

НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СВОБОДНОМ АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ, ЛЕЖАЩЕМ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

В.А. Шпак

Донецкий Национальный университет

Построено общее и специальные дисперсионные соотношения, определяющие поведение полного спектра нормальных волн в существенно анизотропном слое, лежащем на жестком основании и свободной внешней плоскостью, при изменении направления распространения волн между осями упругой симметрии. Двухпараметрическое исследование характеристического уравнения возникающей однородной спектральной задачи позволяет прогнозировать качественное поведение полного спектра нормальных волн в широком диапазоне изменения основных своих параметров (круговой частоты и волнового вектора) и разработать устойчивые численные процедуры количественного анализа.

Проведено сравнительное описание дисперсионного спектра в слое со смешанными и симметричными краевыми условиями первого и второго рода. Рассмотрены предельные свойства нормальных волн в коротковолновом диапазоне, построены их кинематические и энергетические характеристики. Обнаружен новый вид локализации упругой энергии в срединной части плоскопараллельного волновода.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретические и экспериментальные исследования плоских гармонических волн в изотропных волноводах ведутся более ста лет и к настоящему времени накоплены важные прикладные данные о волнах Лэмба с однородными краевыми условиями первого и второго рода на внешних гранях [1,2]. Логичным продолжением этих исследований стало рассмотрение задач о распространении нормальных волн в случае смешанных граничных условий на разных сторонах слоя [1,3].

Возрастание числа низкосимметричных анизотропных искусственных материалов, учет фактора анизотропии для природных материалов и расширение областей применения обуславливают необходимость достоверных количественных оценок основных характеристик классических типов акустических волн в плоскопараллельных волноводах с различными типами краевых условий [4,5,6]. В данной работе представлены результаты исследований, относящиеся к вопросу о существовании и свойствах локализованных волн, распространяющихся вдоль произвольного направления в ортотропном слое со свободной и жесткозашемленной гранями.

ПОСТРОЕНИЕ ОСНОВНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Плоские гармонические волны в бесконечном анизотропном упругом слое $V = \{(x_1, x_2) \in R^2, -h \leq x_3 \leq h\}$ толщиной $2h$ в декартовой системе координат, оси которой Ox_j ($x_j = \overline{1,3}$) совпадают с упруго-эквивалентными направлениями составляющим волновод материала, могут быть представлены в виде:

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = \operatorname{Re} \left[f(x_3) e^{i(\gamma(n_1 x_1 + n_2 x_2) - \omega t)} \right], \quad (1)$$

где ω, γ – круговая частота и волновое число нормальных волн соответственно, $n_1 = \cos \varphi$, $n_2 = \sin \varphi$ – направляющие косинусы волнового вектора, лежащего в плоскости

Ox_1x_2 и составляющего угол φ с осью Ox_1 . Компоненты вектора перемещений $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ определяются из однородной краевой задачи, включающей уравнения движения:

$$\begin{cases} (c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2 + c_{55}\partial_3^2 - R_*^2 C_*^{-1} \rho \partial_t^2) u_1 + (c_{12} + c_{66}) \partial_1 \partial_2 u_2 + (c_{13} + c_{55}) \partial_1 \partial_3 u_3 = 0; \\ (c_{12} + c_{66}) \partial_1 \partial_2 u_1 + (c_{22}\partial_2^2 + c_{66}\partial_1^2 + c_{44}\partial_3^2 - R_*^2 C_*^{-1} \rho \partial_t^2) u_2 + (c_{23} + c_{44}) \partial_2 \partial_3 u_3 = 0; \\ (c_{13} + c_{55}) \partial_1 \partial_3 u_1 + (c_{23} + c_{44}) \partial_2 \partial_3 u_2 + (c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{33}\partial_3^2 - R_*^2 C_*^{-1} \rho \partial_t^2) u_3 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

и граничные условия на плоскостях $x_3 = \pm h$:

$$\sigma_{j3} \Big|_{x_3=h} = 0, \quad u_j \Big|_{x_3=-h} = 0. \quad (3)$$

Здесь ∂_j ($j = \overline{1,3}$) и ∂_t - операторы частного дифференцирования по координатам x_j и времени t , c_{nm} и ρ - упругие постоянные и плотность материала волновода, R_* - нормирующий параметр для величин линейной размерности, C_* - нормирующий параметр для величин размерности механических напряжений, σ_{nm} - компоненты тензора напряжений.

