відрізка  $OB$ , що з'єднує два шарніри, до вертикалі, у стані рівноваги, за  $\beta_0$ . Нехай  $I_t$  - момент інерції тіла I відносно точки  $O$ , але з масою  $m_c$ , зосередженою в точці  $B$ ,  $I_c$  - момент інерції тіла II відносно точки  $B$ :

$$I_t = \int_{m_b} (x^2 + y^2) dm + b^2 m_c, \quad I_c = \int_{m_c} (x'^2 + y'^2) dm. \quad (1)$$

Кінетична і потенціальна енергія маятника мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \Pi &= m_t g a (1 - \cos \alpha) + m_c g c (1 - \cos \gamma), \\ T &= \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 I_t + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 I_c + \dot{\alpha} \dot{\gamma} m_c b c \cos(\alpha - \gamma + \beta_0), \end{aligned} \quad (2)$$

і тоді функція Лагранжа є:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 I_t + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 I_c + \dot{\alpha} \dot{\gamma} m_c b c \cos(\alpha - \gamma + \beta_0) - m_t g a (1 - \cos \alpha) - m_c g c (1 - \cos \gamma). \quad (3)$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} I_t + \ddot{\gamma} m_c b c \cos(\alpha - \gamma - \beta_0) + \dot{\gamma}^2 m_c b c \sin(\alpha - \gamma - \beta_0) + m_t g c \sin \gamma = 0, \\ \ddot{\gamma} I_c + \ddot{\alpha} m_c b c \cos(\alpha - \gamma - \beta_0) - \dot{\alpha}^2 m_c b c \sin(\alpha - \gamma - \beta_0) + m_c g c \sin \gamma = 0. \end{cases} \quad (4)$$

У випадку II-подібного маятника, який зображений на рис. 1, б, маємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{\pi}{2}, \quad c = \frac{c'}{2}, \quad a = \frac{c'^2}{4(b + c')}; \\ m_t &= 2\rho(b + c'), \quad m_c = \rho c', \\ I_t &= \frac{2}{3} \rho b^3 + 2\rho c' b^2 + \frac{1}{3} \rho c'^3; \end{aligned} \quad (5)$$

Остаточно отримуємо повну нелінійну систему коливань маятника:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{b}{c'} \right)^2 + 4 \frac{b}{c'} + \frac{2c'}{3b} \right] - \ddot{\gamma} \sin(\alpha - \gamma) = -\dot{\gamma}^2 \cos(\alpha - \gamma) - \frac{g}{b} \sin \alpha, \\ \ddot{\gamma} \frac{2c'}{3b} - \ddot{\alpha} \sin(\alpha - \gamma) = \dot{\alpha}^2 \cos(\alpha - \gamma) - \frac{g}{b} \sin \gamma, \end{cases} \quad (6)$$

з найпростішими початковими умовами  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\dot{\alpha} = 0$ ,  $\gamma = \gamma_0$ ,  $\dot{\gamma} = 0$ , при  $t = 0$ .

