

СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ХРЯЩЕЙ ТРАХЕИ И БРОНХОВ ЧЕЛОВЕКА

В. Г. Басовский, И. В. Вовк

*Институт гидромеханики НАН Украины
ул. Желябова, 8/4, 03680, Киев-180, ГСП, Украина
тел. (044) 456-69-83; e-mail: basovsky@ukr.net, vovk@visti.com*

Проведен анализ геометрических и физических характеристик хрящей трахеи и главных бронхов человека, сформулированы их механические модели, представляющие хрящи в виде круговых стержней постоянного поперечного сечения со свободными концами. На основе теории изгибных колебаний круговых стержней разработана расчетная схема для оценки собственных частот и форм колебаний хрящей, а также их вынужденных колебаний под воздействием радиально распределенной гармонической силы.

ВВЕДЕНИЕ

При формировании акустических и математических моделей бронхиального дерева значительную сложность представляет оценка и учет физических и геометрических свойств стенок воздухоносных путей, поскольку экспериментальные данные о таких свойствах весьма скудны и во многом противоречивы. Поэтому, как правило, ограничиваются простейшими гипотезами о физических свойствах стенок воздухоносных путей [1, 2]. Например, предполагают, что все стенки бронхиального дерева являются локально реагирующими и идентичными в пределах одного поколения воздухоносных путей. Кроме того, считают, что физические свойства стенок воздухоносных путей данного поколения не изменяются ни вдоль образующих, ни вдоль направляющих воздухоносных путей. Вместе с тем, хорошо известно, что физические свойства стенок воздухоносных путей транзитной зоны изменяются от точки к точке не только вдоль образующих, но и вдоль направляющих. Это обусловлено, в первую очередь, тем обстоятельством, что так называемые “кольцевые” хрящи, расположенные в тканях стенок воздухоносных путей и призванные обеспечивать их поперечную жесткость, не имеют форму замкнутых колец.

В силу указанных особенностей строения стенок воздухоносных путей становится очевидным, что их колебания (под воздействием звука голоса или шумов потока воздуха при акте дыхания) не могут быть осесимметричными в плоскости поперечного сечения воздухоносных путей. Как следствие, звуковая энергия, переизлучаемая стенками воздухоносных путей в окружающие ткани, также не может быть распределена симметрично относительно их продольных осей.

Учитывая изложенное, целью настоящей работы является разработка акустической и математической моделей хрящей воздухоносных путей бронхиального дерева человека и получение на этой основе количественных данных о собственных и вынужденных их упругих колебаний.

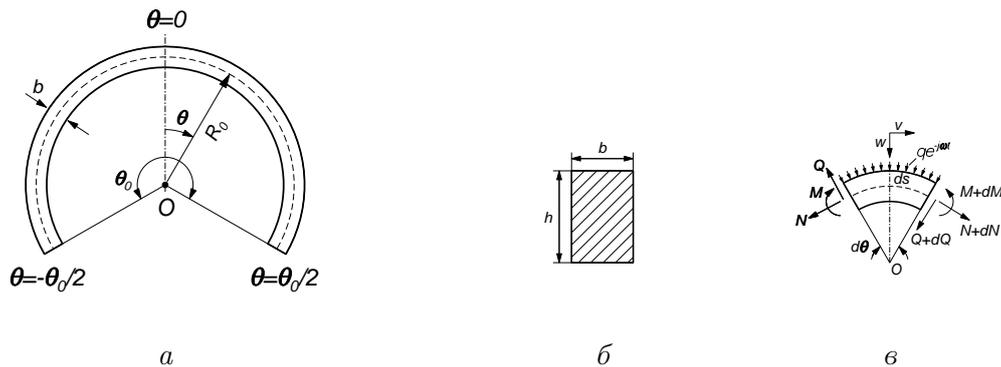


Рис. 1. Механическая модель хряща:

a – круговой стержень, *б* – поперечное сечение стержня, *в* – элемент стержня и действующие на него силы и моменты