С учетом представлений (1) решение краевой задачи (2)-(3) трансформируется в спектральную задачу относительно амплитудных функций $f_j(x_3)$

$$\begin{cases} f_1'' + \alpha_{11} f_1 + \alpha_{12} f_2 + \alpha_{13} f_3' = 0; \\ \alpha_{12} f_1 + f_2'' + \alpha_{22} f_2 + \alpha_{23} f_3' = 0; \\ \alpha_{13} f_1 + \alpha_{23} f_2 + f_3'' + \alpha_{33} f_3 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

Постоянные коэффициенты α_{ij} ($i, j = \overline{1,3}$) зависят от ω и γ и определяются по формулам, приведенным в [6]. Характеристическое уравнение системы (4) является бикубическим и совпадает с уравнением Кристоффеля

$$\det \left| \Gamma_{jk} - \delta_{jk} \rho v^2 \right|_{j,k=1}^3 = 0, \quad (5)$$

где $\Gamma_{jk} = n_i n_l C_{ijkl}$ - тензор Кристоффеля, δ_{ik} - символ Кронеккера, $v = \omega / \gamma$ - фазовая скорость.

Каждому простому корню λ_m ($m = \overline{1,3}$) уравнения (5) соответствует решение системы (4) вида

$$\begin{cases} f_p(x_3) = \sum_{m=1}^3 K_m \beta_{mp} \cos(\lambda_m x_3) + \sum_{m=1}^3 K_{m+3} \beta_{mp} \sin(\lambda_m x_3), \quad (p = 1, 2), \\ f_3(x_3) = \sum_{m=1}^3 K_m \beta_{m3} \sin(\lambda_m x_3) - \sum_{m=1}^3 K_{m+3} \beta_{m3} \cos(\lambda_m x_3). \end{cases} \quad (6)$$

В результате удовлетворения граничным условиям (3) получаем искомое дисперсионное уравнение:

$$F(\omega, \gamma) = \begin{vmatrix} \beta_{11} \cos \tilde{\lambda}_1 & \beta_{21} \cos \tilde{\lambda}_2 & \beta_{31} \cos \tilde{\lambda}_3 & -\beta_{11} \sin \tilde{\lambda}_1 & -\beta_{21} \sin \tilde{\lambda}_2 & -\beta_{31} \sin \tilde{\lambda}_3 \\ \beta_{12} \cos \tilde{\lambda}_1 & \beta_{22} \cos \tilde{\lambda}_2 & \beta_{32} \cos \tilde{\lambda}_3 & -\beta_{12} \sin \tilde{\lambda}_1 & -\beta_{22} \sin \tilde{\lambda}_2 & -\beta_{32} \sin \tilde{\lambda}_3 \\ \beta_{13} \sin \tilde{\lambda}_1 & \beta_{23} \sin \tilde{\lambda}_2 & \beta_{33} \sin \tilde{\lambda}_3 & \beta_{13} \cos \tilde{\lambda}_1 & \beta_{23} \cos \tilde{\lambda}_2 & \beta_{33} \cos \tilde{\lambda}_3 \\ \delta_{11} \sin \tilde{\lambda}_1 & \delta_{21} \sin \tilde{\lambda}_2 & \delta_{31} \sin \tilde{\lambda}_3 & -\delta_{11} \cos \tilde{\lambda}_1 & -\delta_{21} \cos \tilde{\lambda}_2 & -\delta_{31} \cos \tilde{\lambda}_3 \\ \delta_{12} \sin \tilde{\lambda}_1 & \delta_{22} \sin \tilde{\lambda}_2 & \delta_{32} \sin \tilde{\lambda}_3 & -\delta_{12} \cos \tilde{\lambda}_1 & -\delta_{22} \cos \tilde{\lambda}_2 & -\delta_{32} \cos \tilde{\lambda}_3 \\ \delta_{13} \cos \tilde{\lambda}_1 & \delta_{23} \cos \tilde{\lambda}_2 & \delta_{33} \cos \tilde{\lambda}_3 & \delta_{13} \sin \tilde{\lambda}_1 & \delta_{23} \sin \tilde{\lambda}_2 & \delta_{33} \sin \tilde{\lambda}_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

