ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

А.Э.Бабаев, *д.т.н., главный научный сотрудник Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины; 03057, Украина, Киев, ул. Нестерова 3, тел.: (+38044) 454-7774*

А.В.Богданов, *ассистент кафедры акустики и акустоэлектроники Национального Технического Университета Украины «КПИ»; 03056, Украина, Киев, ул. Политехническая 16, корп. 12, тел.: (+38044) 454-9072; e-mail: bogdanov_o@ua.fm.*

Рассмотрены плоские задачи нестационарного возбуждения упругого полупространства тепловыми источниками. Их постановки выполнены в рамках теории несвязанной термоупругости для случаев, когда источники равномерно распределены в продольном (ось x вдоль границы полупространства) направлении, и когда они локализованы в слое $-a \le x \le a$. Разработан метод решения указанных задач, проведен расчет характеристик переходного процесса и сделан их анализ.

ВВЕДЕНИЕ

В подавляющем большинстве, имеющихся к настоящему времени работ по проблемам термоупругости, исследовались периодические во времени процессы, в том числе с учетом усложненных моделей [1, 2]. Не смотря на значительные достижения в этой области механики сплошных сред, закономерности распределения температурных и волновых полей, возбуждаемых внутренними нестационарными тепловыми источниками, остаются практически не исследованными. Задачи данного класса моделируют волновые поля в упругих телах, возникающие при действии на них лазерного излучения (термооптическая генерация звуковых волн [3]).

1. РАВНОМЕРО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ИСТОЧНИКИ ВДОЛЬ ПРОДОЛЬНОЙ КООРДИНАТЫ

Рассматривается упругое полупространство, на которое, с момента времени $t = 0$, действует нормальный к границе $z = 0$ (z – декартова координата), лазерный поток, бесконечный в продольном направлении. Возбуждаемое им поле тепловых источников имеет удельную мощность $w_0 = 0,5 I_0 \beta e^{-\beta z} f(t)$ [3], где I_0 – амплитуда интенсивности внешнего воздействия, $f(t)$ – функция, определяющая закон его изменения во времени, β – коэффициент оптического поглощения вещества.

Приведенная ниже постановка задачи выполнена с использованием следующих безразмерных обозначений (они отмечены волной): $\tilde{z} = \beta z$, $\tilde{t} = \beta v t$, $\tilde{\theta} = \alpha\theta$, $\tilde{u}_z = \beta u_z$, $\tilde{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz} / C^T$, где $\theta(z, t)$ – разница температур точек полупространства в возмущенном и невозмущенном состояниях; α – коэффициент линейного теплового расширения; $u_z(z, t)$ и $\sigma_{zz}(z, t)$ – возникающие в среде перемещения и напряжения; $v = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость распространения упругой волны сжатия (λ и μ – коэффициенты Ламе, ρ – плотность материала); $C^T = \lambda + 2\mu$.

Исходная система уравнений (теплопроводности и движения упругой среды) имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2} - A_1 \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} = A_2 f(\tilde{t}) e^{-\tilde{z}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{t}^2} = \eta \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}}; \tag{2}$$

где $A_1 = \nu/(\beta\chi)$, $A_2 = -(\alpha I_0)/(2\beta\kappa)$; $\eta = B^*/C^T$, $B^* = 3\lambda + 2\mu$, $C^T = \lambda + 2\mu$; χ и κ – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности, соответственно.

Нормальное напряжение $\tilde{\sigma}_{zz}(\tilde{z}, \tilde{t})$ выражается через $\tilde{u}_z(\tilde{z}, \tilde{t})$ и $\tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})$ зависимостью

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} - \eta \tilde{\theta}. \tag{3}$$

Граница $\tilde{z} = 0$ предполагается термоизолированной (тепловой поток равен нулю) и свободной от напряжений (незакрепленной).