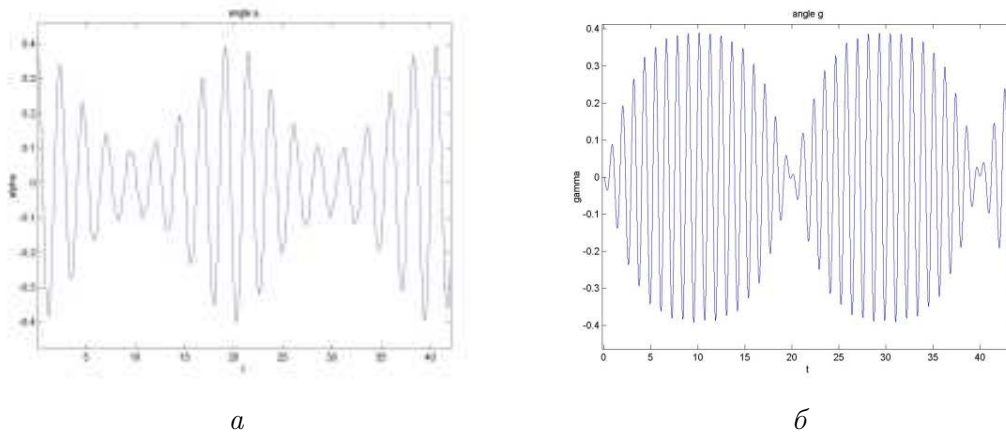


Рис. 2. Малі коливання маятника для  $0 < t < 40$ :  
 а – Залежність кута  $\alpha$  від часу; б – Залежність кута  $\gamma$  від часу.

Система рівнянь (6) можуть бути зведені або до динамічної системи четвертого порядку шляхом введення нових змінних  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \dot{\alpha}$ ,  $x_3 = \gamma$ ,  $x_4 = \dot{\gamma}$ , або до канонічної гамільтонової системи другого порядку. При цьому функція Гамільтона, що виражає повну енергію системи, повинна залишатися постійною на протязі всього руху. Ця обставина використовується для контролю точності чисельного інтегрування нелінійної системи.

### 3 АНАЛІЗ ЧИСЕЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

При обчисленнях використовуватимемо значення параметрів  $c' = 0.5$ ,  $\frac{c'}{b} = 1.558$ . При таких значеннях взаємовплив двох тіл у П-подібному маятнику має резонансний характер [7], оскільки власні частоти співвідносяться як 1 : 2.

Чисельно проінтегрувавши отримані рівняння, можна застосувати декілька способів аналізу результатів. Графіки на рис. 2а,б) показують залежності  $\alpha(t)$  та  $\gamma(t)$  при початкових умовах  $([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}] = [0.104720, 0, 0, 0])$ , які відповідають умовам малих лінійних коливань при відхиленні на початкові кути  $\alpha_0 = 6^\circ$ ,  $\gamma_0 = 0$ . Тут маємо типовий вид биття коливань зв'язаних лінійних коливальних систем, коли амплітуда одних коливань збільшується зі зменшенням амплітуди інших, і навпаки.

Для немалих відхилень двох маятників система може проявляти хаотичну поведінку. Аналіз такої поведінки доцільно проводити за допомогою побудови перерізів Пуанкаре. Перерізи Пуанкаре являють собою сукупність точок перетину траєкторії руху системи у фазовому просторі з деякою поверхнею у цьому просторі. Для їх побудови використаємо метод Хенона [7]. Обчислимо точки перетину траєкторії руху П-подібного маятника у фазовому просторі  $x_1, x_2, x_3, x_4$  з площиною  $x_1 = 0$  при умові  $x_2 > 0$ . Тоді перерізи Пуанкаре являють собою сукупність точок  $x_3, x_4$ .

Розглянемо дві початкові умови  $([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}] = [0.959931, 0, 0.785398, 0])$  та  $([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}] = [0.973021, 0, 0.785398, 0])$ , які відповідають початковим відхиленням маятника відповідно на кути  $\alpha_0 = 55^\circ$ ,  $\gamma_0 = 45^\circ$  та  $\alpha_0 = 55^\circ 45'$ ,  $\gamma_0 = 45^\circ$ .

Застосуємо метод Рунге-Кутта для чисельного інтегрування системи при початкових умовах  $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [-55^0, 0, 45^0, 0]$  та  $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [-55^0 45', 0, 45^0, 0]$ . При

