

## ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛОЯ С ТУННЕЛЬНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕЙ ЗАДЕЛКЕ ЕГО ТОРЦОВ

Л.А. Фильштинский, Ю.Д. Ковалев  
Сумский государственный университет

*В различных областях машиностроения используются массивные конструкции, которые работают в условиях динамического нагружения. С целью исследования динамической напряженности таких тел рассматривается модельная задача об изгибных колебаниях изотропного слоя, ослабленного сквозными отверстиями. Соответствующая краевая задача сводится к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений второго рода. Результатом численного анализа построенного алгоритма являются амплитудно-частотные характеристики, устанавливающие зависимость амплитуд соответствующих "характеристических" напряжений на контуре отверстия от частоты возбуждения. Эти АЧХ построены для различных геометрических и механических параметров системы. Анализ построенных АЧХ позволяет определить достаточно узкие интервалы, которым принадлежат собственные частоты исследуемой системы.*

Перспективными методами в пространственной динамике пластин являются метод суперпозиции [1] и метод однородных решений [2-4]. В работе [5] рассмотрены динамические смешанные задачи теории упругости для слоя при смешанных условиях на частях одноименных сторон. В работе [6] исследуются влияния анизотропии на динамические характеристики свободных колебаний конечных цилиндров. Исследованию особенностей спектра собственных колебаний трансформированной дисковидной пластины в окрестности краевого резонанса посвящена работа [7]. В случае "смешанных" условий на основаниях слоя (скользящая заделка торцов, либо торцы слоя покрыты диафрагмой жесткой в своей плоскости и гибкой в перпендикулярном направлении) получающаяся граничная задача существенно проще, чем смешанные задачи, рассмотренные в [5].

Процедура решения "смешанных" задач теории упругости об установившихся колебаниях слоя с туннельными неоднородностями была предложена в [8], где с ее использованием получены представления для механических величин в симметричном случае. Ниже методология работы [8] распространяется на кососимметричную задачу.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ.

Рассмотрим упругий слой  $-h \leq x_3 \leq h$ ,  $-\infty < x_1, x_2 < \infty$ , ослабленный туннельными вдоль оси  $Ox_3$  сквозными полостями-отверстиями, сечения которых представляют собой непересекающиеся достаточно гладкие контуры  $L_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). На границах полостей действует изгибное пульсирующее давление  $N = \text{Re}(N^* e^{-i\omega t})$ ,  $N^* = Px_3$  ( $P = \text{const}$ ), а на бесконечности нагрузка отсутствует, либо границы полостей свободны от сил, а на бесконечности действует изгибная пульсирующая нагрузка  $\sigma_{11}^\infty = \text{Re}(\sigma_{11}^{*\infty} e^{-i\omega t})$ ,  $\sigma_{11}^{*\infty} = Px_3$  ( $P = \text{const}$ ).

Полагаем, что механические величины имеют вид

$$u_i = \text{Re}(U_i e^{-i\omega t}), \quad \sigma_{ij} = \text{Re}(\sigma_{ij}^* e^{-i\omega t}). \quad (1)$$

Пусть амплитуды компонентов заданной нагрузки разлагаются в ряды Фурье по координате  $Ox_3$  на  $[-h, h]$ , а на основаниях слоя выполняются условия

$$u_3(x_1, x_2, \pm h, t) = \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h, t) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \pm h, t) = 0. \quad (2)$$

Запишем амплитудные компоненты вектора перемещения в виде

$$U_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3 \quad (i=1, 2), \quad (3)$$

$$U_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3, \quad \gamma_k = (2k+1)\pi/2.$$

Выражения (3) автоматически удовлетворяют граничным условиям (2) на основаниях слоя. Для описания стационарного волнового процесса в изотропном цилиндре будем исходить из уравнений движения

$$\sigma \operatorname{grad} \theta + \Delta \vec{u} = \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \sigma = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu},$$

где  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе.

