

СПЕКТРАЛЬНЫЙ И МОДОВЫЙ АНАЛИЗ ПЛАНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

А. А. БОНДАРЕНКО¹, В. В. МЕЛЕШКО¹, С.-L. HUANG², С.-С. МА²

¹ *Кафедра теоретической и прикладной механики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, 01033 Киев, Украина, e-mail: meleshko@univ.kiev.ua, aabondarenko@univ.kiev.ua*

² *Department of Mechanical Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan 106, Republic of China, e-mail: cma@w3.me.ntu.tw*

Рассматривается задача определения спектра собственных частот и форм колебаний тонкой прямоугольной пьезокерамической пластины. Описывается экспериментальная методика определения резонансных частот и форм колебаний. На основе аналитического решения задачи методом суперпозиции построен спектр собственных частот продольных планарных колебаний. Расчитанный спектр сопоставляется с данными экспериментов и расчетами по методу конечных элементов.

ВВЕДЕНИЕ

Планарные колебания тонких прямоугольных пьезокерамических пластин представляют большой интерес в связи с широким использованием такого типа резонаторов в различных технических устройствах [1, 2]. За последние годы значительное развитие получили экспериментальные методы анализа не только собственных частот, но и форм колебаний [3]. Цель доклада заключается в сопоставлении данных эксперимента и расчета для конкретного типа пьезокерамики.

1 ПОСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об определении спектра собственных частот и форм планарных колебаний тонкой прямоугольной пьезокерамической пластины $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$, поляризованной по толщине. Колебания возбуждаются разностью потенциалов $\Psi^+(x, y)e^{-i\omega t}$ и $\Psi^-(x, y)e^{-i\omega t}$, приложенной соответственно к электродам на торцах $z = h$ и $z = -h$.

Сопряженные электромеханические поля в пьезопластинке описываются [4] уравнениями движения, линеаризованными уравнениями электрострикции Мэсона, соотношениями Коши и уравнениями вынужденной электростатики диэлектриков с соответствующими механическими и электрическими граничными условиями. На основе гипотез обобщенного плоского напряженного состояния указанная система сводится к трем уравнениям относительно усредненных по толщине амплитудных компонент вектора упругих перемещений $\bar{U}(x, y)$, $\bar{V}(x, y)$ и электростатического потенциала $\Psi(x, y, z)$:

$$\nabla^2 \bar{U} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{e_{13} - e_{33} (c_{13}^E / c_{33}^E)}{c_{11}^E - c_{12}^E} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Psi^+ - \Psi^-}{h} \right) + \frac{\rho}{G} \omega^2 \bar{U} = 0,$$

$$\nabla^2 \bar{V} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{e_{13} - e_{33} (c_{13}^E / c_{33}^E)}{c_{11}^E - c_{12}^E} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Psi^+ - \Psi^-}{h} \right) + \frac{\rho}{G} \omega^2 \bar{V} = 0, \quad (1)$$

$$A \nabla^2 \Psi + \frac{\epsilon_{33}^S}{\epsilon_{11}^S} (1 - k_p^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = z (B_1 \nabla^2 \Theta + B_2 (h^2 - z^2) \nabla^2 \nabla^2 \Theta). \quad (2)$$

Здесь обозначено

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Theta = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}, \quad m = \frac{c_{11}^E - (c_{13}^E)^2 / c_{33}^E}{c_{12}^E - (c_{13}^E)^2 / c_{33}^E} + 1, \quad G = \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2},$$

$$A = 1 + \frac{e_{33} e_{15}}{c_{33}^E \epsilon_{11}^S}, \quad B_1 = \frac{c_{13}^E (e_{13} c_{33}^E - e_{33} c_{13}^E)}{(c_{33}^E)^2 \epsilon_{11}^S}, \quad B_2 = \frac{e_{15} (c_{13}^E)^2}{6 \epsilon_{11}^S (c_{33}^E)^2}, \quad k_p^2 = \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E \epsilon_{33}^S};$$

ρ — плотность материала; c_{11}^E , c_{12}^E , c_{13}^E , c_{33}^E — модули упругости материала при нулевом электрическом поле; e_{13} , e_{33} , e_{15} — пьезомодули; ϵ_{11}^S , ϵ_{33}^S — диэлектрические проницаемости при нулевой деформации.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad D_x = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad D_y = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b, \\ \Psi = \Psi^+ \quad \text{при} \quad z = h, \quad \Psi = \Psi^- \quad \text{при} \quad z = -h, \quad (3)$$

где D_x и D_y — компоненты вектора электрической индукции.

