ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ОТ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ИСТОЧНИКА В РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ УПРУГОЙ СРЕДЕ

И.А. Улитко
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
кафедра теоретической и прикладной механики
E-mail: ulitko@univ.kiev.ua

Изучается задача о распространении упругих волн от гармонического источника растяжения-сжатия в равномерно вращающейся упругой среде. Постановка краевой задачи основана на условном разделе исследуемой области на два полупространства и на данных о характере распределения статического и динамического поля вблизи сферической особенности в неподвижной среде. Представленное через интегралы Ханкеля решение указывает на возникновение окружных гармонических волн с амплитудой прямо пропорциональной угловой скорости вращения, которые не имеют места в неподвижной среде.

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих публикациях автора была изучена так называемая “кориолисова” дисперсия плоских гармонических волн в равномерно вращающейся упругой среде [1], выражающаяся в ряде интересных свойств волнового движения, наиболее важными из которых являются круговая или эллиптическая поляризации плоской волны и Браяновский эффект прецессии бегущих волн [2], заключающийся в том, что во вращающейся среде суперпозиция встречных бегущих волн одинаковой амплитуды и фазы порождает не стоячую волну, а “медленную” бегущую волну, распространяющуюся со скоростью, равной (или пропорциональной) угловой скорости вращения тела [3]. Практической целью исследований закономерностей распространения различных типов волн во вращающихся упругих телах является углубленное изучение гироскопических эффектов, лежащих в основе функционирования различных типов волновых гироскопов [4-7]. Характеризуя это направление динамической теории упругости и теории гироскопов, следует сказать, что автору неизвестны литературные данные о способах описания сосредоточенных источников волн во вращающихся телах, и соответственно — методы решения подобных задач.

В настоящем докладе изучается задача о “кориолисовой” дисперсии сферических волн, источником которых является гармонический центр растяжения-сжатия, помещенный в начале координат. Хорошо известно, что в неподвижной упругой среде гармонический центр растяжения-сжатия порождает сферические волны с чисто радиальными перемещениями частиц, перпендикулярными к фронту расходящейся сферической волны вне зависимости от углов наклона ϑ и φ – сферических координат. В противоположность этому во вращающейся упругой среде гармонический источник растяжения-сжатия порождает и окружные перемещения (предполагается, что вращение происходит вокруг вертикальной оси OZ). Причем, гармонические окружные перемещения не зависят от окружной координаты φ, т.е. задача является осесимметричной с осью симметрии, совпадающей с направлением вектора угловой скорости вращения $\mathbf{\Omega}$.

ОБОБЩЕННОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЛАМЕ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ И ЕГО ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

В случае равномерного вращательного движения среды, в пренебрежении влиянием статических растяжений тела от центробежных сил на изменение упругих постоянных, а также в пренебрежении влиянием малых относительных перемещений $\mathbf{u}$ на изменение угловой скорости вращения [8] обобщенное векторное динамическое уравнение Ламе [9] записывается так

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} - \mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{u} = \frac{\rho}{G}\left[\ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}) + 2(\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\mathbf{u}})\right]. \tag{1}$$

Здесь G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{k}\,\Omega_0$ – угловая скорость вращения, $\Omega_0 = \mathrm{const}$, направленная вдоль вертикальной оси OZ. Уравнение (1) записано в подвижной системе координат, связанной с равномерным вращательным движением среды. Для гармонических колебаний с частотой ω в осесимметричном случае вектор упругих перемещений представляется в виде

$$\mathbf{u}(r,z,t) = \left[\mathbf{e}_r\tilde{u}_r(r,z) + \mathbf{e}_\varphi\tilde{u}_\varphi(r,z) + \mathbf{k}\,\tilde{u}_z(r,z)\right]e^{i\omega t}, \tag{2}$$

где согласно общепринятым обозначениям $\mathbf{e}_r$ – орт оси Or, $\mathbf{e}_\varphi$ – орт оси $O\varphi$, $\mathbf{k}$ – орт оси OZ подвижных цилиндрических координат $Or\varphi Z$. Представляя амплитудные функции перемещений в решении (2) в виде интегралов Ханкеля [10]

$$\tilde{u}_r(r,z) = \frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty u(\lambda,z)\,J_0(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda, \qquad \tilde{u}_\varphi(r,z) = -\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty v(\lambda,z)\,J_0(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda,$$

$$\tilde{u}_z(r,z) = \int_0^\infty w(\lambda,z)\,J_0(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda, \tag{3}$$