Подставляя (1) и разложения (3) для амплитуд перемещений в уравнения движения, приходим к системе

$$\kappa_k^{(2)} u_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k = 0 \quad (i=1, 2), \quad \kappa_k^{(2)} u_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k = 0. \quad (5)$$

$$\kappa_k^{(2)} = \nabla^2 - \beta_k^2 \quad (\beta_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_2^2, \quad \alpha_2 = \omega/c_2),$$

$$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} - \gamma_k u_{3k}, \quad \partial_i = \partial/\partial x_i.$$

Непосредственно из системы (5) находим

$$\kappa_k^{(1)} \theta_k = 0, \quad \kappa_k^{(1)} = \nabla^2 - (\gamma_k^2 - \alpha_1^2), \quad \alpha_1 = \omega/c_1. \quad (6)$$

Введем функцию  $\psi_k$  соотношением  $\theta_k = \kappa_k^{(2)} \psi_k$ . Из (6) следует, что  $\kappa_k^{(2)} \kappa_k^{(1)} \psi_k = 0$ .

С учетом связи между  $\theta_k$  и  $\psi_k$  интегрирование системы (5) дает

$$u_{ik} = -\sigma \partial_i \psi_k + \omega_{ik}, \quad u_{3k} = -\sigma \gamma_k \psi_k + \omega_{3k}, \quad \kappa_k^{(2)} \omega_{ik} = 0 \quad (i=1, 2). \quad (7)$$

Потребовав, чтобы соотношение  $\theta_k = \kappa_k^{(2)} \psi_k$  выполнялось фактически, приходим к равенствам

$$\omega_{1k} = \sigma \partial_2 \Omega_k, \quad \omega_{2k} = -\sigma \partial_1 \Omega_k, \quad \omega_{3k} = -\frac{1}{\gamma_k} (1 + \sigma) \kappa_k^{(1)} \psi_k, \quad (8)$$

где  $\Omega_k$  – произвольное решение уравнения  $\kappa_k^{(2)} \Omega_k = 0$ .

В силу (7), (8) окончательно получаем

$$u_{1k} - i u_{2k} = 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} (i \Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}), \quad \theta_k = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \Omega_k^{(1)}, \quad (9)$$

$$u_{3k} = -\sigma \gamma_k \Omega_k^{(1)} - \sigma \left[ \gamma_k + \frac{1 + \sigma}{\sigma \gamma_k} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right] \Omega_k^{(2)}.$$

Здесь  $\Omega_k^{(i)}$  – произвольное решение уравнения  $\kappa_k^{(i)} \varphi = 0$ ; функции  $\Omega_k$  определяют поворот элемента относительно оси  $Ox_3$ ;  $u_{ik}$  – амплитуды соответствующих величин.

Интегральные представления входящих в выражения (9) функций, возьмем в виде

$$\begin{aligned} \Omega_k^{(1)} &= \int_L p_k^{(1)} K_0(\lambda_k r) ds, & \Omega_k^{(2)} &= \int_L p_k^{(2)} K_0(\beta_k r) ds, \\ \Omega_k &= \int_L p_k^{(3)} K_0(\beta_k r) ds & r &= |\zeta - z|, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L = \cup L_j, \quad z = x_1 + ix_2, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $K_0(\gamma r)$  – функция Макдональда нулевого порядка;  $ds$  – элемент дуги контура; плотности  $p_k^{(1)}(\zeta), p_k^{(2)}(\zeta), p_k^{(3)}(\zeta)$  пока неизвестны.

Интегральные представления разрешающих функций (10) обладают достаточным произволом для удовлетворения граничных условий на контурах отверстий и удовлетворяют условиям излучения на бесконечности.

Граничные условия на  $L$  запишем в форме

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2(N - iT), \\ (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{-2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12}) &= 2(N + iT), \\ (\sigma_{13} - i\sigma_{23}) e^{i\psi} + (\sigma_{13} + i\sigma_{23}) e^{-i\psi} &= 2Z, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\psi$  – угол между внешней нормалью к контуру  $L$  и осью  $Ox_1$ .