В упряго-эквивалентных направлениях ($\varphi = 0, \varphi = \pi/2$) волновые движения распадаются на независимые SH и $P-SV$ волны. Дисперсионные соотношения для SH волн имеют вид:

$$\gamma^2 = (\rho \bar{\omega}^2 - C_3 \pi^2 (2k+1)^2 / 16) / C_5; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Важной характеристикой спектра нормальных волн являются три счетных набора критических частот, для которых $\gamma = 0$:

$$\bar{\omega}_{jk} = \sqrt{\frac{c_{ji}}{\rho} \frac{(2k+1)\pi}{4}}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Следует отметить, что критические частоты не зависят от направления распространения волны и чередование нижнего индекса в единой последовательности упорядоченных по возрастанию частот во многом определяет трансформацию спектра при вращении между упряго-эквивалентными направлениями волнового вектора.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Частотное уравнение (7) при фиксированном ω имеет конечное число действительных корней и счетное количество мнимых и комплексных корней. Сложность структуры функций $F(\omega, \gamma)$ потребовала разработки ряда приемов для численного вычисления их нулей. Построение областей D_i ($i = \overline{1,7}$), внутри которых не изменяется тип корней характеристического уравнения, следует считать первым из таких приемов. Границы областей D_i строятся из условий существования кратных корней бикубического уравнения (5) и задаются уравнениями $v_\alpha = l_i(\varphi)$ ($i = \overline{1,4}; \alpha = P, SV, SH, D$) [4].

При действительных и мнимых значениях постоянной распространения γ дисперсионные функции $F(\omega, \gamma)$ принимают значения двух типов: действительные и мнимые. Это определяется типом корней уравнения (5). Тип функции $F(\omega, \gamma)$ изменяется при переходе из одной области D_i в другую по следующему правилу: если переход осуществляется через границы, задаваемые кривыми $l_i(\varphi)$ ($i = \overline{1,3}$) то тип значений функций $F(\omega, \gamma)$ сохраняется, а при переходе через границу $v_D = l_4(\varphi)$ меняется на противоположный. Для нахождения действительных и мнимых корней частотных уравнений в областях $(\omega, \text{Re } \gamma)$ и $(\omega, \text{Im } \gamma)$ построим секторы с лучами $\omega = v(\alpha)\gamma$. Внутри каждого из этих секторов тип значений функций $F(\omega, \gamma)$ не меняется, что позволяет для нахождения их нулей использовать численные процедуры вычисления корней

действительных уравнений. Автором использовался известный модифицированный алгоритм Деккера в версии Брента.

При комплексных значениях постоянных распространения γ дисперсионные функции являются комплекснозначными. В этом случае было опробовано два подхода к нахождению корней уравнений (7). Первый подход состоял в применении алгоритма бисекции прямоугольной области на комплексной плоскости Γ и решение задачи нахождения комплексных корней уравнения с комплекснозначной левой частью. Во втором подходе дисперсионное уравнение рассматривалось как системы нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \operatorname{Re} F(\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Im} \gamma) = 0; \\ \operatorname{Im} F(\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Im} \gamma) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Вычисление корней на базе первого подхода затрудняет быстрая и резкая осциляция функций $F(\omega, \gamma)$ и случайные перестановки в порядке следования корней уравнения (5). Нахождение решений нелинейной алгебраической системы (10) с помощью метода Ньютона в значительной мере лишено недостатков первого подхода. Однако, для его успешного применения необходимо выбирать удачные начальные приближения, при которых итерационный процесс не выходит на действительные или мнимые ветви корней.

Результаты численного расчета дисперсионных кривых нормальных $P-SV$ волн в пластине из кристалла сегнетовой соли представлены на рис. 1,2 для направлений $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ соответственно. Здесь приняты обозначения: $\Gamma = 2\gamma h / \pi$ и $\Omega = 2\omega h / (\pi v_0)$, где $v_0 = \sqrt{C_{33} / \rho}$. Пунктирными линиями изображены действительные и мнимые составляющие комплексных мод. Сплошные линии соответствуют действительным и мнимым корням дисперсионных уравнений.