1 ОСОБЕННОСТИ СТРОЕНИЯ ХРЯЩЕЙ ТРАХЕИ И БРОНХОВ И ИХ МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Хрящи воздухоносных путей транзитной зоны бронхиального дерева человека представляют собой незамкнутое кольцо (дугу окружности). При этом хрящи трахеи охватывают приблизительно две трети ее окружности, а хрящи главных бронхов – около половины. Каждый трахеальный хрящ имеет высоту около $2 \div 4$ мм и толщину около 1 мм. Что касается данных о высоте и толщине бронхиальных хрящей, то в доступной нам литературе их обнаружить не удалось. Можно предположить, что размеры бронхиальных хрящей меньше соответствующих размеров трахеальных хрящей во столько же раз, во сколько диаметр трахеи больше диаметра главных бронхов (т. е. примерно в 1.5 раза [1]). Плотность биоткани хрящей лежит в довольно узком диапазоне значений $(1.06 \div 1.14) \cdot 10^3$ кг/м³, а коэффициент Пуассона весьма близок к 0.3. Модуль Юнга, судя по разным оценкам, может колебаться в очень широких пределах $4.4_{-1.8}^{+3.3}$ МПа.

Обобщение приведенных выше данных о характеристиках хрящей позволило выработать ряд гипотез и на этой основе сформулировать их механические модели. В частности, были приняты следующие гипотезы: 1) В плане хрящи представляют собой незамкнутое круговое кольцо; 2) Поперечное сечение трахеального хряща имеет форму прямоугольника; 3) Поперечное сечение хряща главного бронха подобно поперечному сечению хряща трахеи, но его линейные размеры меньше во столько раз, во сколько диаметр трахеи больше диаметра главного бронха; 5) Длина дуги окружности рассматриваемых хрящей намного больше размеров их поперечного сечения.

На рис. 1 представлено схематическое изображение принятой механической модели хряща в плане и указаны координатные оси связанной с ней цилиндрической системы координат. Такая механическая модель позволяет сделать следующий шаг – перейти к математическому моделированию хрящей на основе использования известной теории изгибных колебаний кругового стержня со свободными концами [3].

2 ТЕОРИЯ

Рассмотрим изгибные колебания хряща в виде кругового стержня постоянного поперечного сечения со свободными концами под воздействием гармонической радиально распределенной силы с интенсивностью $q(\theta) \exp(-j\omega t)$, где ω – круговая частота вынужденных колебаний, j – мнимая единица. Продольная ось стержня в недеформированном состоянии очерчена по дуге окружности радиуса R_0 и углового размера θ_0 (см. рис. 1). При этом крутильными и продольными деформациями пренебрегаем. Условия равновесия элемента ds стержня (см. рис. 1, в) при вынужденных изгибных колебаниях имеют вид [3]:

$$\frac{d\hat{N}}{d\theta} - \hat{Q} = -mR_0\omega^2 V, \quad (1)$$

$$\frac{d\hat{Q}}{d\theta} + \hat{N} = -mR_0\omega^2 W - R_0 q, \quad (2)$$

$$\frac{d\hat{M}}{d\theta} - R_0 \hat{Q} = 0, \quad (3)$$

Здесь и далее временной множитель $\exp(-j\omega t)$ опускаем. В уравнениях (1) – (3): \hat{N} , \hat{Q} , \hat{M} – соответственно амплитуды нормальной силы, перерезывающей силы и изгибающего момента; V , W – амплитуды компонент перемещения сечений стержня соответственно в тангенциальном и радиальном направлениях; m – погонная масса стержня.

Присоединим к уравнениям движения элемента известные зависимости из теории тонких криволинейных стержней:

$$\hat{M} = -\frac{EI}{R_0^2} \left(\frac{d^2 W}{d\theta^2} + W \right), \quad (4)$$

$$W = \frac{dV}{d\theta}, \quad (5)$$

где E – модуль Юнга; $I = b^3 h / 12$ – момент инерции поперечного сечения стержня.

