

ПЕРЕДАЧА ВОЗМУЩЕНИЙ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ИСТОЧНИКОМ В УПРУГОМ ТОНКОСТЕННОМ ЦИЛИНДРЕ, ЗАПОЛНЕННОМ И ОКРУЖЕННОМ ЖИДКОСТЬЮ

Г. Л. Комиссарова

Институт механики НАН Украины, Киев

Исследовано волновое поле тонкостенного цилиндра, заполненного и окруженного идеальной сжимаемой жидкостью, возбуждаемое приложенным на его поверхности точечным низкочастотным гармоническим источником. Решение задачи построено посредством метода суперпозиции волн. Волновое поле упругого цилиндра описывается уравнениями теории оболочек типа Тимошенко. При учете излучения энергии в окружающую среду дисперсионное уравнение волновода становится комплексным. Для конкретного примера проведен анализ ближнего и дальнего полей перемещений оболочки для различных значений частот и окружной координаты.

ВВЕДЕНИЕ

Наличие трещин и коррозии в нефтяных и химических резервуарах, сосудах давления, различного типа трубопроводах является одной из главных опасностей при их эксплуатации. При воздействии больших нагрузок или агрессивной среды в таких конструкциях даже малые дефекты могут становиться большими, такими как расслоения, выемки, отверстия, трещины. Перекачка жидкости по трубопроводам приводит к образованию газожидкостной среды, внезапная остановка которой создает аномально высокое давление. Пузырьки газа являются первопричиной и источниками кавитации при возникновении локальных зон разрежения. В этих зонах могут развиваться откольные явления с образованием больших кавитационных полостей и даже отверстий и трещин.

Для обнаружения дефектов на практике используются различные неразрушающие методы контроля и диагностики. Однако, волновые пакеты отраженных и прошедших через дефект волн являются весьма сложными для интерпретации. Поэтому необходимы числовые данные для определения типа дефекта, его размеров и места расположения. Числовые данные получают в основном двумя путями. Первый из них основывается на использовании числовых методов, таких как методы конечной разности, конечного или граничного элементов. Хотя числовые методы и позволяют предсказать амплитуду отраженной и прошедшей волны, но при этом они являются весьма громоздкими и требуют большого времени для расчетов. Поэтому проблематичным является использования этого подхода для решения обратной задачи: определения свойств дефекта на основе экспериментальных данных.

Второй путь основывается на использовании аналитических подходов к определению характеристик волнового поля. Наиболее распространенным при аналитическом решении задачи является метод суперпозиции волн. Разработка эффективных аналитических методов расчета волновых полей при наличии дефектов в пластинах и цилиндрах является весьма актуальной задачей. Число работ, в которых изучаются вопросы

взаимодействия волн с различными дефектами в пластинах значительно больше, чем для случая цилиндра. Сложность рассматриваемых задач существенно возрастает в случае контакта исследуемых объектов с окружающей средой. Объясняется это тем, что учет излучения энергии в окружающую среду порождает комплексное дисперсионное уравнение.

Цель данной работы состоит в определении характеристик волнового поля трубопровода, заполненного и окруженного жидкостью, при наличии в нем сквозного отверстия. При вытекании газонасыщенной среды через отверстие пузырьки воздуха лопаются, создавая звуковое поле в трубе. На дальнее расстояние по трубопроводу распространяются низкочастотные волны. Таким образом, наличие отверстия (утечки жидкости) в трубопроводе можно моделировать воздействием сосредоточенной низкочастотной гармонической по времени нагрузки. При решении задачи использован метод суперпозиции волн.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрена бесконечная тонкостенная цилиндрическая труба, заполненная и окруженная идеальной сжимаемой жидкостью. На внешней поверхности трубы приложена сосредоточенная гармоническая нагрузка вида $q(z, \varphi, t) = F\delta(\theta)\delta(z)\exp(-i\omega t)$. Для описания волнового поля трубы использованы уравнения движения цилиндрической оболочки в форме С. П. Тимошенко [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} - \nu \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\rho_1 a^2}{E} (1-\nu^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\rho_1 a^2}{E} (1-\nu^2) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - w - \frac{h^2}{12a^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - 2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) &= \\ = \frac{\rho_1 a^2}{E} (1-\nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + iF \frac{(1-\nu^2)a}{Eh} \delta(\theta)\delta(z) \exp(-i\omega t) + \frac{(1-\nu^2)a}{Eh} P_f(z, \theta, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u, v, w – продольные, окружные и поперечные перемещения; z, θ – продольная и окружная координаты; P_f – распределенная нагрузка, обусловленная воздействием внутренней и внешней жидкости на оболочку; a и h – срединный радиус и толщина оболочки; ρ_1, E, ν – соответственно плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки, ω – круговая частота. Уравнения представлены в безразмерном виде. Все линейные величины отнесены к срединному радиусу оболочки.