Выбранная нормировка Ω и Γ позволяет сделать ряд визуальных выводов о качественном отличии и сходстве спектров нормальных волн со смешанными граничными условиями и спектров со свободными [4] и жестко заземленными [5] внешними гранями:

1) действительная мода, выходящая из начала координат, существует только в свободном слое или, другими словами, закрепление хотя бы одной грани слоя делает невозможным распространение бегущей волны в низкочастотной области спектра;

2) в мнимой части спектра при закреплении хотя бы одной грани наблюдается противоположное явление – появление одной чисто мнимой ветви спектра в низкочастотном диапазоне при определенных сочетаниях физико-механических параметрах слоя;

3) общее количество действительных и мнимых ветвей спектра в слое со смешанными граничными условиями больше чем в слое с симметрично нагруженными внешними гранями;

4) явление обратной волны также наблюдается чаще в слое со смешанными граничными условиями;

5) в коротковолновом диапазоне наличие хотя бы одной свободной грани приводит к появлению действительной моды, стремящейся к лучу $\Omega = v_R \Gamma$, где v_R - скорость обобщенной или классической поверхностной волны типа Рэлея.

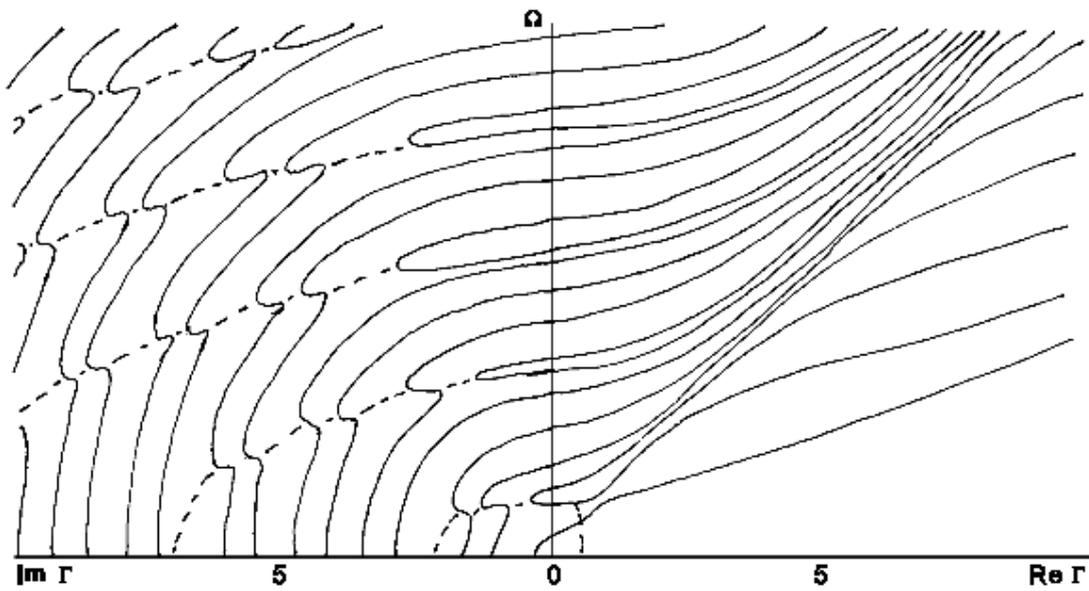


Рис. 1

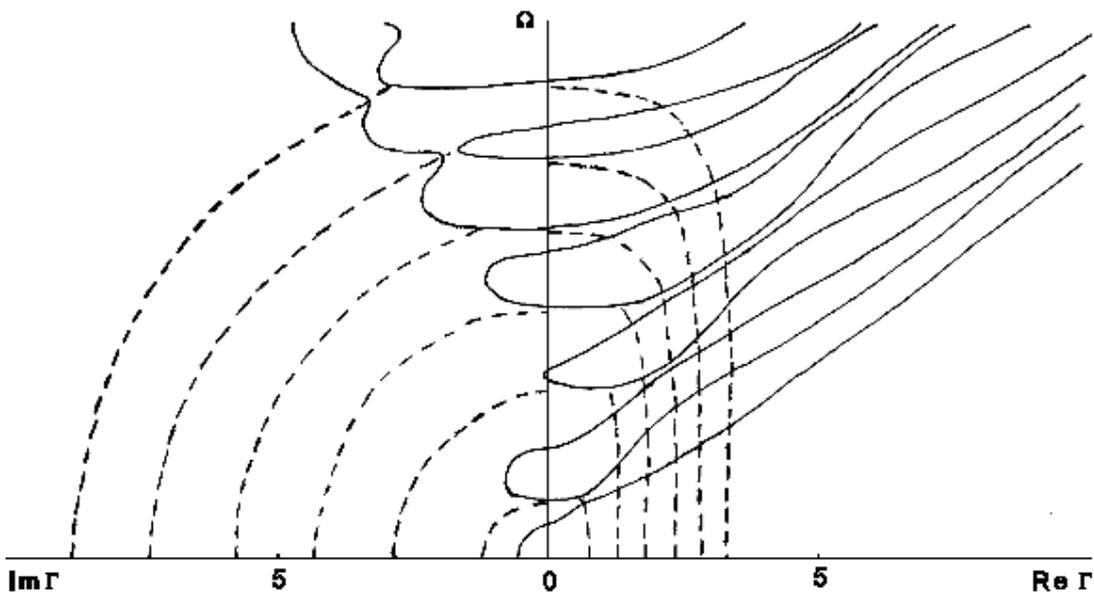


Рис. 2