Для стержня со свободными концами величины M , Q и N обращаются в нуль при $\theta = \pm\theta_0/2$. Эти краевые условия для вынужденных колебаний с учетом (2) – (4), можно записать в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{R_0^2} \left(\frac{d^2 W}{d\theta^2} + W \right) \Big|_{\theta=\pm\theta_0/2} &= 0, \\ -\frac{EI}{R_0^3} \left(\frac{d^3 W}{d\theta^3} + \frac{dW}{d\theta} \right) \Big|_{\theta=\pm\theta_0/2} &= 0, \\ \left(\frac{EI}{R_0^3} \left(\frac{d^4 W}{d\theta^4} + \frac{d^2 W}{d\theta^2} - \Omega^2 W \right) - R_0 q \right) \Big|_{\theta=\pm\theta_0/2} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где: $\Omega = \omega/\omega_*$, $\omega_* = \sqrt{EI/m/R_0^2}$.

Рассмотрим вынужденные колебания хряща под воздействием симметричной относительно сечения $\theta = 0$ распределенной силы. Учитывая неоднородность краевого условия для нормальных усилий, представим общее решение для перемещений хряща

$\xi = (V, W)$ в виде суммы ряда по симметричным нормированным собственным формам $\xi_\gamma = (V_\gamma, W_\gamma)$ колебаний хряща в вакууме [4] и некоторого дополнительного перемещения $\tilde{\xi} = (\tilde{V}, \tilde{W})$, которое позволит удовлетворить неоднородные краевые условия:

$$\xi = \sum_{\gamma=0}^{\infty} G_\gamma \xi_\gamma + \tilde{G} \tilde{\xi}, \quad (7)$$

где \tilde{G} и G_γ – неизвестные коэффициенты. Нулевой член ряда в (7) соответствует поступательному перемещению хряща как абсолютно жесткого тела с нулевой собственной частотой.

Тангенциальные и радиальные перемещения хряща не являются независимыми функциями, а связаны между собой соотношением (5). Поэтому достаточно указать способ вычисления только какой-нибудь одной из компонент перемещения. Амплитуду радиального дополнительного перемещения $\tilde{W}(\theta)$ выберем в следующем виде:

$$\tilde{W}(\theta) = \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0/2} \right)^2 \right)^4 \quad (8)$$

Такой выбор позволяет тождественно удовлетворить краевые условия для изгибающего момента и перерезывающей силы. Подставляя (7) с учетом (8) в третье краевое условие (6) и учитывая, что функции $W_\gamma(\theta)$ удовлетворяют соответствующим однородным краевым условиям для нормальных усилий [4], получим линейное алгебраическое уравнение, связывающее неизвестные коэффициенты \tilde{G} и G_γ :

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} G_\gamma (\Omega^2 - \Omega_\gamma^2) W_\gamma \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{384}{(\theta_0/2)^4} \tilde{G} = -\frac{R_0^4}{EI} q \left(\frac{\theta_0}{2} \right). \quad (9)$$

Здесь Ω_γ – собственные безразмерные круговые частоты хряща [4].

Алгебраизацию уравнений движения (1) – (3) осуществим на основе свойств ортогональности собственных форм колебаний хряща. С этой целью вначале приведем эти уравнения к двум уравнениям, исключив из первых двух перерезывающую силу с помощью третьего и соотношения (4). Далее подставим в полученные таким образом систему из двух уравнений выражения для компонент перемещения стержня (7). После этого умножим обе части системы на вектор собственных колебаний хряща ξ_l и проинтегрируем по переменной θ от 0 до $\theta_0/2$. После очевидных преобразований с использованием краевых условий для нормальных сил N и N_γ получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$G_l (\Omega^2 - \Omega_l) + \tilde{G} (\Omega^2 I_{1l} + I_{2l}) = -\frac{R_0^4}{EI} \int_0^{\theta_0/2} q W_l d\theta, \quad l = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Здесь введены обозначения:

$$I_{1l} = \int_0^{\theta_0/2} (\tilde{V} V_l + \tilde{W} W_l) d\theta, \quad I_{2l} = \int_0^{\theta_0/2} \left(\left(\frac{d^3 \tilde{W}}{d\theta^3} + \frac{d\tilde{W}}{d\theta} \right) V_l - \left(\frac{d^4 \tilde{W}}{d\theta^4} + \frac{d^2 \tilde{W}}{d\theta^2} \right) W_l \right) d\theta.$$

Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (10) и уравнение (9) являются исходными для получения количественных данных об изгибных колебаниях хрящей трахеи и главных бронхов человека под воздействием гармонической распределенной силы с интенсивностью $q(\theta)$.