Задача решается с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени. После интегрирования в пространстве изображений неоднородного уравнения теплопроводности (1) и удовлетворения граничному условию $\left.\frac{\partial \tilde{\theta}^L}{\partial \tilde{z}}\right|_{\tilde{z}=0} = 0$, получим следующее представление искомой функции $\tilde{\theta}^L(\tilde{z}, p)$:

$$\tilde{\theta}^L(\tilde{z}, p) = \frac{A_2}{A_1} f^l(p) G_1^L(\tilde{z}, p). \tag{4}$$

Здесь

$$G_1^L(\tilde{z}, p) = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{\sqrt{p}(p - 1/A_1)} - \frac{e^{-\tilde{z}}}{p - 1/A_1}, \tag{5}$$

индексом L обозначены соответствующие трансформанты; p – параметр преобразования.

Общее решение преобразованного по Лапласу уравнения (2) после удовлетворения граничному условию $\left.\tilde{\sigma}^L\right|_{\tilde{z}=0} = 0$, принимает вид:

$$\tilde{u}_z^L(\tilde{z}, p) = \frac{\eta A_2}{A_1^2 - 1} f^L(p) \sum_{k=1}^{5} F_k^L(\tilde{z}, p). \tag{6}$$

Ниже приведены принятые в (2.3) обозначения:

$$F_1^L(\tilde{z}, p) = -A_1 G_1^L(\tilde{z}, p), \qquad F_2^L(\tilde{z}, p) = \frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{p(p - A_1)} - \frac{e^{-\tilde{z}p}}{\sqrt{pA_1}(p - A_1)},$$

$$F_3^L(\tilde{z}, p) = \frac{\sqrt{A_1}\, e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{p\left(\sqrt{p} + 1/\sqrt{A_1}\right)} - \frac{e^{-\tilde{z}p}}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p} + 1/\sqrt{A_1}\right)}, \qquad F_4^L(\tilde{z}, p) = -\frac{e^{-\tilde{z}}}{p^2 - 1} + \frac{p\, e^{-\tilde{z}p}}{p^2 - 1},$$

$$F_5^L\left(\tilde{z},\, p\right) = -A_1\left[\frac{pe^{-\tilde{z}}}{p^2-1} - \frac{e^{-\tilde{z}p}}{p^2-1}\right]. \tag{7}$$

Основная трудность при решении данной задачи состоит в обращении искомых величин. Оригиналы слагаемых функций G_1^L, F_1^L – F_5^L при увеличении $\tilde{z}$ и $\tilde{t}$ экспоненциально возрастают. Расчет искомых характеристик в точках, даже незначительно удаленных от границы $\tilde{z}=0$, при раздельном определении числовых значений каждого из слагаемых становится практически неосуществимым (происходит потеря точности вычислений и переполнение разрядной сетки компьютера). Поэтому компоненты общих решений сгруппированы попарно таким образом, что оригиналы этих комбинаций (G_1^L, F_1^L – F_5^L) не имеют стремительного роста при любых значениях $\tilde{z}$ и $\tilde{t}$. Их инверсия выполнена с использованием справочных данных [4].

В качестве примера, приведен оригинал функции G_1:

$$\begin{aligned} G_1\left(\tilde{z},\tilde{t}\right) &= 0{,}5\, e^{-\tilde{z}+\tilde{t}/A_1}\operatorname{erfc}\left(-\sqrt{\tilde{t}/A_1}+\tilde{z}/2\sqrt{A_1/\tilde{t}}\right)H\left(\tilde{z}A_1/2-\tilde{t}\right)- \\ &-0{,}5\, e^{-\tilde{z}+\tilde{t}/A_1}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\tilde{t}/A_1}-\tilde{z}/2\sqrt{A_1/\tilde{t}}\right)H\left(\tilde{t}-\tilde{z}A_1/2\right)- \\ &-0{,}5\, e^{\tilde{z}+\tilde{t}/A_1}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\tilde{t}/A_1}+\tilde{z}/2\sqrt{A_1/\tilde{t}}\right)-e^{-\tilde{z}+\tilde{t}/A_1}H\left(\tilde{z}\,A_1/2-\tilde{t}\right) \end{aligned}. \tag{8}$$