Для важного случая полностью покрытых электродов, $\Psi^+ = V_0$ и $\Psi^- = -V_0$, уравнения (1) переходят в двумерные уравнения движения Ламе для изотропной упругой среды, характеризуемой модулем сдвига G и числом Пуассона m . Связанная задача об электроупругих колебаниях пьезокерамической пластинки разделяется на механическую и электрическую составляющие. Связанность полей учитывается в правой части уравнения (2), куда входит объемное расширение Θ . Механическая часть задачи сводится к задаче о вынужденных колебаниях прямоугольной упругой пластинки под воздействием равномерно распределенных нагрузок $(e_{13} - e_{33} c_{13}^E / c_{33}^E) V_0 / h$ на ее сторонах. Такая задача была рассмотрена в работе [5], в которой развит метод суперпозиции определения собственных частот и форм колебаний. Разработанная аналитическая методика построения спектра собственных частот была реализована на языке программирования C++ в среде .NET.

Экспериментальные исследования планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин состоят в измерении резонансных частот и получении соответствующих форм колебаний. С этой целью использовался оптический метод, базирующийся на амплитудно-флуктуационной спекл-интерферометрии — AF-ESPI метод, который является усовершенствованием ESPI метода. Последний широко применяется для проведения большого числа инженерных исследований, включая измерение статических и динамических деформаций в механизмах. AF-ESPI метод является более совершенным и имеет преимущества по сравнению с методом импедансного анализа, который чаще всего используется для изучения колебаний пьезокерамических материалов. Детальное описание предлагаемого метода, а также его теоретическое обоснование можно найти в статье [2].

Возбуждение колебаний осуществляется путем подвода напряжения к тонким электродам. Схематическая диаграмма оптической установки, реализующей AF-ESPI метод, показана на рис.1. CCD-камера и механизм захвата кадра (Frame Grabber), оснащенный цифровым процессором, используются для записи и воспроизведения изображений, получаемых с интерферограммы объекта от исходящих лучей. Вибрация пластины на резонансной частоте записывается на CCD-камеру и сохраняется в буфере изображений, причем следующий кадр вычитается из предыдущего системой обработки изображений. CCD-камера преобразует интенсивность распределения интерференционных пятен от объекта в соответствующий видеосигнал частоты 30 кадров в секунду. Сигнал обрабатывается электронными средствами и превращается в изображение на экране видеомонитора. Для периодичности активирующего сигнала в качестве источника, генерирующего синусоидально изменяющееся напряжение для возбуждения колебаний в пластинах, используется функциональный генератор, соединенный с усилителем мощности.

По сравнению с покадровой записью и последующим их оптическим восстановлением, используемыми в методе голографической интерферометрии, интерференционные пятна AF-ESPI немедленно воспроизводятся видеосистемой и являются отчетливыми только на резонансных частотах. Кроме того, в отличие от импедансного анализа, описанная методика позволяет одновременно измерять значения резонансных частот и соответствующие формы колебаний пластины.

В дополнении к экспериментальным исследованиям выполнены также численные расчеты с использованием конечноэлементного пакета ABAQUS. Для решения задачи использовался 20-узловой трехмерный пьезоэлектрический элемент C3D20E.

2 АНАЛИЗ МОД КОЛЕБАНИЙ

На рис. 2 приведен спектр безразмерных собственных частот $\Omega_n = 2\omega_n b / \pi c_2 = 4f_n b / c_2$, где $c_2 = \sqrt{G/\rho}$, для пластины из материала PZT-4, для которого $m = 4.03$. Сплошными линиями показаны результаты теоретических расчетов, точками — данные эксперимента работы [6]. Первая ветвь частотного спектра представляет гиперболическую зависимость частоты и отношения сторон пластины при $a/b > 1$. Начиная со второй ветви такая зависимость нарушается и наблюдается образование частотных плато, получивших название краевой моды, характеристики и условия возбуждения которой исследованы в [1, 6]. С увеличением частоты и длины пластины наблюдается большое количество относительно близких собственных частот, что усложняет расшифровку результатов экспериментальных измерений и анализ соответствующих форм колебаний.