Поскольку внешняя нагрузка гармоническая по времени, то полагаем, что P_f и перемещения являются гармоническими функциями по времени. Разлагая функцию $\delta(\theta)$ в ряд Фурье по косинусам [2], перемещения u, w – по косинусам, v – по синусам и P_f – по косинусам, получим систему уравнений относительно n -ных компонент перемещений $u_n(z), v_n(z), w_n(z)$ и $P_{fn}(z)$.

Потенциалы скоростей внутренней и внешней жидкостей, удовлетворяющие уравнение Гельмгольца, имеют вид [3]:

$$\varphi_{0n} = D_{0n} J_n(\chi_0 r) \cos n\theta \exp[i(\zeta z - \omega t)], \quad \chi_0^2 = \left(\frac{V_S}{C_0}\right)^2 \gamma^2 - \zeta^2, \quad (0 \leq r \leq 1),$$

$$\varphi_{2n} = D_{2n} H_n^{(1)}(\chi_2 r) \cos n\theta \exp[i(\zeta z - \omega t)], \quad \chi_2^2 = \left(\frac{V_S}{C_2}\right)^2 \gamma^2 - \zeta^2, \quad (1 \leq r \leq \infty),$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots), \quad \gamma = \frac{\omega a}{V_S}, \quad H_n^{(1)}(r) = J_n(r) + iY_n(r). \quad (2)$$

Здесь ζ – безразмерная постоянная распространения; $J_n(r)$, $H_n^{(1)}(r)$ – функции Бесселя и Ханкеля; C_0 , C_2 – скорости звука во внутренней и внешней жидкостях; D_{0n} , D_{2n} – произвольные постоянные.

С учетом волнового характера поля для жидкой среды зависимости по продольной координате для перемещений u_n , v_n , w_n представляем в виде интеграла Фурье. Выражение для P_{fn} находим из условия равенства радиальных скоростей оболочки и контактирующих с ней внутренней и внешней жидкостей.

$$P_{fn} = -\frac{E}{2(1+\nu)} \gamma^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{J_n(\chi_0)}{J_n'(\chi_0 r)_{r=1}} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{H_n^{(1)}(\chi_2)}{H_n^{(1)'}(\chi_2 r)_{r=1}} \right) w_n. \quad (3)$$

Здесь значок штрих (') обозначает дифференцирование по r . В окончательном виде получаем следующую неоднородную систему уравнений относительно изображений \bar{u}_n , \bar{v}_n , \bar{w}_n .

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{1-\nu} \zeta^2 + n^2 - \gamma^2 \right) \bar{u}_n + \frac{1+\nu}{1-\nu} n \zeta \bar{v}_n - \frac{2\nu}{1-\nu} \zeta \bar{w}_n = 0, \\ & \frac{1+\nu}{1-\nu} n \zeta \bar{u}_n + \left(\zeta^2 + \frac{2}{1-\nu} n^2 - \gamma^2 \right) \bar{v}_n - \frac{2}{1-\nu} n \bar{w}_n = 0, \\ & -\frac{2\nu}{1-\nu} \zeta \bar{u}_n - \frac{2}{1-\nu} n \bar{v}_n + \left\{ \frac{2}{1-\nu} \left[1 + \frac{h^2}{12a^2} (\zeta^2 + n^2)^2 \right] - \right. \\ & \left. - \gamma^2 \left[1 + \frac{a}{h} (b_0^{(n)} - b_2^{(n)}) \right] \right\} \bar{w}_n = -\frac{V}{4\pi h} a, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4) \\ & b_0^{(n)} = \frac{\rho_0}{\rho_1} b_0^*, \quad b_0^* = \frac{J_n(\chi_0)}{J_n'(\chi_0 r)_{r=1}}, \quad b_2^{(n)} = \frac{\rho_2}{\rho_1} b_2^*, \quad b_2^* = \frac{H_n^{(1)}(\chi_2)}{H_n^{(1)'}(\chi_2 r)_{r=1}}. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (1.4) в соответствии с правилом Крамера представим в виде

