УДК 534.29

ПОЛНЫЙ ДОПЛЕРОВСКИЙ СПЕКТР ПРИ РАССЕЯНИИ ИМПУЛЬСНЫХ СФОКУСИРОВАННЫХ ВОЛН НА АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПОТОКАХ

Е.А. Баранник, док. физ.- мат. наук, доц., И.В. Скресанова, студ.
Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4

На основе известного решения для спектров мощности доплеровских сигналов, формируемых откликом линии тока, в настоящей работе получены общие аналитические выражения для полных доплеровских спектров мощности при рассеянии импульсных сфокусированных волновых пучков на аксиально-симметричных потоках. Получено, в частности, выражение для пуазейлевского потока, устанавливающее коэффициент пропорциональности между средней по сечению кровеносного сосуда скоростью потока крови и средней частотой доплеровского спектра. Найденные выражения позволяют повысить точность измерения диагностически важных параметров потоков крови.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], одним из важнейших количественных параметров, определяемых в процессе ультразвуковых доплеровских диагностических исследований, является поток или расход крови Q. Расход крови определяется непосредственно измеряемой величиной time average velocity (TAV), которая представляет собой усреднённую по времени и среднюю по сечению кровеносного сосуда скорость потока крови. Используя TAV и данные о диаметре $D = 2R$ сосуда, можно вычислить величину так называемой объёмной скорости потока [1]: $V_{vol} = Q \cdot 60 = A \cdot TAV \cdot 60$, где $A = \pi \cdot D^2/4$ – площадь поперечного сечения сосуда. Как TAV, так и V_{vol} являются важнейшими диагностическими характеристиками для идентификации целого ряда сосудистых патологий [1].

В общем случае названные диагностические параметры могут быть определены с помощью измеряемых спектров ультразвукового доплеровского отклика потока крови в кровеносном сосуде. Поэтому проблема интерпретации доплеровских спектров, получаемых методами ультразвуковой доплеровской диагностики, остаётся актуальной до настоящего времени. В современной ультразвуковой диагностике применяются, как правило, импульсные фокусированные пучки волн. К настоящему времени общие физические механизмы формирования спектральных характеристик доплеровских сигналов, отмеченные в [2], известны достаточно хорошо. На ширину доплеровского спектра отклика линии тока наибольшее влияние оказывает величина измерительного объёма, задаваемого длительностью зондирующих импульсов, и дифракционное искривление волнового фронта зондирующих пучков волн, формируемых ультразвуковым преобразователем в различных режимах фокусирования волн [3]. При непрерывном излучении пучков плоских волн известны общие аналитические выражения для полных спектров при произвольном соотношении между шириной пучков волн и поперечным размером исследуемого потока крови [4,5]. Аналогичным образом, известны полные спектры мощности доплеровского сигнала при зондировании короткими импульсами фокусированного пучка волн [3,5-7].

В то же время до сих пор не получены общие выражения для полных доплеровских спектров, учитывающие фокусирование волн при произвольном соотношении между длительностью зондирующих импульсов и диаметром кровеносного сосуда. Эта задача весьма актуальна, поскольку ее решение позволяет повысить точность определения средней по сечению сосуда скорости потока крови и расход крови (мгновенный и средний по времени). Корректный пересчёт средних скоростей, получаемых из спектральных данных, в средние по диаметру кровеносного сосуда скорости необходим для правильной калибровки ультразвуковых доплеровских диагностических сканеров.

ПОЛНЫЕ СПЕКТРЫ ДЛЯ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПОТОКОВ

В основе проведенного исследования доплеровских спектров, учитывающего распределение скорости движения рассеивателей ультразвука и влияние фокусирования пучков волн, лежит общее выражение для спектра мощности доплеровского отклика линии тока [3,6,7], которое справедливо при произвольной длительности зондирующих импульсов:

$$S(\omega,y,z)=\frac{\pi\left\langle\left(\tilde{\beta}-\tilde{\rho}\right)^2\right\rangle(1+\gamma^2)^{1/2}(Aa^2k^2)^2}{16\cos^2\vartheta\left\{\sigma_0{}^4+(\pi N)^{-4}\left[\frac{l_0}{l_F}\left(1+\gamma^2\right)-\gamma\right]^2\right\}^{1/2}}\frac{v}{V}\frac{l_F}{\left\{\left(l_F-\gamma l_0\right)^2+l_0{}^2\right\}^{3/2}}\times \qquad (1)$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\Omega^2}{2\sigma_0{}^2}-\frac{4(1+\gamma^2)\sigma_0{}^2(\pi N\cos\vartheta)^{-2}}{\sigma_0{}^4+(\pi N)^{-4}\left[\frac{l_0}{l_F}(1+\gamma^2)-\gamma\right]^2}\left\{\frac{y}{a}-\frac{\sin\vartheta\left[\frac{l_0}{l_F}(1+\gamma^2)-\gamma\right]a}{8l_F\sigma_0{}^2}\Omega\right\}^2-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{\left(1-\gamma\frac{l_0}{l_F}\right)^2+\frac{l_0{}^2}{l_F{}^2}}\frac{z^2}{a^2}\right\},$$

где

$$\Omega(y,z)=\frac{\omega}{\omega_d}-1=\frac{\omega}{2kV(y,z)\cos\vartheta}-1,\qquad \sigma_0{}^2=\frac{a^2}{8l_F{}^2}(1+\gamma^2)tg^2\vartheta+(\pi N)^{-2}. \qquad (2)$$

Здесь $\gamma=l_F/R_0$ - степень фокусирования волн, $l_F=\pi a^2/\lambda$ - длина зоны Френеля, $a=\alpha b$ - полуширина пучка с гауссовской аподизацией апертуры ($\alpha=Const\le 1$), A - амплитуда акустического давления, создаваемого ультразвуковым преобразователем, v - постоянная, определяемая радиусом корреляции рассеивающих неоднородностей, $\left\langle(\tilde{\beta}-\tilde{\rho})^2\right\rangle$ - статистически усредненный квадрат разности флуктуаций сжимаемости и плотности жидкой среды (крови), N – число колебаний несущей частоты в зондирующем импульсе, ϑ и l_0 - соответственно угол и глубина зондирования, как показано на рис.1.

Для вычисления полного спектра мощности доплеровского отклика необходимо проинтегрировать выражение (1) по координатам линий тока y,z с учётом закона распределения скорости течения $V(y,z)$. Особый интерес представляют результаты интегрирования в аналитическом виде, позволяющие легко установить их физический смысл и получить расчетные формулы для анализа свойств потока. В общем случае такое интегрирование невыполнимо даже для наиболее простых аксиально-симметричных потоков. Получить аналитические результаты удается, однако, путём некоторых упрощающих пред-

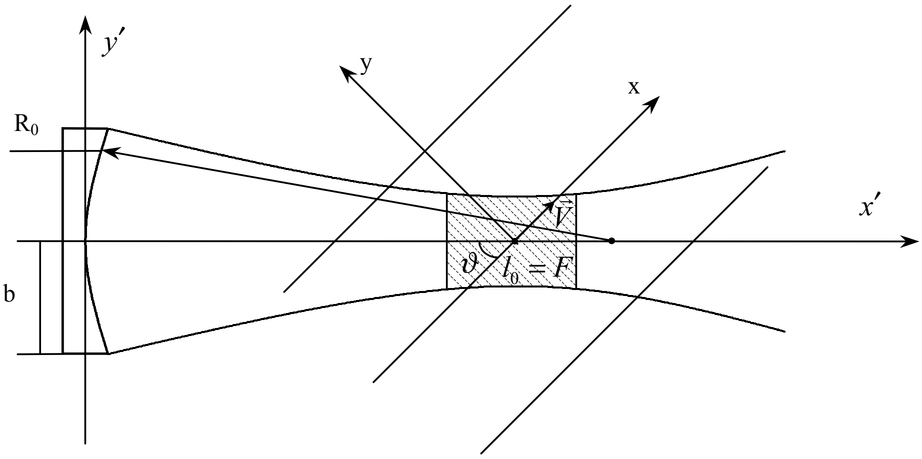

Рис. 1

положений, которые по существу не меняют физического содержания задачи. Рассмотрим случай совмещённых в пространстве центра измерительного объёма и реального фокуса пучков волн: $l_0 = F$. Этот случай представляет собой и непосредственный практический интерес, поскольку в ультразвуковой диагностике такое совмещение соответствует реальной процедуре измерений и может производиться как автоматически, так и устанавливаться оператором. Для пучков волн с гауссовской аподизацией амплитуда достигает максимума в точке $F = \gamma l_F (1+\gamma^2)^{-1}$, поэтому выражение(1) может быть переписано в виде