Сравнение данных эксперимента и расчета при определении собственных частот показывает эффективность предлагаемого теоретического подхода. Максимальное отклонение от экспериментальных значений частот составляет не более 2%, в то время как, например, в теории “второго порядка” [6] погрешность достигает 8%.

В табл. 1 приведены значения первых шести собственных частот, соответствующих симметричным относительно обеих координатных осей формам колебаний, для пластины с соотношением сторон $a/b = 2$ из материала PZT, для которой $m = 4.47$. Экспериментально найдено $f_1 = 22860$ кГц, что на основе соотношения $c_2 = 4f_1 b / \Omega_1$ дает скорость волн сдвига $c_2 = 1727$ м/с. Вторая строка таблицы содержит рассчитанные значения частот, третья — результаты эксперимента с использованием AF-ESPI

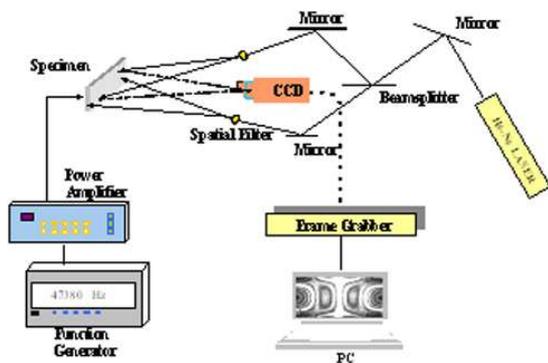


Рис.1 Схематическая диаграмма AF-ESPI методики для проведения измерений.

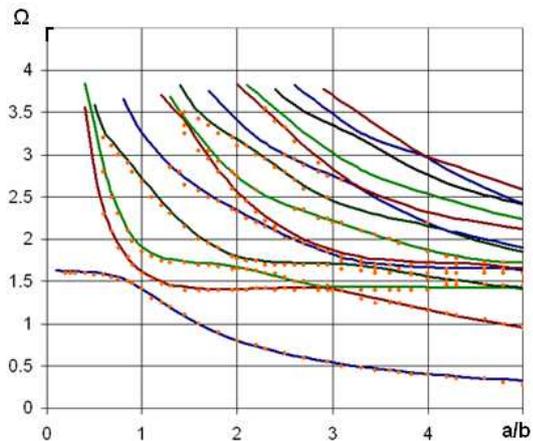


Рис.2 Спектр продольных колебаний для пластин из материала PZT-4.

методики, данные четвертой строки получены численно методом конечных элементов.

n	1	2	3	4	5	6
Двумерная теория	0.794	1.395	1.646	1.767	2.328	2.512
AF-ESPI	0.794	1.397	1.646	1.752	2.291	2.480
FEM	0.773	1.368	1.607	1.775	2.333	2.454

Таблица 1. Первые шесть собственных частот колебаний прямоугольной пластины $a/b = 2$.

В целом наблюдается хорошее согласование теоретических и экспериментальных результатов, что позволяет применять представленную двумерную теорию для исследования планарных колебаний тонких прямоугольных пластин в широком частотном диапазоне.

В табл. 2 приведены экспериментальные и расчетные результаты для первых шести мод планарных колебаний пьезокерамической пластины размеров $60 \times 30 \times 1$ мм, изготовленной из материала PZT модели APC-855, для которой $m = 4.47$. Указанным модам соответствуют распределения перемещений $\bar{U}(x, y)$. Формы колебаний второго столбца таблицы отвечают экспериментальным AF-ESPI данным, численные расчеты методом конечных элементов расположены во третьем столбце, четвертый столбец содержит формы, полученные на основе решения граничной задачи (1)-(3).

На рисунках третьего столбца таблицы тонкими линиями обозначены перемещения в различных фазах, указанных знаками, жирные линии являются узловыми. Светлые пятна на экспериментальных интерферограммах соответствуют областям малых или нулевых перемещений. Сравнение экспериментальных и расчетных результатов проводится путем сопоставления контуров постоянных перемещений, узловых линий и пятен.