$$[\bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n] = \frac{\Delta^{(nk)}}{\Delta^{(n)}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Здесь $\Delta^{(n)}$ определитель системы уравнений (1.4), приравнивая который нулю, получаем дисперсионное уравнение для данного волновода. Это дисперсионное уравнение связывают безразмерные частоту γ и постоянную распространения ζ при заданных безразмерных физических и геометрических параметрах ν , V_S/C_0 , V_S/C_2 , ρ_0/ρ_1 , ρ_2/ρ_1 и h/a . Такое количество параметров и то, что дисперсионное уравнение является комплексным трансцендентным, обуславливает значительные трудности при исследовании дисперсионных свойств заполненного и окруженного жидкостью цилиндра. В области параметров γ и ζ , в которой χ_0 и χ_2 являются мнимыми, дисперсионное уравнение

становится действительным и может иметь действительные корни [4]. Переходя от изображений к оригиналу, получим решение исходной системы уравнений (1.1). В частности, выражения для поперечного перемещения согласно предыдущим преобразованиям принимает вид

$$w(z, \theta, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^{(03)}(\zeta, \gamma)}{\Delta^{(0)}(\zeta, \gamma)} e^{i\zeta z} d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^{(n3)}(\zeta, \gamma)}{\Delta^{(n)}(\zeta, \gamma)} e^{i\zeta z} d\zeta \right) \quad (6)$$

Аналогичный вид имеют выражения для продольных и окружных перемещений. Значения перемещений могут быть получены путем прямого численного интегрирования выражения (1.6) с использованием асимптотики функций Бесселя и Ханкеля для больших аргументов. Однако, при вычислении характеристик дальнего поля возникают трудности связанные с быстрой осцилляцией подинтегральных выражений. Эти трудности устраняются путем перехода от интегралов Фурье (1.6) к контурным интегралам в комплексной плоскости. На комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ подинтегральные выражения (1.6) имеют четыре точки ветвления $\zeta = \pm k_0$ и $\zeta = \pm k_2$ и полюса в точках $\zeta = \zeta_j$. Здесь ζ_j – корни дисперсионных уравнений, $k_0 = \gamma V_S / C_0$, $k_2 = \gamma V_S / C_2$. Используя теорему Коши и лемму Жордана, несобственный интеграл по вещественной оси в выражении (1.6) можно выразить в виде суммы двух слагаемых: сумму вычетов и интегралов по берегам разрезов к точкам ветвления [5]. Исследования показали, что интегралы по разрезу к точкам ветвления $\pm k_0$ равны нулю. Тогда имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^{(n3)}}{\Delta^{(n)}} e^{i\xi z} d\xi = 2\pi i \sum_{j=1}^J \operatorname{Res} \left(\frac{\Delta^{(n3)}}{\Delta^{(n)}} \right)_{\zeta=\zeta_j} e^{i\zeta_j z} - \int_{L_2} \frac{\Delta^{(n3)}}{\Delta^{(n)}} e^{i\zeta z} d\zeta. \quad (7)$$

Для применения теории вычетов необходимо воспользоваться результатами исследования корней дисперсионного уравнения.

2. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве примера рассмотрена стальная цилиндрическая труба, заполненная и окруженная водой. Внешний радиус трубы $R = 0.1m$, толщина $h = 0.01m$. Физические характеристики материала трубы следующие: $\nu = 0.25$; $\rho_0 / \rho_1 = 0.13$, $V_S / C_0 = 2.128$. Рассматриваемый диапазон частот от 1 КГц до 4 КГц, что соответствует интервалу безразмерных частот $0.1870 \leq \gamma \leq 0.7481$. Для рассматриваемого примера $V_S / C_2 = V_S / C_0$ и $\rho_2 / \rho_1 = \rho_0 / \rho_1$, $a = 0.095m$, $h/a = 0.105$.