$$S(\omega, y, z) = \frac{\pi \left\langle \left(\tilde{\beta} - \tilde{\rho} \right)^2 \right\rangle \left(A a^2 k^2 \right)^2}{16 \sigma_0^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\nu}{V} \frac{\left(1+\gamma^2\right)^2}{l_F^2} \exp\left\{ -\frac{\Omega^2}{2\sigma_0^2} - \frac{4(1+\gamma^2)}{a^2} \left(\frac{(\pi N \cos\vartheta)^{-2}}{\sigma_0^2} y^2 + z^2 \right) \right\}. \quad (3)$$

Для аксиально-симметричных течений $V = V(\rho)$, где $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$, удобнее перейти к цилиндрическим координатам ρ, φ. Тогда после интегрирования по φ находим

$$S(\omega) = \frac{\left\langle \left(\tilde{\beta} - \tilde{\rho} \right)^2 \right\rangle \left(\pi A R a^2 k^2 \right)^2}{16 \sigma_0^2 \cos^2 \vartheta} \nu \frac{\left(1+\gamma^2\right)^2}{l_F^2} \int_0^1 \frac{I_0\left(\frac{2R^2}{a^2}(1+\gamma^2)\left(1 - \frac{(\pi N \cos\vartheta)^{-2}}{\sigma_0^2} \right) x \right)}{V(x)} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{\Omega^2}{2\sigma_0^2} - \frac{2R^2}{a^2}(1+\gamma^2)\left(1 + \frac{(\pi N \cos\vartheta)^{-2}}{\sigma_0^2} \right) x \right\} dx, \quad (4)$$

где $x = \rho^2 / R^2$, $I_0(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя мнимого аргумента.

Выберем закон изменения скорости по сечению сосуда в виде $V(x) = V_0 (1 - x^{n/2})$, где V_0 - максимальная скорость потока и $n \geq 2$. Значение $n = 2$ соответствует пуазейлевскому профилю скорости, который, как известно [2], характерен для артериальных кровеносных сосудов в норме. Полагая, что наибольший вклад в полный доплеровский спектр вносят градиенты скорости движения вдоль линий тока в измерительном объеме, и учитывая, что $l_F / a >> 1$, можно перейти к $\delta(\Omega)$. Тогда после интегрирования (4) с δ - функцией окончательно находим выражения для полного спектра

$$S(\omega) = S_0(n) I_0 \left(\frac{2R^2}{a^2}(1+\gamma^2) c_- (1 - \frac{\omega}{\omega_0})^{\frac{2}{n}} \right) (1 - \frac{\omega}{\omega_0})^{\frac{2}{n}-1} \exp\left(-\frac{2R^2}{a^2}(1+\gamma^2) c_+ (1 - \frac{\omega}{\omega_0})^{\frac{2}{n}} \right) \quad (5)$$

$$S_0(n)=\frac{\sqrt{2\pi}\left\langle\left(\tilde{\beta}-\tilde{\rho}\right)^2\right\rangle\left(\pi ARa^2k^2\right)^2}{8nV_0\sigma_0\cos^2\vartheta}\nu\frac{\left(1+\gamma^2\right)^2}{l_F^2},\qquad c_\pm=1\pm\left(\pi N\cos\vartheta\sigma_0\right)^{-2},\tag{6}$$

где $\omega_0=2kV_0\cos\vartheta$ – «максимальная» частота доплеровского сдвига, отвечающая максимальной скорости течения V_0.

В предельном случае непрерывного излучения несфокусированных волн, когда $N\to\infty$ и $\gamma\to 0$, выражения (5) и (6) совпадают с полученным ранее в работе [4]. Поэтому при непрерывном излучении ($N\to\infty$) узких в пределах измерительного объема пучков волн $R^2>>a^2\left(1+\gamma^2\right)^{-1}$, формируемых сильнофокусирующими преобразователями, и пуазейлевском распределении скоростей непосредственно из (5) вытекает выражение

$$S(\omega)=\frac{S_0(2)}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2R^2}{a^2}\left(1+\gamma^2\right)\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]^{-1/2},\tag{7}$$

которое при $\gamma\to 0$ переходит в формулу для нефокусированных волн [4]. Аналогичный предельный переход справедлив и для широких пучков волн.