Используя закон Гука и формулы (9), представим условия (11) в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (N_k - iT_k) &= -[\Lambda(1 - \sigma) + \sigma\lambda_k^2] \Omega_k^{(1)} - \sigma\beta_k^2 \Omega_k^{(2)} + 4\sigma e^{2i\psi} \partial_{zz}^2 (i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}), \\ \frac{1}{\mu} (N_k + iT_k) &= -[\Lambda(1 - \sigma) + \sigma\lambda_k^2] \Omega_k^{(1)} - \sigma\beta_k^2 \Omega_k^{(2)} + 4\sigma e^{-2i\psi} \partial_{zz}^2 (-i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}), \\ \frac{1}{\mu} Z_k &= e^{i\psi} \partial_z (a_k^* \Omega_k^{(1)} + b_k^* \Omega_k^{(2)} + ic_k^* \Omega_k) + e^{-i\psi} \partial_z (a_k^* \Omega_k^{(2)} + b_k^* \Omega_k^{(1)} - ic_k^* \Omega_k), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \alpha_2^2 - \alpha_1^2, \quad a_k^* = a_k - \sigma\gamma_k, \quad b_k^* = b_k - \sigma\gamma_k, \quad c_k^* = \sigma\gamma_k, \\ a_k &= -\sigma\gamma_k, \quad b_k = -\sigma \left[ \gamma_k + \frac{1 + \sigma}{\sigma\gamma_k} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right]. \end{aligned}$$

## 2. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Граничная задача (12) с учетом представлений (10) сводится при помощи обычной процедуры к системе, состоящей из трех сингулярных интегродифференциальных уравнений (при каждом фиксированном  $k$ ).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (N_k - iT_k) &= \sum_{i=1}^3 \frac{dp_k^{(i)}}{ds_0} r_1^{(i)} + p_k^{(i)} r_2^{(i)} + \int_L G_k^{(i)} dp_k^{(i)} + \int_L p_k^{(i)} \tilde{G}_k^{(i)} ds, \\ \frac{1}{\mu} (N_k + iT_k) &= \sum_{i=1}^3 \frac{dp_k^{(i)}}{ds_0} \bar{r}_1^{(i)} + p_k^{(i)} \bar{r}_2^{(i)} + \int_L G_k^{*(i)} dp_k^{(i)} + \int_L p_k^{(i)} \tilde{G}_k^{*(i)} ds, \\ \frac{1}{\mu} Z_k &= \sum_{i=1}^3 p_k^{(i)} n_k^{(i)} + \int_L p_k^{(i)} H_k^{(i)} ds, \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$r_1^{(1)} = 2\sigma\pi i, \quad r_1^{(2)} = r_1^{(1)}, \quad r_1^{(3)} = 2\sigma\pi, \quad r_2^{(1)} = 2\sigma\pi k_0^*, \quad r_2^{(2)} = r_2^{(1)}, \quad r_2^{(3)} = -2\sigma\pi i k_0^*;$$

$$k_0^* = \frac{d\Psi_0}{ds_0}; \quad n_k^{(1)} = -2\pi\sigma\gamma_k, \quad n_k^{(2)} = \pi b_k^*, \quad n_k^{(3)} = 0;$$

$$G_k^{(1)} = \frac{2i\sigma e^{i(2\Psi_0 - \Psi)}}{\zeta - \zeta_0}, \quad \tilde{G}_k^{(1)} = l_{1k} K_0(\lambda_k r) - 4\sigma e^{2i\Psi_0} \left\{ -\frac{e^{-i\Psi} \cdot k^*}{2(\zeta - \zeta_0)} + \frac{\lambda_k^2}{4} K_2^*(\lambda_k r) e^{-2i\alpha_0} \right\},$$

$$k^* = \frac{d\Psi}{ds}, \quad l_{1k} = -[\Lambda(1 - \sigma) + \sigma\lambda_k^2], \quad \lambda_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_1^2;$$

$$G_k^{(2)} = G_k^{(1)}, \quad \tilde{G}_k^{(2)} = l_{2k} K_0(\beta_k r) - 4\sigma e^{2i\Psi_0} \left\{ -\frac{e^{-i\Psi} \cdot k^*}{2(\zeta - \zeta_0)} + \frac{\beta_k^2}{4} K_2^*(\beta_k r) e^{-2i\alpha_0} \right\},$$

$$l_{2k} = -\sigma\beta_k^2, \quad G_k^{(3)} = -iG_k^{(1)},$$

$$\tilde{G}_k^{(3)} = 4i\sigma e^{2i\Psi_0} \left\{ -\frac{e^{-i\Psi} \cdot k^*}{2(\zeta - \zeta_0)} + \frac{\beta_k^2}{4} K_2^*(\beta_k r) e^{-2i\alpha_0} \right\}; \quad K_2^*(\gamma) = K_2(\gamma) - \frac{2}{\gamma^2};$$

