

## НОРМАЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В СЛОЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СРЕЗА ПЬЕЗОКРИСТАЛЛА КВАРЦА

В. А. СТОРОЖЕВ , А. В. БАЙ

*Донецкий национальный университет*

### ВВЕДЕНИЕ

В публикациях [1], [2], [3] рассмотрены вопросы построения и исследования дисперсионных уравнений, описывающих полные спектры нормальных электроупругих волн в отнесенных к кристаллографическим координатам трехмерных пьезокристаллических пластинах орторомбической системы в пластинах из АТ-, GT-, NT-срезов пьезокристалла  $\alpha$ -кварца.

В настоящей статье описана процедура построения и численно-аналитического исследования дисперсионного уравнения для пластины из произвольного среза пьезокристалла любой кристаллографической системы и представлена ее численная реализация применительно к пластине VT-среда пьезокристалла  $\alpha$ -кварца.

### Постановка задачи и методика получения решения.

Объектом рассмотрения в данной статье является отнесенная к декартовым координатам  $Ox_j$  плоскопараллельная упругая пластина, изготовленная из произвольного среза пьезокристалла произвольной кристаллографической системы, занимающая в прямоугольных безразмерных координатах область

$$V = \{ |x_3| \leq h, \quad -\infty < x_1, x_2 < \infty \}. \quad (1)$$

Плоские грани пластины свободны от напряжений и покрыты безинерционными короткозамкнутыми электродами, то есть на них заданы граничные условия вида

$$\begin{cases} \sigma_{3i} = 0, \\ E_i = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Записываемая в тензорной форме задача о нахождении спектра связанных электроупругих волн, распространяющихся в плоскости данной пластины, включает в себя уравнения движения

$$\sigma_{kl,l} = \rho \ddot{U}_k \quad (k, l = \overline{1,3}), \quad (3)$$

квазистатическое уравнение Максвелла

$$D_{i,i} = 0 \quad (i = \overline{1,3}), \quad (4)$$

и уравнения прямого и обратного пьезоэффекта

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} &= c_{ijkl}^E S_{ij} - e_{mkl} E_m, \\ D_n &= \varepsilon_{mn}^S E_m + 4\pi e_{nij} S_{ij}, \end{aligned} \quad (i, j, k, l, m, n = \overline{1,3}). \quad (5)$$

С использованием соотношений (5) и формул

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}), \\ E_i &= -\varphi_{,i}, \end{aligned} \quad (6)$$

для преобразования уравнений (3), (4) полную систему уравнений динамики пьезоактивной среды можно привести к виду

$$\begin{cases} c_{ijkl}^E U_{i,jl} + e_{mkl} \varphi_{,ml} &= \rho \ddot{U}_k, \\ 4\pi e_{nij} U_{i,j} - \varepsilon_{mn}^S \varphi_{,m} &= 0, \end{cases} \quad (i, j, m, n = \overline{1, 3}). \quad (7)$$

С введением для функций  $U_j$  и  $\varphi$  представлений

$$\begin{aligned} U_i &= f_i(x_3) \exp^{I(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2))}, \\ \varphi &= f_4(x_3) \exp^{I(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2))}, \end{aligned} \quad (8)$$