СРЕДНЯЯ ДОПЛЕРОВСКАЯ ЧАСТОТА ДЛЯ ПУАЗЕЙЛЕВСКОГО ПОТОКА

Как отмечалось выше, параметры усреднённой по времени и средней по сечению сосуда скорости TAV и расхода крови Q связаны со средней частотой доплеровского сдвига, которую получают из спектров доплеровского сигнала. При этом мгновенные средние по сечению сосуда скорости потока крови $\bar{V}$ могут быть вычислены по средним значениям частоты $\bar{\omega}$ доплеровского спектра, если ввести некоторый калибровочный коэффициент β, зависящий от параметров зондирующего пучка волн и характеристик исследуемого потока крови в кровеносном сосуде

$$\bar{V}=\frac{1}{\beta}\frac{\bar{\omega}}{2k\cos\vartheta},\tag{8}$$

Истинная средняя скорость по сечению кровеносного сосуда дается выражением

$$\bar{V}=(\pi R^2)^{-1}\int_0^R 2\pi\rho V(\rho)\,d\rho=\frac{V_0}{2},\tag{9}$$

поэтому коэффициент β, обычно определяемый экспериментально при калибровке ультразвуковой доплеровской диагностической системы, равен

$$\beta=\frac{\bar{\omega}}{kV_0\cos\vartheta}=\frac{2\bar{\omega}}{\omega_0}.$$

В реальных ультразвуковых диагностических комплексах при измерении спектрально-доплеровских характеристик потоков крови в кровеносном сосуде подбирается, как правило, апертура излучения, совпадающая по порядку величины с диаметром исследуемого сосуда. Поэтому условие $R^2>>a^2\left(1+\gamma^2\right)^{-1}$ соответствует случаю достаточно сильного фокусирования, которое в реальности имеет величину порядка $\gamma=2\div 8$. Тогда при углах зондирования $\vartheta>\pi/4$ и большой длительности зондирующих импульсов выполняется условие $\left(\pi N\cos\vartheta\sigma_0\right)^{-2}<<1$. В результате для пуазейлевского потока крови с учетом известной асимптотики функции Бесселя при больших значениях аргумента приходим к следующему выражению

$$S(\omega)=\frac{S_0(2)}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{4R^2}{a^2}\left(1+\gamma^2\right)\frac{(\pi N\cos\vartheta)^{-2}}{\sigma_0^2}\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)\left[\frac{2R^2}{a^2}\left(1-\gamma^2\right)\left(1-\frac{(\pi N\cos\vartheta)^{-2}}{\sigma_0^2}\right)\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]^{-1/2}. \quad (10)$$

Выражение (10) позволяет определить среднюю частоту доплеровского сдвига при импульсно-доплеровском зондировании фокусированными пучками волн

$$\bar{\omega}=\frac{\int_0^{\omega_0}\omega S(\omega)d\omega}{\int_0^{\omega_0}S(\omega)d\omega}=\omega_0\left(1-\frac{1}{2C}+\frac{e^{-C}}{\sqrt{\pi C}\,\mathrm{erf}(\sqrt{C})}\right), \quad (11)$$

$$C=\frac{4R^2\left(1+\gamma^2\right)}{a^2}\left(\pi N\cos\vartheta\sigma_0\right)^{-2}, \quad (12)$$

где $\mathrm{erf}(x)$ - интеграл ошибок. Тогда

$$\beta=2\left(1-\frac{1}{2C}+\frac{e^{-C}}{\sqrt{\pi C}\,\mathrm{erf}(\sqrt{C})}\right). \quad (14)$$

С учетом известного разложения функции $\mathrm{erf}(x)$ в степенной ряд при малых значениях аргумента

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)}+...\right],$$

с точностью до квадратичных членов разложения получаем значение $\beta=4/3$, которое является минимально возможным, как видно из рис.2. В соответствии с (12) этот предельный случай отвечает непрерывному излучению волн и может быть получен при непосредственном интегрировании (7).