после подстановки их в уравнение (1) с учетом (2) получим систему связанных дифференциальных уравнений для плотностей преобразования $u(\lambda,z)$, $v(\lambda,z)$ и $w(\lambda,z)$

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}(1+\varepsilon^2)\right)u + \frac{1}{1-2\nu}\frac{dw}{dz} - 2i\varepsilon\frac{\omega^2}{c_2^2}v = 0,$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} - \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}(1+\varepsilon^2)\right)v + 2i\varepsilon\frac{\omega^2}{c_2^2}u = 0,$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)w - \lambda^2\frac{1}{1-2\nu}\frac{du}{dz} = 0, \tag{4}$$

где $c_1 = \sqrt{(2G/\rho)\,[(1-\nu)/(1-2\nu)]}$ – скорость продольных, а $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ – скорость поперечных волн в неподвижной упругой среде, $\varepsilon = \Omega_0/\omega$ – нормированная к частоте волн угловая скорость вращения. Как видно первое и второе уравнения системы (4) связаны последними слагаемыми с сомножителями $2i\varepsilon$. Это обусловлено действием сил инерции Кориолиса и в процессе решения приводит к сложным дисперсионным зависимостям волновых чисел λ или фазовых скоростей волн от частоты ω и угловой скорости Ω_0, которые не имеют места в неподвижной среде.

Ограничимся лишь случаем, когда круговая частота гармонических волн ω намного превосходит угловую скорость вращения Ω_0, т.е. $\varepsilon = \Omega_0/\omega \approx 10^{-3}$. Общее решение уравнений (4) представим равенствами

$$w(\lambda,z) = 2i\varepsilon\lambda^2\sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}\left[\xi_1\left(Ae^{\xi_1 z}-Be^{-\xi_1 z}\right)-\bar{\xi}_1\left(Ce^{\bar{\xi}_1 z}-De^{-\bar{\xi}_1 z}\right)\right]+\frac{c_1^2-c_2^2}{c_1^2}\xi_5\left(Ee^{\xi_5 z}-Fe^{-\xi_5 z}\right),$$

$$u(\lambda,z) = 2i\varepsilon\left(\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^{3/2}\left[\left(Ae^{\xi_1 z}+Be^{-\xi_1 z}\right)-\left(Ce^{\bar{\xi}_1 z}+De^{-\bar{\xi}_1 z}\right)\right]+\frac{c_1^2-c_2^2}{c_1^2}\left(Ee^{\xi_5 z}+Fe^{-\xi_5 z}\right),$$

$$v(\lambda,z) = -2i\varepsilon\frac{\omega}{c_2}\left(\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\left[\left(Ae^{\xi_1 z}+Be^{-\xi_1 z}\right)+\left(Ce^{\bar{\xi}_1 z}+De^{-\bar{\xi}_1 z}\right)\right]-2i\varepsilon\left(Ee^{\xi_5 z}+Fe^{-\xi_5 z}\right). \tag{5}$$

Аналогичным путем, представляя компоненты вектора напряжений на ортогональных площадках, сориентированных по осям координатной системы $Or\varphi Z$ в виде интегралов Ханкеля (3), для их плотностей получим

$$\frac{\sigma_z}{2G} = \frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{dw}{dz}-\frac{\nu}{1-2\nu}\lambda^2 u = 2i\varepsilon\lambda^2\left(\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^{3/2}\left[\left(Ae^{\xi_1 z}+Be^{-\xi_1 z}\right)-\left(Ce^{\bar{\xi}_1 z}+De^{-\bar{\xi}_1 z}\right)\right]+$$
$$+\frac{c_1^2-c_2^2}{c_1^2}\left(\lambda^2-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\left(Ee^{\xi_5 z}+Fe^{-\xi_5 z}\right),$$

$$\frac{\tau_{zr}}{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}+w\right) = 2i\varepsilon\sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}\left(\lambda^2-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\left[\xi_1\left(Ae^{\xi_1 z}-Be^{-\xi_1 z}\right)-\bar{\xi}_1\left(Ce^{\bar{\xi}_1 z}-De^{-\bar{\xi}_1 z}\right)\right]+$$
$$+\frac{c_1^2-c_2^2}{c_1^2}\xi_5\left(Ee^{\xi_5 z}+Fe^{-\xi_5 z}\right),$$

$$\frac{\tau_{z\varphi}}{G} = \frac{1}{2}\frac{dv}{dz} = -i\varepsilon\frac{\omega}{c_2}\left(\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\left[\xi_1\left(Ae^{\xi_1 z}-Be^{-\xi_1 z}\right)+\bar{\xi}_1\left(Ce^{\bar{\xi}_1 z}-De^{-\bar{\xi}_1 z}\right)\right]-$$
$$-i\varepsilon\xi_5\left(Ee^{\xi_5 z}+Fe^{-\xi_5 z}\right). \tag{6}$$