На рис. 3 представлены распределения по толщине ($\tilde{x}_3 = x_3/h$) слоя ненулевой компоненты ($\tilde{P}_1 = P_1 / \max(\{P_1(\tilde{x}_3) : \tilde{x}_3 \in [-1;1]\})$) вектора усредненного потока мощности [2] в случае стремления фазовой скорости бегущих волн к скорости классической или обобщенной волны Рэлея (рис. 3а, 3б) в пластине кристалла сегнетовой соли при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ соответственно и скорости v_D (рис. 3в) в пластине кристалла германата лития

при $\varphi = 0$. Этот рисунок иллюстрирует новый тип локализации упругой энергии в срединной части слоя, присущий только анизотропным материалам.

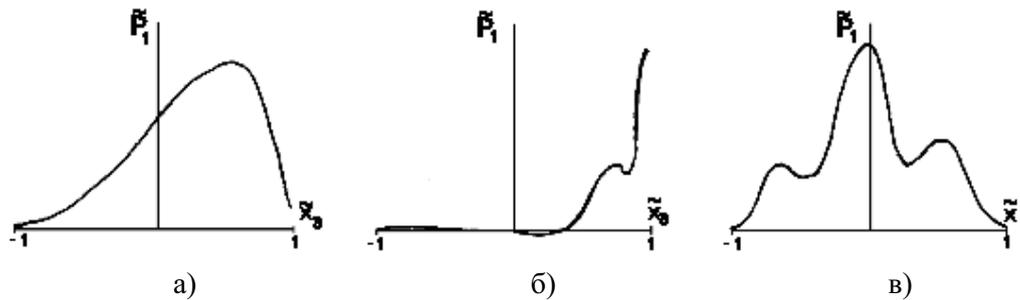


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наукова думка, 1981. 284 с.
3. Мартыненко О.Н., Мелешко В.В. Распространение нормальных волн в слое, лежащем на жестком основании // Прикл. мех.-1986.-**22**. № 7. С. 23-29.
4. Космодамианский А.С., Сторожев В.И., Шпак В.А. Новый тип локализации энергии нормальных волн в анизотропном упругом слое // XI Всесоюз. акуст. конф. Секция А. М.: Акуст. ин-т им. Н.Н. Андреева. 1991. С. 1155-158.
5. Абрамова О.П., Сторожев В.И., Шпак В.А. Дисперсия нормальных волн в ортотропном слое с закрепленными границами // Акуст. ж.- 1996.-**42**. № 1. С. 5-9.
6. Бай Ю.П., Сторожев В.И., Шпак В.А. Коротковолновые асимптотические свойства нормальных волн в двухслойных кристаллических пластинах // Акуст. вiст.-2001.-**4**. № 2. С. 3-10.