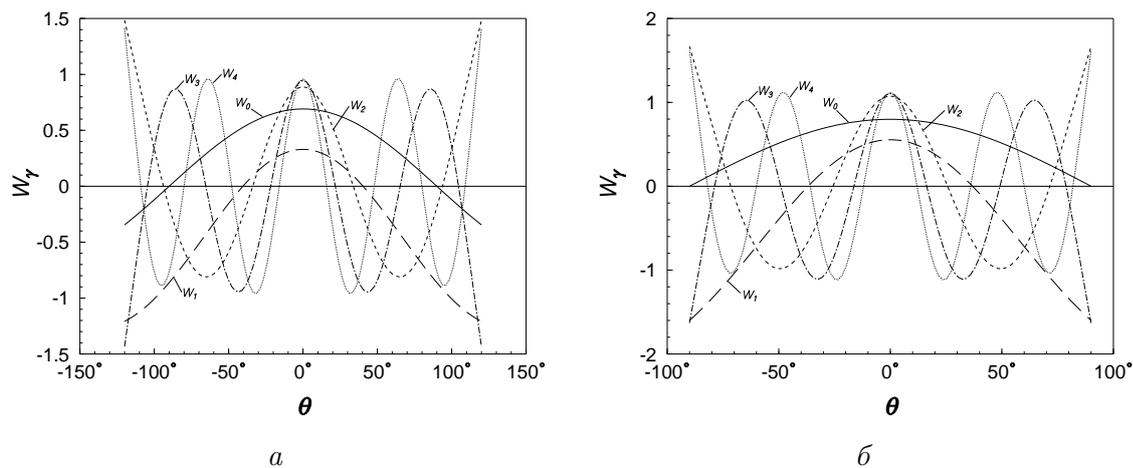


Рис. 2. Радиальные перемещения симметричных собственных форм колебаний:
 а – хряща трахеи, б – хряща главных бронхов

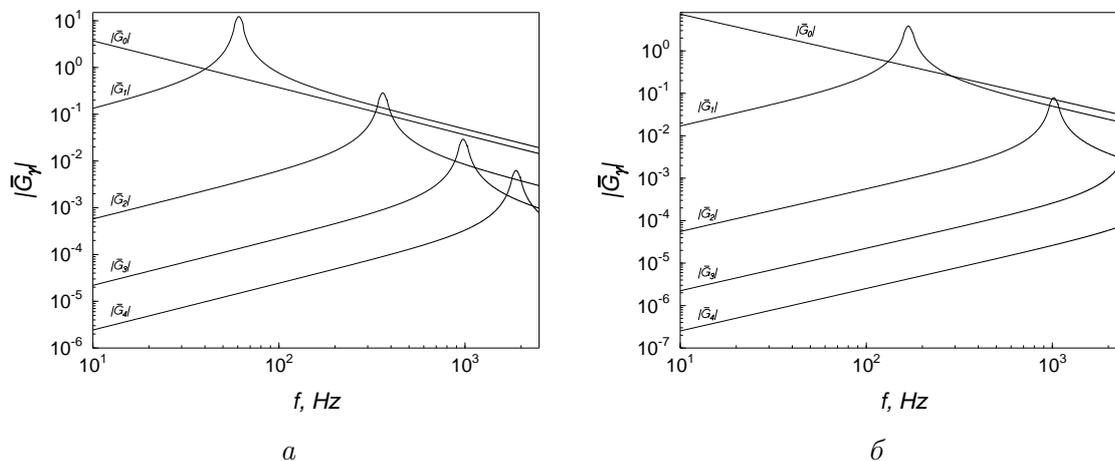


Рис. 3. Коэффициенты разложения по собственным формам колебательной скорости:
 а – хряща трахеи, б – хряща главных бронхов