В этих решениях комплексно-сопряженные величины ξ_1 и $\bar{\xi}_1$, а также ξ_5 — суть три из шести корней алгебраического характеристического определителя шестого порядка, отобранные исходя из условий излучения Зоммерфельда на бесконечности $|z| \to \infty$

$$\xi_1 \approx \sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}+2i\varepsilon\sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}}, \quad \bar{\xi}_1 \approx \sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}-2i\varepsilon\sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}}, \quad \xi_5 \approx \sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_1^2}}. \tag{7}$$

Естественно, в решениях (5) и (6) следует учитывать лишь те три из шести экспоненциальных слагаемых, которые, в зависимости от знака z ($z \geq 0$ или $z < 0$), описывают лишь уходящие от источника волны, оставшиеся три слагаемых не удовлетворяющие условиям Зоммерфельда следует исключить.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Разделим неограниченное пространство на нижнее и верхнее полупространства плоскостью $z = 0$. Принимая во внимания условия симметрии поля по координате z

$$\tilde{u}_r(r,-z;\omega) = \tilde{u}_r(r,z;\omega), \quad \tilde{u}_\varphi(r,-z;\omega) = \tilde{u}_\varphi(r,z;\omega), \quad \tilde{u}_z(r,-z;\omega) = -\tilde{u}_z(r,z;\omega), \tag{8}$$

после тщательного изучения решения задачи о сферической особенности в неподвижной среде [10] и достаточно громоздких выкладок при последующем преобразовании формул упомянутого решения к цилиндрическим координатам, краевые условия для верхнего полупространства $z \geq 0$ сформулируем в виде

$$\tilde{u}_z\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}p\frac{\delta(r)}{r}, \qquad \frac{\tau_{zr}}{G}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}q\frac{d}{dr}\left(\frac{\delta(r)}{r}\right), \qquad \frac{\tau_{z\varphi}}{G}\Big|_{z=0} = 0, \tag{9}$$

Форма краевых условий, в которую наряду с величинами напряжений входят осевые перемещения точек среды, диктуется характером особенности в окрестности источника $r \approx 0$, $z \approx 0$ в статической задаче. При этом предполагается, что для любого конечного значения частоты ω распределение особенности остается таким же, как и в статической задаче. Связь между постоянными p и q, входящими в краевые условия (9), и их выражения через интенсивность сферического источника волн устанавливаются после решения задачи. Забегая наперед наугад положим $p = q$.

Рассматривая далее только верхнее полупространство $z \geq 0$ в формулах для плотностей перемещений (5) и напряжений (6) оставляем лишь члены убывающие с ростом z. После обращения краевых условий (9) по Ханкелю определяем три ненулевые постоянные общего решения из следующей системы алгебраических уравнений

$$-2i\varepsilon\lambda^2\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}}\left(\xi_1 B - \bar{\xi}_1 D\right) - \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2}\xi_5 F = \frac{1}{2}p,$$

$$-2i\varepsilon\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}}\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\left(\xi_1 B - \bar{\xi}_1 D\right) - \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2}\xi_5 F = \frac{1}{2}p,$$

$$\frac{\omega}{c_2}\left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\left(\xi_1 B + \bar{\xi}_1 D\right) + \xi_5 F = 0. \tag{10}$$

Отсюда

$$\xi_5 F = -\frac{1}{2}p\frac{c_1^2}{c_1^2 - c_2^2}, \qquad \xi_1 B = \bar{\xi}_1 D = -\frac{1}{2}\frac{c_2}{\omega}\frac{\xi_5 F}{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}}. \tag{11}$$