в которых  $I$  - мнимая единица, уравнение (7) преобразовывается к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} c_{i3q3}^E f_i''(x_3) - Ik(n_{\tilde{j}} c_{i\tilde{j}q3}^E + n_{\tilde{l}} c_{i3\tilde{q}\tilde{l}}^E) f_i'(x_3) - k^2 n_{\tilde{j}} n_{\tilde{l}} c_{i\tilde{j}q\tilde{l}}^E f_i(x_3) + e_{3q3} f_4''(x_3) - \\ - Ik(n_{\tilde{m}} e_{\tilde{m}q3} + n_{\tilde{l}} e_{3q\tilde{l}}) f_4'(x_3) - k^2 n_{\tilde{m}} n_{\tilde{l}} e_{\tilde{m}q\tilde{l}} f_4(x_3) = \omega^2 f_q(x_3), \\ 4\pi e_{i3\tilde{z}} f_i''(x_3) - 4\pi Ik(n_{\tilde{j}} e_{3i\tilde{j}} + n_{\tilde{n}} e_{\tilde{n}i3}) f_i'(x_3) - 4\pi k^2 n_{\tilde{n}} n_{\tilde{j}} e_{\tilde{n}i\tilde{j}} f_i(x_3) - \varepsilon_{33}^S f_4''(x_3) + \\ + Ik(n_{\tilde{m}} \varepsilon_{\tilde{m}3}^S + n_{\tilde{n}} \varepsilon_{3\tilde{n}}^S) f_4'(x_3) + k^2 n_{\tilde{m}} n_{\tilde{n}} \varepsilon_{\tilde{m}\tilde{n}}^S f_4(x_3) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$(i, j, q, l, m, n = \overline{1, 3}; \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n} = \overline{1, 2}).$

Аналогично, граничные условия (2) преобразовываются к виду

$$\begin{cases} c_{i33l}^E f_i'(\pm h) - I c_{i\tilde{j}3l}^E k n_{\tilde{i}} f_j(\pm h) - e_{33l} f_4'(\pm h) + I k n_{\tilde{m}} e_{\tilde{m}3l} f_4(\pm h) = 0, \\ f_4(\pm h) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$(i, l = \overline{1, 3}; \tilde{m}, \tilde{n} = \overline{1, 2}).$

Как уже было отмечено в [1], особенность проблемы анализа спектральной задачи (7), (10) заключается в том, что во всех встречающихся в литературе исследованиях характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений вида (7), корни которого должны быть вычислены с очень высокой точностью [1], являлось биквадратным, бикубическим либо битетраэдрическим по параметру  $p$  и решалось аналитически. В отличие от этих исследованных случаев характеристическое уравнение системы (7) является полиномом восьмой степени, имеющим в общем случае ненулевые, зависящие от частотного параметра  $\omega$  и волнового числа  $k$ , коэффициенты при всех степенях  $p$ . Его корни  $p_m(\omega, \varphi)$  ( $m = \overline{1, 8}$ ) при реализации алгоритма вычисления дисперсионной функции находились численным методом Дженкинса-Трауба. В результате, полученное методом Эйлера решение системы (7) имеет вид

$$f_j(x_3) = \sum_{m=1}^8 [\beta_{jm} A_m \exp(I p_m x_3)] \quad (j = \overline{1, 4}), \quad (11)$$

где  $A_m$  - произвольные постоянные интегрирования.  $\beta_{jm}$  - решения однородных систем линейных уравнений

$$\begin{cases} [-c_{i3q3}^E p_r^2 + k(n_j c_{ijq3}^E + n_{\tilde{i}} c_{i3q\tilde{i}}^E) p_r + k^2 n_j n_{\tilde{i}} c_{ijq\tilde{i}}^E + e_{3q3} p_r^2 + \\ + k(n_{\tilde{m}} e_{\tilde{m}q3} + n_{\tilde{i}} e_{3q\tilde{i}}) p_r - k^2 n_{\tilde{m}} n_{\tilde{i}} e_{\tilde{m}q\tilde{i}} - \delta_{qr} \omega^2] A_r = 0, \\ -[4\pi e_{3i3} p_r^2 + 4\pi k(n_j e_{3ij} + n_{\tilde{n}} e_{\tilde{n}i3}) p_r - 4\pi I k^2 n_{\tilde{n}} n_j e_{\tilde{n}ij} p_r + \varepsilon_{33}^S p_r^2 + \\ - k(n_{\tilde{m}} \varepsilon_{\tilde{m}3}^S + n_{\tilde{n}} \varepsilon_{3\tilde{n}}^S) p_r + k^2 n_{\tilde{m}} n_{\tilde{n}} \varepsilon_{\tilde{m}\tilde{n}}^S] A_r = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$(i, j, q, l, m, n = \overline{1, 3}, \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n} = \overline{1, 2}, r = \overline{1, 8}),$

нормированное таким образом, что  $\beta_{1m} = 1$ . Подставляя далее представление (11) в граничные условия (10), приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных  $A_m$  ( $m = \overline{1, 8}$ ).