3 АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При проведении конкретных расчетов были использованы следующие геометрические и физические характеристики хрящей: для хряща трахеи – $2R_0 = 1.75 \cdot 10^{-2}$ м, $\theta_0 = 240^\circ$, $b = 1.64 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 3.2 \cdot 10^{-3}$ м; для хряща главных бронхов – $2R_0 = 1.18 \cdot 10^{-2}$ м, $\theta_0 = 180^\circ$, $b = 1.1 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 2.18 \cdot 10^{-3}$ м. Плотность биоткани хрящей принималась равной $1.1 \cdot 10^3$ кг/м³, а модуль Юнга – $4.4 \cdot 10^6$ Па.

Обратимся к рис. 2, на котором изображены радиальные перемещения для пяти первых симметричных собственных форм колебаний хрящей трахеи и главных бронхов. Как видно, зависимости для радиальных перемещений от угла достаточно сложны для чисто изгибных форм колебаний ($\gamma \geq 1$). Они имеют противофазные участки колебаний и узловые точки, количество которых растет с ростом номера собственной формы колебаний хряща. Приведенные данные позволяют убедиться в правильности высказанного

выше предположения о том, что, из-за специфической геометрии хрящей, колебания стенок воздухоносных путей транзиторной зоны бронхиального не могут быть осесимметричными.

Изображенным на рис. 2 формам колебаний соответствуют собственные частоты: для хряща трахеи – $f_\gamma = 0; 60.7; 362.1; 980.4; 1886.0$ Гц; для хряща главных бронхов – $f_\gamma = 0; 168.7; 1020.6; 2659.1; 5040.7$ Гц;

Рассмотрим теперь вынужденные колебания хрящей под воздействием равномерно распределенной радиальной силы $q(\theta) = q_0$. Для вынужденных колебаний важной характеристикой является радиальная колебательная скорость хрящей. Легко можно показать, что безразмерные коэффициенты разложения \bar{G}_γ колебательной скорости хрящей по их собственным формам колебаний связаны с определенными выше коэффициентами G_γ и \tilde{G} следующим соотношением: $\bar{G}_\gamma = -j\Omega(EI/R_0^4 q_0)(G_\gamma + \tilde{G}I_{11})$. На рис. 3 изображены зависимости абсолютных значений коэффициентов \bar{G}_γ от частоты. Рассеяние энергии в материале хрящей учтены путем введения добротности, которая предполагалась равной 10.

Как видно при колебаниях трахеи существенную роль играют только 3 первые моды, а при колебаниях бронхов - практически только первые 2 моды. В связи с этим очевидно, что формы радиальных колебаний трахеи и бронхов будут принципиально отличаться от простейшей осесимметричной (пульсирующей) формы, принятой для моделей стенок трахеи и бронхов в [1, 2].

ВЫВОДЫ

Проведен анализ геометрических и физических характеристик хрящей трахеи и главных бронхов, сформулированы их механические модели, представляющие хрящи в виде круговых стержней постоянного поперечного сечения со свободными концами. На основе использования теории изгибных колебаний круговых стержней разработана расчетная схема для оценки собственных частот и форм колебаний хрящей трахеи и главных бронхов, а также их вынужденных колебаний под воздействием равномерно распределенной нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вовк И. В., Вовк О. И.* Распространение звука в бронхиальном дереве человека. Часть I. Теория // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, N 2.– С. 19–31.
2. *Habib R. H., Chalker R. B., Suki B., Jackson A. C.* Airway geometry and wall mechanical properties estimated from subglottal input impedance in humans // J. Appl. Physiol.– 1994.– **77**, N 1.– P. 441–451.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости.– М.-Л.: ОНТИ, 1935.– 674 с.
4. *Басовский В. Г., Вовк И. В.* Собственные частоты и формы колебаний хрящей трахеи и бронхов человека // Акуст. вісн.– 2002.– **5**, N 3.– С. 5–11.