Изучим сперва особенность упругого поля вблизи начала координат $r \approx 0, z \approx 0$, которая определяется асимптотиками плотностей $u(\lambda, z)$, $v(\lambda, z)$, $w(\lambda, z)$ при $\lambda \to \infty$. После граничного перехода в (7) имеем $\xi_1 \approx \bar{\xi}_1 \approx \xi_5 = \lambda$, и далее из (5) и (11) находим

$$w(\lambda, z)\big|_{\lambda\to\infty} \approx -\frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2}\lambda F e^{-\lambda z} = \frac{1}{2}p e^{-\lambda z},$$

$$u(\lambda, z)\big|_{\lambda\to\infty} \approx \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2}F e^{-\lambda z} = -\frac{1}{2}\frac{p}{\lambda}e^{-\lambda z}, \qquad v(\lambda, z)\big|_{\lambda\to\infty} \approx 0. \tag{12}$$

Входя с этими выражениями в интегральные представления (3), получим

$$\tilde{u}_r(r, z) \approx -\frac{1}{2}p\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda}J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}p\int_0^\infty e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}p\frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\tilde{u}_z(r, z) \approx \frac{1}{2}p\int_0^\infty e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}p\frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \qquad \tilde{u}_\varphi(r, z) = 0. \tag{13}$$

Формулами (13) представлено решение статической задачи для центра сжатия в начале координат. Видно, что величина p характеризует интенсивность давления в окрестности центра сжатия и введенное выше предположение $p = q$ вполне оправданно.

Косвенным подтверждением правильности построенного решения являются выражения для амплитуд волнового поля в предельном случае неподвижной среды $\varepsilon = 0$. В этом случае последовательно находим

$$\xi_1 = \bar{\xi}_1 = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}}, \qquad \xi_5 \approx \sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}, \tag{14}$$

$$w(\lambda, z) = \frac{1}{2} p \exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}\right), \quad u(\lambda, z) = -\frac{1}{2} p \frac{\exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}}, \qquad v(\lambda, z) \equiv 0$$

$$\tilde{u}_z(r, z; \omega) = \frac{1}{2} p \int_0^\infty \exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}\right) J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda = -\frac{1}{2} p \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}} J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda$$

$$\tilde{u}_r(r, z; \omega) = -\frac{1}{2} p \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}} J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda . \tag{15}$$

Последние интегралы в амплитудах перемещений (15) вычисляется в замкнутом виде [11]

$$\int_0^\infty \frac{\exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}} J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \exp\left(-i\frac{\omega}{c_1}\sqrt{r^2 + z^2}\right). \tag{16}$$

Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_r \tilde{u}_r + \mathbf{k}\tilde{u}_z = -\frac{1}{2} p \operatorname{grad}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \cdot \exp\left(-i\frac{\omega}{c_1}\sqrt{r^2 + z^2}\right)\right]. \tag{17}$$

Переходя к сферическим координатам ($\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ – полярный радиус) видим, что решение (17) представляет собой расходящиеся сферические волны от гармонического источника в начале координат

$$\tilde{u}_\rho = -\frac{1}{2} p \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{1}{\rho} \cdot \exp\left(-i\frac{\omega\rho}{c_1}\right)\right], \qquad \tilde{u}_\vartheta = 0, \qquad \tilde{u}_\varphi = 0, \tag{18}$$

о котором упоминалось выше.

Во вращающейся среде с учетом выражений для постоянных (11) плотности в интегралах Ханкеля (3) представляются равенствами

$$w(\lambda,z)=\frac{1}{2}p\left[e^{-\xi_5 z}-2i\varepsilon\frac{c_1^2}{c_1^2-c_2^2}\frac{c_2}{\omega}\frac{e^{-\xi_1 z}-e^{-\bar{\xi}_1 z}}{2}\lambda^2\left(\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

$$u(\lambda,z)=-\frac{1}{2}p\left[\frac{e^{-\xi_5 z}}{\xi_5}-2i\varepsilon\frac{c_1^2}{c_1^2-c_2^2}\frac{c_2}{\omega}\frac{\bar{\xi}_1 e^{-\xi_1 z}-\xi_1 e^{-\bar{\xi}_1 z}}{2\xi_1\bar{\xi}_1}\sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}\right],$$

$$v(\lambda,z)=-\frac{1}{2}p\,2i\varepsilon\frac{c_1^2}{c_1^2-c_2^2}\left[\frac{e^{-\xi_5 z}}{\xi_5}-\frac{\bar{\xi}_1 e^{-\xi_1 z}+\xi_1 e^{-\bar{\xi}_1 z}}{2\xi_1\bar{\xi}_1}\right]. \tag{19}$$

В отличие от неподвижной среды интегралы Ханкеля теперь не вычисляются в замкнутом виде.