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^8 A_r \exp(\pm I p_r h) (\beta_{ir} (c_{i33l}^E p_r - c_{i3l}^E k n_{\tilde{i}}) - \beta_{4r} (e_{33l} - k n_{\tilde{m}} e_{\tilde{m}3l})) = 0, \\ \sum_{r=1}^8 \beta_{4r} A_r \exp(\pm I p_r h) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$(i, j, l = \overline{1, 3}; \tilde{i}, \tilde{m} = \overline{1, 2}).$

Из условия существования нетривиальных решений данной системы следует искомое дисперсионное уравнение  $\Delta(\omega, k) = 0$ , левая часть которого представляет собой функциональный определитель восьмого порядка.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ

Характерной начальной фазой анализа исследуемого дисперсионного спектра является вычисление частот запираания бегущих нормальных волн. Соотношения для их определения следуют из спектральной задачи (9)-(10), в которой  $k$  полагается равным нулю.

$$\begin{cases} c_{i3q3}^E f_i''(x_3) + e_{3q3} f_4''(x_3) = \omega^2 f_q(x_3), \\ 4\pi e_{3i3} f_i''(x_3) - \varepsilon_{33}^S f_4''(x_3) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} c_{i33l}^E f_i'(\pm h) - e_{33l} f_4'(\pm h) = 0, \\ f_4(\pm h) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

$(i, q, l = \overline{1, 3}).$

Принципиальным отличием рассматриваемого случая от ранее изученных задач определения критических частот для пластин орторомбической системы с гранями, параллельными кристаллографическим плоскостям [1], является то, что корни частотного уравнения невозможно выразить в явном виде.

Полученное методом Эйлера решение системы (14) имеет вид

$$f_j(x_3) = \sum_{k=1}^6 A_{jk} \exp(I p_k x_3) + A_{j7} x_3 + A_{j8}, \quad (16)$$

где  $p_k$  ( $k = \overline{1, 6}$ ) - ненулевые корни характеристического уравнения системы (14)

$$z (\alpha_4 z^3 + \alpha_3 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_1) = 0, \quad (17)$$

$$z = p^2 / \rho \omega^2, \quad p_{2i-1} = \omega \sqrt{\rho z_i}, \quad p_{2i} = -\omega \sqrt{\rho z_i}; \quad (18)$$

$a_i$  - в общем случае ненулевые коэффициенты, зависящие от  $c_{ijk}^E, e_{ijk}, \varepsilon_{ij}^S$ .

Корни уравнения (17) могут быть найдены в явном виде по формулам Кардано, что создает дополнительные возможности для анализа их параметрических зависимостей от физико-механических постоянных слоя.

Константы  $A_{jk}$  в представлениях (16) связаны между собой соотношениями, устанавливаемыми при применении метода Эйлера к системе (14) и приводящимися к виду  $A_{jk} = \beta_{jk} A_k$  ( $j = \overline{1,4}, k = \overline{1,8}$ ). Величины  $\beta_{ij}$  определяются путем приравнивания нулю коэффициентов при  $A_j$  в соотношениях, получаемых подстановкой решений (16) в систему (14), причем

$$\beta_{17} = \beta_{18} = \beta_{27} = \beta_{28} = \beta_{37} = \beta_{38} = 0, \quad (19)$$

Искомое уравнение для критических частот получим, подставляя выражения

$$\begin{aligned} f_j(x_3) &= \sum_{k=1}^6 \beta_{jk} A_k e^{ip_k x_3} \quad (j = \overline{1,3}), \\ f_4(x_3) &= \sum_{k=1}^6 A_k e^{ip_k x_3} + A_7 x_3 + A_8, \end{aligned} \quad (20)$$

в граничные условия (15). Это уравнение представляет собой равенство нулю определителя  $\tilde{\Delta}(\omega) = 0$  системы однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_k$ , следующей из граничных условий.