Второй строке соответствует первая продольная мода, которая характеризуется отсутствием перемещений в центре пластины и увеличением их по гармоническому

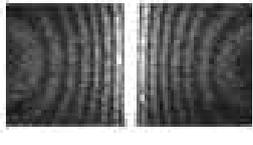
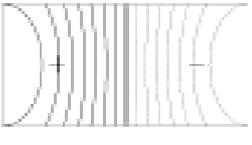
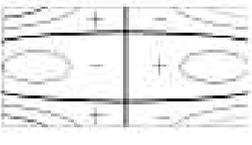
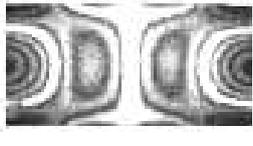
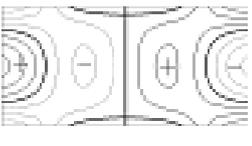
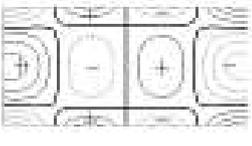
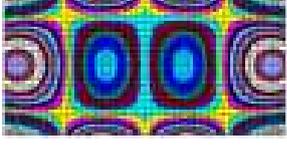
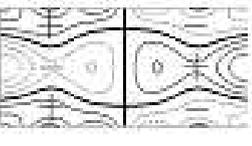
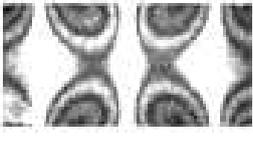
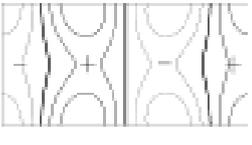
№. моды	ESPI	FEM	Двумерная теория
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Таблица 2. Формы колебаний первых шести мод для прямоугольной пластины ($a/b = 2$)

закону к торцам. Вторая мода называется краевой ввиду сосредоточения больших амплитудных перемещений вблизи четырех углов пластины. При подводе энергии через сплошные электроды краевая мода является пьезоэлектрически слабой. Способ усиления колебаний во второй моде рассматривается в [1]. Третья и четвертая моды имеют близкие значения частот, поэтому их формы колебаний похожи друг на друга.

На основе AF-ESPI методики и расчетов по описанной теории можно построить пространственные формы колебаний для каждого перемещения в направлении соответствующей координатной оси. Анализ последних позволяет сделать вывод, что представленные шесть мод действительно являются планарными, так как компонента перемещений w , направленная вдоль оси Oz , составляет не более 5% от планарных перемещений пластины. Кроме того, можно отметить, что в первой и шестой модах доминируют перемещения в направлении оси Ox , а в третьей и четвертой – в направлении оси Oy . Этот факт объясняет отличие первой и шестой форм колебаний от остальных, а также сходство форм колебаний на частотах третьей и четвертой мод.

ВЫВОДЫ

Показано, что на основе двумерной теории, предложенной в работах [1, 5] можно эффективно исследовать спектральные свойства прямоугольной пластины, что подтверждается хорошим согласованием с данными экспериментов. Это дает возможность говорить о получении завершеного решения задачи о планарных продольных колебаниях тонкой прямоугольной пластины, которое можно в дальнейшем распространить на изучение колебаний других типов симметрии относительно координатных осей. Показана эффективность экспериментальной оптической методики, которая отличается от других методов возможностью одновременно получать не только значения резонансных частот, но и соответствующие формы колебаний, высокой скоростью и качеством результатов. Проведенное сравнение форм колебаний, полученных AF-ESPI, методом конечных элементов и предложенным в докладе теоретическим подходом показывает их хорошее взаимное соответствие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Карлаш В. Л., Мелешко В. В., Улитко А. Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин // Прикл. механика.– 1976.– **12**, N 5.– С. 71–78.
2. Huang C.-H., Ma C.-C. Experimental and numerical investigations of resonant vibration characteristics for piezoceramic plates // J. Acoust. Soc. Amer.– 2001.– **109**.– P. 2780–2788.
3. Ma C.-C., Huang C.-H. Experimental full field investigations of resonant vibrations for piezoceramic plates by an optical interferometry method // Exper. Mech.– 2002.– **42**.– P. 140–146.
4. Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел // Тепл. напр. элем. констр.– 1975.– **15**.– С. 90–99.
5. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Динамическая задача теории упругости для прямоугольной призмы // Прикл. механика.– 1971.– **7**, N 9.– С. 50–56.
6. Medick M. A., Pao Y. H. Extensional vibrations of thin rectangular plates // J. Acoust. Soc. Amer.– 1965.– **37**.– P. 59–65.