В качестве примера рассмотрим распределение окружных перемещений $\tilde{u}_\varphi$ в граничной плоскости $z=0$

$$\tilde{u}_\varphi(r,0;\omega)=-\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty v(\lambda,0;\omega)J_0(\lambda r)\lambda d\lambda=-\frac{1}{2}p\,2i\varepsilon\frac{c_1^2}{c_1^2-c_2^2}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\xi_5}-\frac{\bar{\xi}_1+\xi_1}{2\xi_1\bar{\xi}_1}\right)J_0(\lambda r)\lambda d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2}p\,2i\varepsilon\frac{c_1^2}{c_1^2-c_2^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\exp\left(-i\frac{\omega r}{c_1}\right)-\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}+2i\varepsilon\frac{\omega}{c_2}\sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}+2i\varepsilon\frac{\omega}{c_2}\sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}}}\right)J_0(\lambda r)\lambda d\lambda\right\} \tag{20}$$

Дальнейшее вычисление интеграла в (20) основано на том что для достаточно больших λ (для коротких волн) и малых угловых скоростях вращения $\varepsilon\approx 10^{-3}$ в знаменателях дробей можно избавиться от внутренних радикалов с сомножителями $2i\varepsilon$, разбивая надлежащим образом промежуток $0<\lambda<\infty$ и проводя асимптотическое интегрирование отдельных слагаемых. В результате получим приближенную формулу

$$\tilde{u}_\varphi(r,0;\omega)\approx-\frac{1}{2}p\,2i\varepsilon\frac{c_1^2}{c_1^2-c_2^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\exp\left(-i\frac{\omega r}{c_1}\right)-\frac{1}{r}\cdot\exp\left(-i\frac{\omega r}{c_2}\right)\right) \tag{21}$$

Этот результат указывает на то, что сферический источник во вращающейся среде порождает не только гармонические волны с чисто радиальными перемещениями частиц. Благодаря “кориолисовой” дисперсии в однородном по φ волновом поле будут иметь место окружные перемещения $\tilde{u}_\varphi$, амплитуда которых при заданной интенсивности источника p прямо пропорциональна угловой скорости вращения среды Ω_0 и обратно пропорциональна частоте ω. Отдельным слагаемым в (21) — амплитудам продольных и поперечных волн можно будет придать какой-либо физический смысл лишь после обращения по Ханкелю плотностей $w(\lambda,z)$ и $u(\lambda,z)$ из (19) и тщательного комплексного анализа всех трех компонентов вектора перемещений $\mathbf{u}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Улитко И.А. Дисперсия плоских гармонических волн в равномерно вращающемся упругом пространстве // ДАН Украины. – 1995. – № 1. – С. 54–57.
2. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys. Sci. – 1890. – Vol.7. – P. 101–111.
3. Улитко И.А. Модуляция гармонических бегущих волн в равномерно вращающейся упругой среде // II МНК “Современные проблемы механики сплошной среды”. Ростов-на-Дону. – 1996. – Т.1. – С. 137–141.
4. Улітко А.Ф. Коливання тонкої п’єзокерамічної циліндричної оболонки, що знаходиться в обертовому русі // Математичні методи і фізико-механічні поля, – 1996. – Т.39. – № 1. – С. 7– 8.
5. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. – М.: Наука, 1985. – 126 с.
6. Clarke N.S., Burdess J.S. A rotation rate sensor based upon a Rayleigh resonator // Trans. ASME, JAM. – 1994. – Vol.61. – P. 139 –143.
7. Chang C.O., Hwang J.J., Chou C.S. Modal precession of a rotating hemispherical shell // Int. Jour. Solids & Structures. – 1996. – Vol. 33, – No 19. – P. 2739–2757.
8. Улитко И.А. Возмущение угловой скорости равномерно вращающегося упругого тела при динамическом нагружении // V МНК “Современные проблемы механики сплошной среды”. Ростов-на-Дону. – 1999. – Т.2. – С. 170–175.
9. Улитко А.Ф. Пространственное движение упругих тел // Изв. АН СССР. МТТ. – 1990. – № 6. – С. 55 – 66.
10. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – К.: Академпериодика, 2002. – 342 с.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.2. – М.: Наука, 1970.