По мере уменьшения длительности импульсов величина C возрастает и, несмотря на выполнение условия $\left(\pi N\cos\vartheta\sigma_0\right)^{-2} \ll 1$, может достигать достаточно больших значений

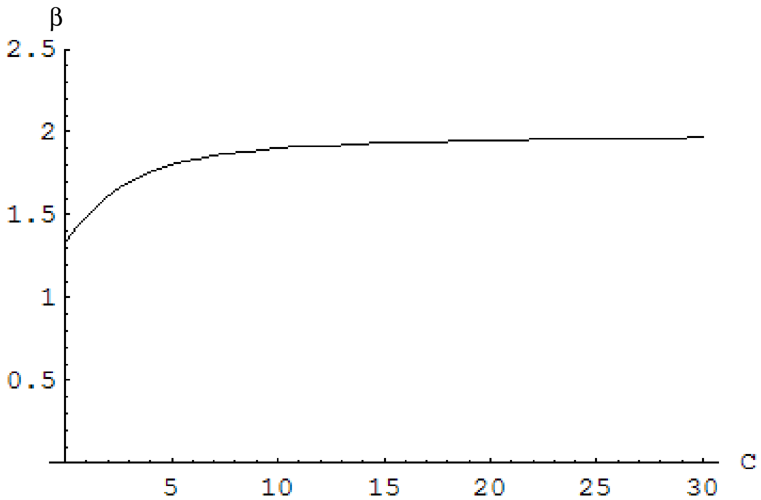

Рис. 2

благодаря сильному неравенству $R^2 >> a^2\left(1+\gamma^2\right)^{-1}$. Используя известную асимптотику интеграла ошибок для больших значений аргумента

$$\mathrm{erf}(x) \approx 1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\cdot 3}{2^2 x^4}-...+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-3)}{2^{n-1}x^{2n-2}}+...\right]$$

и ограничиваясь главным членом разложения, находим $\beta = 2$. По физическому смыслу с уменьшением N средняя частота увеличивается из-за уменьшения амплитуды низкочастотных составляющих спектра, соответствующих медленно движущимся периферийным областям потока крови.

Понятно, что физически такой же результат должен получаться и тогда, когда в результате дальнейшего уменьшения длительности импульсов аргумент функции Бесселя в выражении (5) оказывается малой величиной, а величина самой функции близка к 1. Тогда в соответствии с (5) для пуазейлевского потока полный доплеровский спектр имеет экспоненциальную форму, среднее значения частоты равно ω_0, а коэффициент $\beta = 2$. Наконец, при очень малых длительностях импульса главный вклад в ширину доплеровского спектра для любого профиля потока жидкости вносят не градиенты скорости движения, а ширина спектра той линии тока, которая попадает в измерительный объем. Соответствующее значение β в этом случае также равно 2.

ВЫВОДЫ

1. Впервые получено аналитическое выражение для спектральной плотности мощности доплеровского сигнала, образующегося вследствие рассеяния импульсного сфокусированного волнового пучка на аксиально-симметричных потоках.

2. Впервые получено аналитическое выражение для средней частоты доплеровского спектра в случае пуазейлевского профиля скорости при сильном фокусировании волн. Найденная аналитическая нелинейная зависимость коэффициента пропорциональности между измеряемой средней доплеровской частотой и частотой, соответствующей истинной средней по сечению сосуда скорости движения, даёт необходимую информацию для коррекции методики расчёта средней скорости потока крови по данным спектральных доплеровских измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лелюк В.Г., Лелюк С.Э. Ультразвуковая ангиология. – М.: Наука, 2003. – 322 с.
2. Фиш П. Доплеровские методы // Применение ультразвука в медицине / Под ред. Хилла К.М.:Мир, 1989. С.395-432.
3. Barannik E.A. Pulsed Doppler flow-line spectrum for focused transducers with apodized apertures // Ultrasonics. – 2001. – V.39, N2. – P.311-317.
4. Баранник Е.А. Влияние дифракционной расходимости и ширины пучков волн на спектр доплеровского сигнала // Акуст.журн.-1992. – Т. 38, N2. – С.237-244.
5. Баранник Е.А. Локальные эффекты формирования ультразвукового доплеровского отклика биологических сред // Акуст. вісн. – 2004. – Т.7, N2. – С.3-24.2003.
6. Баранник Е.А. Ширина спектра доплеровского сигнала при импульсном режиме излучения // Акуст. журн. – 1993. – 39, N5. – С.939-941.
7. Баранник Е.А. Влияние фокусирования ультразвуковых волн на дисперсию доплеровского спектра // Акуст. Журн. – 1994. – Т.40, N2. – С.212-214.