Для рассматриваемого примера в заданном диапазоне частот имеется по одному действительному корню для $n = 0$ и $n = 1$ и по одному комплексному корню для $n = 0$ и $n = 2$. Мнимая составляющая комплексных корней существенно меньше вещественной. Вычисления проводились для значений частот 1, 2, 3, 4 КГц в диапазоне изменения продольной координаты $0 \leq z \leq 260$ и окружной координаты $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, \pi$. Вычисление поперечных перемещений проводилось для двух случаев: при учете всех четырех корней и только вещественных. На рисунках приведены нормированные значения модуля амплитуд перемещений $W^*(z)$ для значений $0 \leq z \leq 50$. За нормирующую

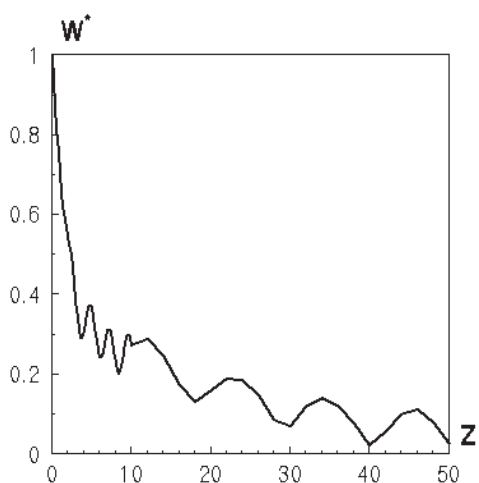


Рис.1

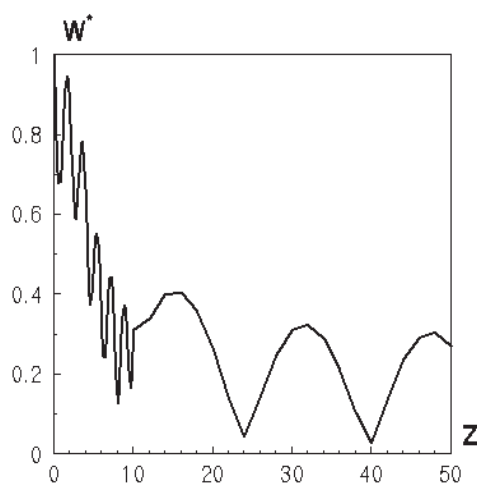


Рис.2

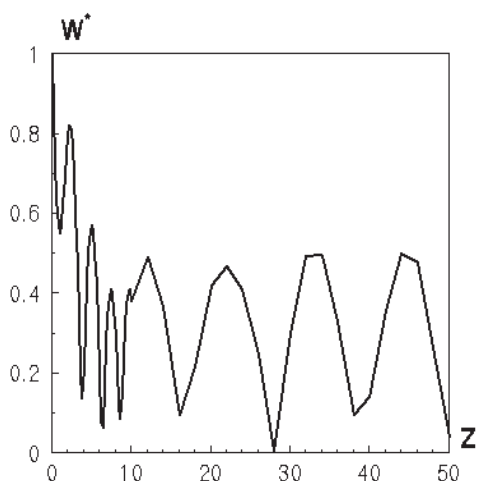


Рис.3

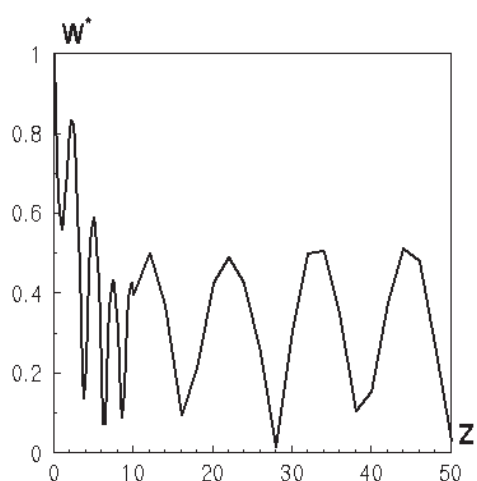


Рис.4

величину выбрано значение перемещения в сечении $z = 0$. Значение $W^*(z)$ для $\theta = 0$ и частоты 2 КГц показано на рис. 1, 3 КГц – на рис. 2. На рис. 3 изображена зависимость $W^*(z)$ для $\theta = \pi/4$ и частоты 2 КГц. Численные данные на рис. 1-3 получены при учете всех четырех корней. Анализ численных результатов показал, что характер зависимости $W^*(z)$ можно разбить на три этапа. На первом этапе имеем быстрое уменьшение модуля амплитуды перемещений. Его длина равна десяти средним радиусам оболочки для всех рассмотренных значений частот. Второй этап характеризуется медленным уменьшением модуля амплитуды. Его длина уменьшается с увеличением частоты. На частоте 1 КГц второму этапу соответствует интервал $10 \leq z \leq 260$, на частоте 2 КГц – интервал $10 \leq z \leq 70$, на частоте 3 КГц – интервал $10 \leq z \leq 20$. На частоте 4 КГц этот интервал практически отсутствует. На третьем этапе волновое поле оболочки формируется за счет распространяющихся волн. Амплитуда перемещений практически не изменяется.

Данные рис. 3 показывают, что характер зависимости $W^*(z)$ существенно за-

висит и от значения окружной координаты. Анализ численных результатов показал, что зависимость модуля амплитуды перемещения при $\theta = \pi$ и $\theta = 0$ на частотах 1 и 2 КГц имеет одинаковый характер. Амплитуда колебаний при $\theta = \pi$, как и следовало, ожидать уменьшается. Кроме этой зависимости $W^*(z)$ при одинаковых значениях окружной координаты являются также подобными.