Температура $\tilde{\theta}\left(\tilde{z},\,\tilde{t}\right)$ и перемещения $\tilde{u}_z\left(\tilde{z},\,\tilde{t}\right)$ после обращения равенств (5) и (6) представимы в виде интегралов Дюамеля:

$$\tilde{\theta}\left(\tilde{z},\,\tilde{t}\right) = \frac{A_2}{A_1}\int_0^{\tilde{t}} f\left(\tau\right)G_1\left(\tilde{z},\,\tilde{t}-\tau\right)d\tau; \tag{8}$$

$$\tilde{u}_z\left(\tilde{z},\,\tilde{t}\right) = \frac{\eta A_2}{A_1^2-1}\int_0^{\tilde{t}} f\left(\tau\right)\sum_{k=1}^{5}F_k\left(\tilde{z},\tilde{t}-\tau\right)d\tau; \tag{9}$$

Аналогично определяются тепловой поток $\dfrac{\partial\tilde{\theta}\left(\tilde{z},\,\tilde{t}\right)}{\partial\tilde{z}}$ и напряжения $\tilde{\sigma}_{zz}\left(\tilde{z},\,\tilde{t}\right)$.

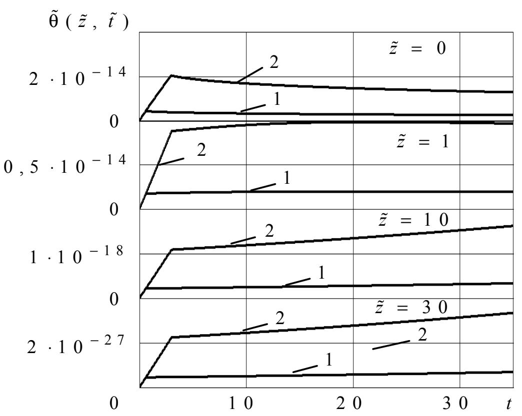

Рис. 1

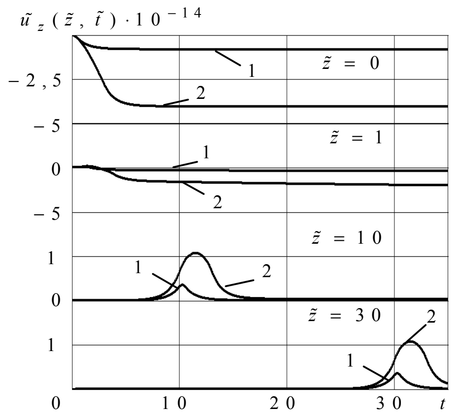

Рис. 2

На рис. 1 приведен график распределения температуры, а на рис. 2 — распределения перемещений по глубине полупространства.

В качестве материала упругого полупространства используется кремний, для которого [5] $\alpha = 2{,}33 \cdot 10^{-6}$ м/град, $\beta = 1{,}2 \cdot 10^{6}$ м$^{-1}$, $\chi = 8{,}8 \cdot 10^{-5}$ град/с, $\kappa = 156$ Вт/м, $E = 10^{11}$ Па, $v = 8{,}43 \cdot 10^{3}$ м/с. Приведенные результаты соответствуют случаю, когда мощность внутренних источников изменяется во времени по закону $f(\tilde{t}) = H(\tilde{t}) - H(\tilde{t} - \tilde{t}_0)$, при $\tilde{t}_0 = 0{,}6$ (кривая 1) и $\tilde{t}_0 = 3$ (кривая 2) — лазерный поток прямоугольного профиля с амплитудой интенсивности $I_0 = 10^2$ Вт/м^2.

2. РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ИСТОЧНИКИ В ИНТЕРВАЛЕ ВДОЛЬ ПРОДОЛЬНОЙ КООРДИНАТЫ

В данной задаче рассматривается действие на упругое полупространство ограниченного лазерного потока. В результате его воздействия в упругом полупространстве будут возникать как продольные, так и поперечные упругие волны.

Исходная система уравнений, с использованием приведенных выше безрозмерных величин, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} - A_1 \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} = A_2 f(\tilde{t}) H(a - |\tilde{x}|) e^{-\tilde{z}}, \tag{10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{z}^2} - \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{t}^2} = \eta \tilde{\theta}, \\ \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial \tilde{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial \tilde{z}^2} - \dfrac{1}{\tilde{c}_2^2} \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0; \end{cases} \tag{11}$$

где Φ и Ψ безразмерные потенциалы волн сжатия и сдвига, соответственно, они связаны с перемещениями упругой среды зависимостями $\tilde{u}_z = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}} + \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{x}}$ и $\tilde{u}_x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} - \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{z}}$ [6]; $\tilde{c}_2 = \sqrt{\mu / C^T}$ – безразмерная скорость сдвиговой волны. Механические напряжения определяются выражениями:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xx} = \dfrac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \dfrac{\lambda}{C^T} \dfrac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} - \eta \tilde{\theta}, \\ \tilde{\sigma}_{zz} = \dfrac{\lambda}{C^T} \dfrac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \dfrac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} - \eta \tilde{\theta}, \\ \tilde{\sigma}_{xz} = \dfrac{\mu}{C^T} \left(\dfrac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} + \dfrac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} \right). \end{cases} \tag{12}$$

В рассматриваемом случае на границе полупространства $\tilde{z} = 0$, к приведенным выше граничным условиям, добавляется условие равенства нулю касательных напряжений.

Общее решение уравнения теплопроводности, с применением интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по пространственной координате $\tilde{x}$, удается получить аналитически. Его трансформанта (она обозначена индексом LF) определяется формулой:

$$\tilde{\theta}^{LF} = f^L A_2 \frac{\sin\lambda a}{\lambda}\left\{\frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{A_1 p+\lambda^2}}}{\sqrt{A_1 p+\lambda^2}\left[A_1 p+\lambda^2-1\right]}-\frac{e^{-\tilde{z}}}{\left[A_1 p+\lambda^2-1\right]}\right\}, \tag{13}$$

где p и λ – параметры преобразования Лапласа и Фурье. В результате инверсии $\tilde{\theta}^{LF}$ [4] получаем искомый оригинал в виде свертки функций:

$$\tilde{\theta} = \frac{A_2}{A_1}\int_0^{\tilde{t}} f\left(\tilde{t}-\tau\right)\left\{\left[\left[erf\frac{\tilde{x}+a}{2\sqrt{\tau/A_1}}-erf\frac{\tilde{x}+a}{2\sqrt{\tau/A_1}}\right]\cdot G_1\left(\tilde{z},\tau\right)\right\}d\tau . \tag{14}$$

Отметим, что вычисление потенциалов $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ с помощью двойного интегрального преобразования связано с принципиальными математическими трудностями. Учитывая, что температурное поле убывает с ростом $|\tilde{x}|$ ($|\tilde{x}| \ge a$), решение трансформированного по Лапласу уравнения теплопроводности построено методом разделения переменных (разложение в ряд Фурье на интервале $|\tilde{x}| \le L$):

$$\tilde{\theta}^{L} = f^L A_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left\{\frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{A_1 p+\alpha_n^2}}}{\sqrt{A_1 p+\alpha_n^2}\left[A_1 p+\alpha_n^2-1\right]}-\frac{e^{-\tilde{z}}}{\left[A_1 p+\alpha_n^2-1\right]}\right\}, \tag{15}$$

где $b_n = {}^{a}\!/\!_{L}$, $n=0$; ${}^{2}\!/\!_{\alpha_n L}\sin\left(\alpha_n a\right), n\neq 0$ – коэффициенты разложения функции $H\left(a-|\tilde{x}|\right)$ на интервале $\left[-L;L\right]$ $a<L$, $\alpha_n = {}^{n\pi}\!/\!_{L}$.