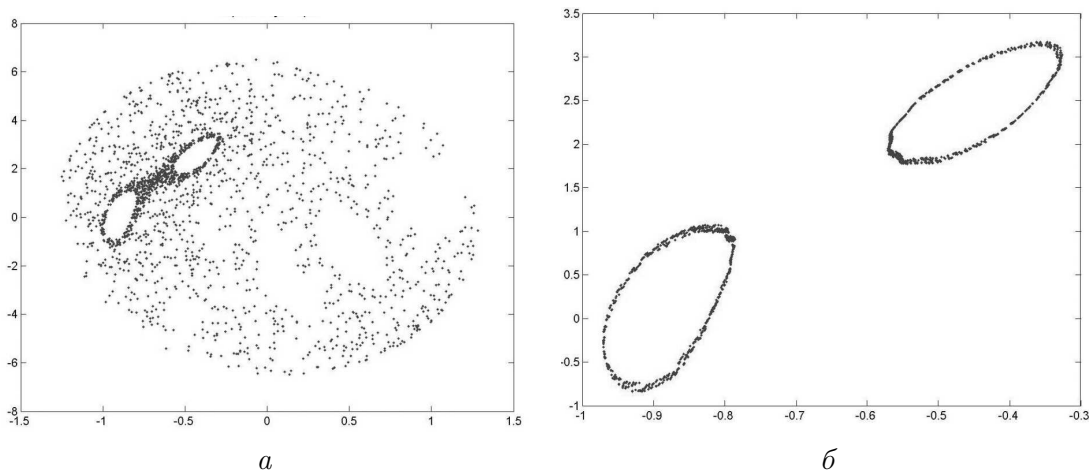


Рис. 3. Перетин Пуанкаре при початкових умовах:

$$a - ([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}] = [0.973021, 0, 0.785398, 0]), \quad b - ([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}] = [0.959931, 0, 0.785398, 0])$$

цьому зміна повної енергії має порядок  $10^{-4}$  і має лінійний характер. Перерізи Пуанкаре будуть мати такий вигляд ( на осях відкладені значення фазових координат  $\gamma, \dot{\gamma}$ ).

Перетин Пуанкаре, зображений на рис. 3а свідчить про хаотичність руху маятника. Кожна нова точка з’являється у випадковому місці на площині фазових координат. Спочатку точки перетину розташовуються біля двох замкнених кілець, але потім виходять за їх межі. Змінивши початкові умови на  $([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}] = [0.973021, 0, 0.785398, 0])$ , будемо мати перетин Пуанкаре, який свідчить про квазіперіодичність руху маятника рис. 3б. Таким чином, мала зміна початкових значень фазових координат призводить до принципової зміни характеру руху П-подібного маятника.

## ВИСНОВКИ

Розглянувши нелінійні рухи П-подібного подвійного маятника, ми встановили, що вже при двох степенях вільності нелінійна консервативна гамільтонова система поводить себе непередбачуваним чином і мала зміна початкових умов призводить до принципової зміни характеру поведінки системи. Причиною хаотичного руху тіл є найточніше і у найменших деталях слідування динамічної системи початковим умовам. За допомогою перерізів Пуанкаре показана відмінність регулярних рухів системи від нерегулярних. Також вони доводять непередбачуваність розміщення точки траєкторії на многовиді фазового простору, що задається Гамільтоніаном та першим інтегралом системи диференціальних рівнянь, або інтегралом енергії.

## ЛІТЕРАТУРА

1. А. Лихтенберг, М. Либман Регулярная и стохастическая динамика.– М.: Мир, 1984.
2. Ф. Мун Хаотические колебания.– М.: Мир, 1990.
3. Г. Лоренц Техническая механика.– С-Пб.: Риккер, 1909.

4. *N. Srivastava, C. Kaufman, G. Muller* Hamiltonian chaos // *Comput. Phys.*– 1990.– **5.**– С. 549–553.
5. *T. Shinbrot, C. Grzebogi, J. Wisdom, J.A. Yorke* Chaos in a double pendulum // *Amer. J. Phys.*– 1992.– **60.**– С. 491–497.
6. *N. Rott* A multiple pendulum for the demonstration of non-linear coupling // *Z. angew. Math. Phys.*– 1970.– **21.**– P. 570–582.
7. *M. Henon* On numerical computation of Poincaré maps // *Physica.*– 1982.– D **5.**– С. 412–414.