Сравнение данных рис. 4 и рис. 1 показывает, что учет только распространяющихся волн при вычислении перемещений не позволяет получить правильную зависимость $W^*(z)$ на этапах быстрого и медленного изменения модуля амплитуды. Анализ численных результатов для заполненной жидкостью оболочки показали, что амплитуда колебаний практически не уменьшается по длине оболочки. Следовательно, только учет взаимодействия с окружающей средой и всех корней (вещественных и комплексных) дисперсионного уравнения позволяет получить правильную зависимость $W^*(z)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика расчета волнового поля возбуждаемого точечным низкочастотным гармоническим источником, приложенным на боковой поверхности цилиндрической оболочки, заполненной и окруженной идеальной сжимаемой жидкостью. Решение задачи построено методом суперпозиции волн при использовании уравнений цилиндрических оболочек типа Тимошенко и преобразовании Фурье по продольной координате. При учете излучения энергии в окружающую среду дисперсионное уравнение данного волновода является комплексным. Для конкретного примера получены действительные и комплексные корни дисперсионного уравнения. Проведен анализ поперечных перемещений оболочки в ближнем и дальнем полях. Показано, что структура ближнего поля, характеризующаяся значительной изменчивостью, формируется за счет распространяющихся и неоднородных волн. Характер изменчивости перемещений в зависимости от расстояния до источника существенно зависит от частоты и окружной координаты. В дальнем поле основной вклад вносят распространяющиеся волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жарий О.Ю., Улитко А.Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн // Киев: Выща школа, 1989. – 184 с.
2. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля (новые проблемы). – М.-Л.: ГТТЛ, 1949. – 432 с.
3. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Осесимметричные волны в упругом полом цилиндре, заполненном и окруженном жидкостью // Прикл. механика. – 1994. – **30**, N 9. – С. 15 – 23.
4. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Излучение точечного источника внутри упругого полого цилиндра, помещенного в акустическую среду. Свойства нормальных волн и направленность излучения // Прикл. механика. – 1998. – **34**, N 5. – С. 12 – 23.
5. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Излучение точечного источника внутри упругого полого цилиндра, помещенного в акустическую среду. Общее решение и вычислительный механизм // Прикл. механика. – 1997. – **33**, N 5. – С. 20 – 29.