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Анализ построенного для универсального случая дисперсионного уравнения был реализован применительно к пластине (слою) ВТ-среза пьезоактивного кристалла тригонально-трапецедрического класса  $\alpha$ -кварца. При расчетах использовались значения компонент тензоров  $c_{ijkl}^E, e_{ijk}, \varepsilon_{ij}^S$  для  $\alpha$ -кварца, приведенные в [5]. Пересчет физико-механических постоянных для различным образом ориентированных срезов материала проводился по формулам преобразования тензоров при переходе к новой системе координат [4], [5].

На рис. 1-3 соответственно представлены для сравнительного анализа диаграммы полного дисперсионного спектра связанных нормальных электроупругих волн в пластине ВТ-среза и рассчитанные отдельно в работе [3] диаграммы дисперсионных спектров для пластин NT- и GT-срезов. Представленные спектры рассчитаны для направления распространения, составляющего угол  $30^\circ$  с осью  $Ox_1$  в плоскости пластины, получаемой при естественной переориентации соответствующей кристаллографической оси  $O\tilde{x}_1$  для данного среза  $\alpha$ -кварца. Безразмерные параметры  $\Omega$  и  $k^*$  на рис. 1-3 давались в виде  $\Omega = 2h\omega/v^*$ ,  $k^* = 2kh/v^*$ , где  $v^* = 10^6$  м/с. Мнимые и действительные корни дисперсионной функции находились по методике, разработанной применительно к плоскопараллельным волноводам из низкосимметричных непьезоактивных материалов [6] и распространенной на случай пьезоактивных материалов в [1], [2], [3]. Комплексные корни отыскивались на основании алгоритма поиска локальных минимумов модуля дисперсионной функции методом скорейшего спуска.

В качественном отношении спектры имеют много сходных элементов в действительной части, а наибольшие различия касаются структуры спектра краевых стоячих волн. Нулевую частоту запирающая в спектрах имеют три ветви действительных и одна

ветвь мнимых корней. Если в спектре для пластины NT-среза третья, седьмая, десятая действительные ветви с ненулевой частотой запираания имеют участки с отрицательным углом наклона, что соответствует явлению "обратных" волн, то для пластин VT-, GT-срезов этим свойством обладает только одна мода - четвертая мода. Особенностью представленных спектров является наличие в них петлеобразным мнимых корней с начальными и конечными точками на оси  $k^*$ , а также мнимых ветвей кольцевого типа.

В спектре на рис. 3 имеются почти вертикальные участки мнимых ветвей, появление которых связано с влиянием квазистатического электрического поля. В спектре на рис. 1 и 2 такие участки имеют разрывный характер, и, в особенности, это свойственно низкочастотной части спектра для пластины VT-среза.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сторожев В.И., Бай А.В. Нормальные волны в ортотропной пьезоактивной пластине // Теорет. и прикладная механика. - 2001. - Вып. 33. - С. 164–169.
2. Сторожев В.И., Бай А.В., Шпак В.А. Спектр нормальных электроупругих волн в слое из пьезокристалла кварца // Теорет. и прикладная механика. - 2002. - Вып. 36. - С. 125–130.
3. Бай А. В. Полные дисперсионные спектры электроупругих волн в пластинах из сложных срезов пьезокристалла кварца // Теорет. и прикладная механика. - 2003. - Вып. 38. - С. 148–152.
4. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение при обработке сигналов: Пер. с франц. - М.: Наука, 1982. - 424 с.
5. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке: Пер. с англ. - М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952. - 448 с.
6. Абрамова О.П., Сторожев В.И., Шпак В.А. Дисперсия нормальных волн в ортотропном слое с закрепленными границами // Акуст. журнал. 1996. Т.42, №1. С. 5-9.