$$G_k^{*(1)} = \overline{G}_k^{(1)}, \quad G_k^{*(2)} = \overline{G}_k^{(2)}, \quad G_k^{*(3)} = \overline{G}_k^{(3)}, \quad \tilde{G}_k^{*(1)} = \overline{\tilde{G}}_k^{(1)}, \quad \tilde{G}_k^{*(2)} = \overline{\tilde{G}}_k^{(2)}, \quad \tilde{G}_k^{*(3)} = \overline{\tilde{G}}_k^{(3)};$$

$$H_k^{(1)} = -2\gamma_k \lambda_k K_1(\lambda_k r) \cos(\Psi_0 - \alpha_0),$$

$$H_k^{(2)} = b_k^* \beta_k K_1(\beta_k r) \cos(\Psi_0 - \alpha_0), \quad H_k^{(3)} = -\sigma\gamma_k \beta_k K_1(\beta_k r) \sin(\Psi_0 - \alpha_0).$$

### 3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ.

Рассмотрим слой, ослабленный полостью эллиптического поперечного сечения

$$\xi_1 = R_1 \cos \varphi, \quad \xi_2 = R_2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Для характеристики напряженного состояния на поверхности полости произведем расчет амплитудных значений величины

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta \quad (14)$$

в точке контура  $\varphi = \pi/2$ .

При численной реализации алгоритма систему интегральных уравнений методом механических квадратур [9] сведем к линейной системе алгебраических уравнений.

Последовательность вычислений такова: сначала численно решаем систему интегральных уравнений (13), после чего определяем коэффициенты Фурье  $\sigma_{ij}^{(k)}$  тензора напряжений. Затем по формулам (14) рассчитываем искомые напряжения на поверхности полости.

Пусть на поверхности полости действует изгибное пульсирующее давление, амплитудное значение которого определяется выражением

$$N^* = P\chi_3 \quad (P = \text{const}).$$

На рис.1 приведено распределение относительного амплитудного значения окружного напряжения  $\sigma_1 = |\sigma_{\theta\theta}/P|$  в зависимости от изменения безразмерного волнового числа  $\alpha_1 a$  ( $a$  – характерный линейный размер) для круговой полости ( $R_1 = R_2 = 1$ ) при  $h/R_1 = 1$ ,  $a = 1$ .

Аналогичные результаты при  $h/R_1 = 4$  показаны на рис.2.

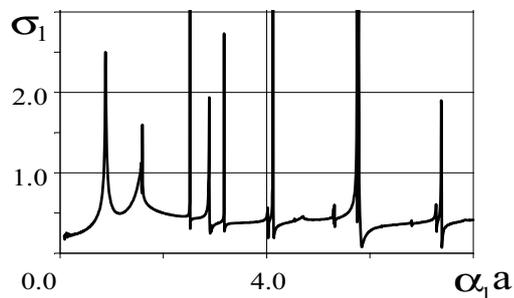


Рис.1

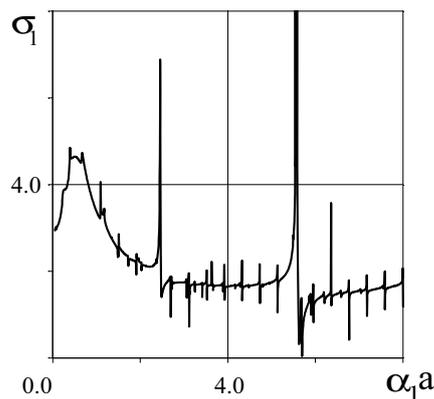


Рис.2

Пусть на бесконечности действует изгибная пульсирующая нагрузка, амплитудное значение которой определяется выражением  $\sigma_{11}^{*\infty} = Px_3$  ( $P = \text{const}$ ), а поверхность полости свободна от усилий. Результаты для этого случая приведены на рис. 3 и 4 для  $h/R_1 = 1$  и  $h/R_1 = 4$  соответственно.