В пространстве оригиналов выражение (15) принимает вид:

$$\tilde{\theta} = \frac{A_2}{A_1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(\alpha_n \tilde{x}\right)\int_0^{\tilde{t}} f\left(\tilde{t}-\tau\right)\left\{e^{-\frac{\alpha_n \tau}{A_1}}\cdot G_1\left(\tilde{z},\tau\right)\right\}d\tau , \tag{16}$$

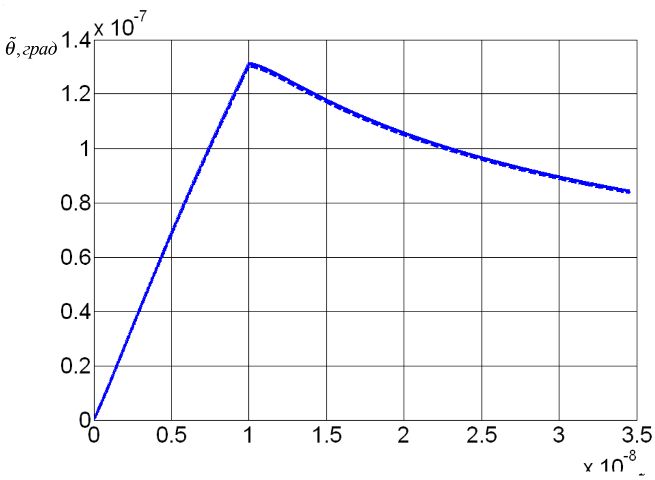

рис. 3

Графики полученные в результаты расчетов по формулам (14) и (16) представлены на рис. 3, как видно они практически сливаются ($\tilde{x}=0$, $\tilde{z}=1$).

Значение L_1 выбиралось из условия, чтобы в заданном интервале времени $\tilde{t}\in\left(0;T\right]$ уровень температуры в точках $\tilde{x}=\pm L_1$ не превышал $10^{-6}\cdot\tilde{\theta}\left(0,\tilde{z},\tilde{t}\right)$. При этом отличие величин $\tilde{\theta}$ рассчитанных по формулам (14) и (16), в области $\tilde{x}\in\left[-L_1;L_1\right]$, составляет менее 0,01%.

За время $\tilde{t} < T$, где $T = L_2 - a$ волна сжатия, безразмерная скорость которой равна единице, не достигнет краев интервала $\tilde{x} \in [-L_2; L_2]$. Отметим, что у волны сдвига эта скорость меньше чем у волны сжатия ($\tilde{c}_2 < 1$). Таким образом при $L \geq \max(L_1, L_2)$ вблизи точек $\tilde{x} = \pm L$ упругая среда находится в практически невозмущенном состоянии

Из вышеизложенного следует, что для заданного T в указанном интервале $\tilde{x} \in [-L; L]$ применимо представление характеристик, возникающего в среде нестационарного волнового поля, в виде рядов Фурье. Такой подход существенно упрощает решение рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А.Д. Термоупругость. Издательское объединение “Вища школа”, 1975. – 216 с..
2. Корнаухов В.Г. Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании // Прикладная механика. — 2004. – 40, №6. – с. 30-70.
3. Лямшев Л.М. Лазерное термооптическое возбуждение звука / Отв. Ред. В.И. Ильичев; АН СССР, Акустический институт им. Н.Н. Андреева — М.: Наука, 1989. – 237 с..
4. Бейтмен Г., Эрдейн А. Таблицы интегральных преобразований: В 2-х т. — М.: Наука, 1969. – Т.1. – 343 с.; – Т.2. – 328 с..
5. Таблицы физических величин. Справочник. / Под ред. акад. И.К.Кикоина. — М., Атомиздат, 1976, 1008 с..
6. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. — К.: Наукова думка, 1972. – 254 с..