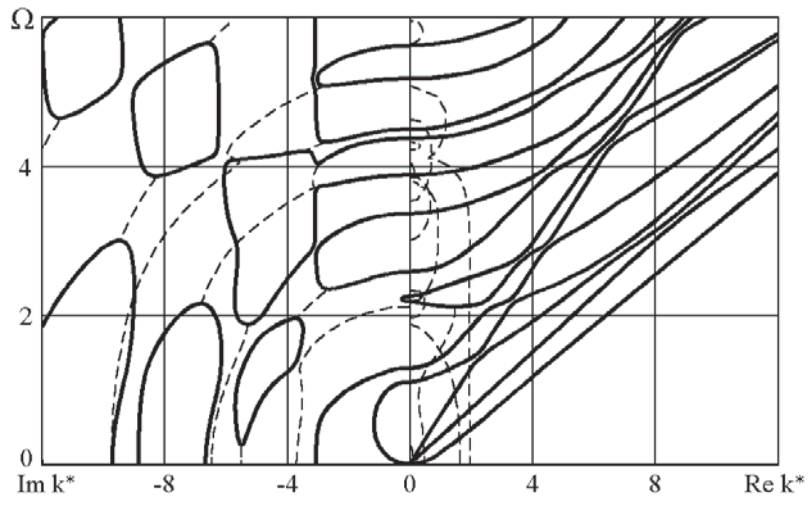


Рис. 1

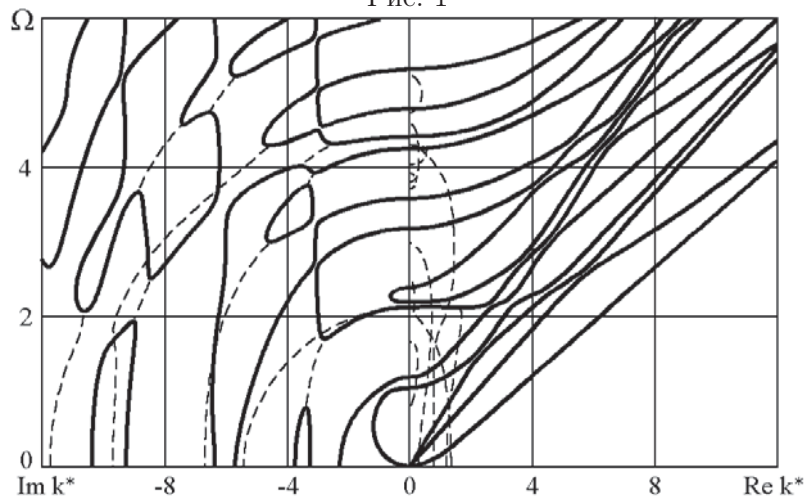


Рис. 2

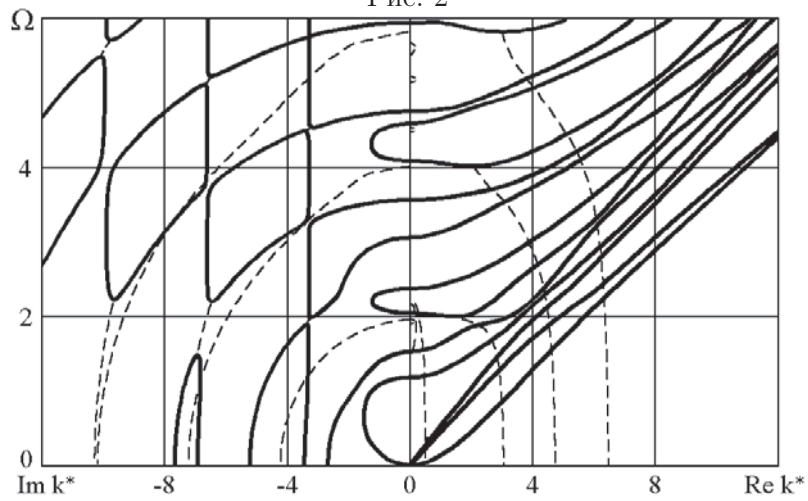


Рис. 3