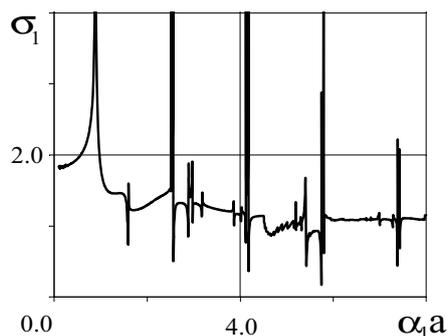


Рис.3

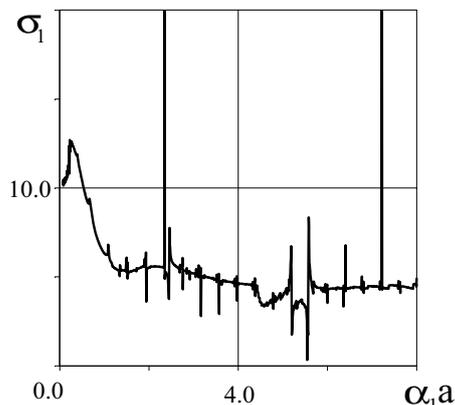


Рис.4

На рис. 5 даны аналогичные результаты соответствующие действию возбуждения  $\sigma_{11}^{*\infty} = Px_3$  для эллиптической полости ( $R_1 = 1, R_2 = 1,5$ ) при  $h/R_1 = 1, a = 1$ ; а на рис.6 – при  $h/R_1 = 4$ .

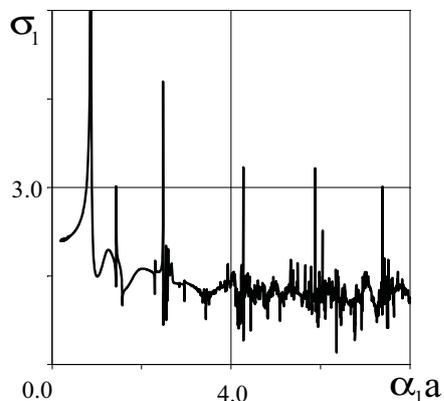


Рис.5

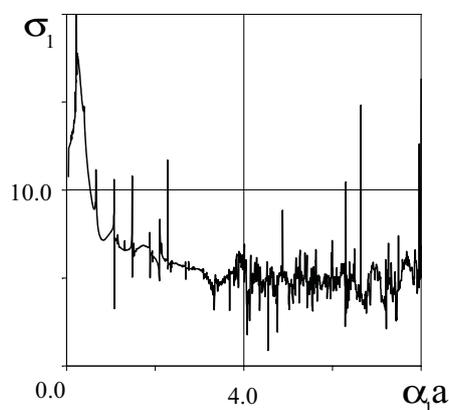


Рис.6

Численные результаты получены при значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0,28$ .

Таким образом, построенные аналитические и численные процедуры дают возможность эффективно исследовать динамическую напряженность толстых пластин с отверстиями в условиях изгибных колебаний, а также изучать спектры собственных частот при различных возбуждениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка. – 1981. – 284 с.
2. Аксентян О.К., Селезнева Т.Н. Определение частот собственных колебаний круглых плит // Прикл. математика и механика. 1976. – Вып. 40, №1. – С.112-119.
3. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные плиты. – Киев: Наук. думка. – 1978. – 239 с.
4. Буглак В.А., Мысовская Р.М., Мысовский Ю.В., Сторожев В.И. Однородные решения задачи о связанных термоупругих колебаниях толстых изотропных пластин // В сб.: Теорет. и прикл. механика. – Киев-Донецк: Вища школа. – 1979. – Вып.10. – С.79-84.
5. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука. – 1979. – 319 с.
6. Григоренко А.Я., Дыяк И.И., Макар В.М. Влияние анизотропии на динамические характеристики свободных колебаний конечных цилиндров // Прикл. механика. – 2001. – 37, №5. – С.74-83.
7. Сторожев В.И., Мысовский Ю.В. Соколова О.Д. Особенности спектра собственных колебаний трансформной дисковидной пластины в окрестности краевого резонанса // Теорет. и прикл. механика. Харьков: Основа. – 2003. – Вып.37. – С.184-189.
8. Фильштинский Л.А. Периодические решения теории упругости для цилиндра в  $R^3$  // Теорет. и прикл. механика. Харьков: Основа. 1990. – Вып. 21. – С.13-20.
9. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука. 1985. – 253 с.