

РАСЧЕТ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭМА ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В РЕЖИМЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ КРУТИЛЬНЫХ ВОЛН В ФЕРРОМАГНИТНОМ ЦИЛИНДРЕ

О. Н. Петрищев, Национальный технический университет Украины (КПИ)

В работе построена математическая модель ЭМА преобразователя в режиме возбуждения крутильных недиспергирующих волн в полом токопроводящем ферромагнитном цилиндре.

Пусть бесконечный длинный полый цилиндр из токопроводящего ферромагнетика поляризуется магнитным полем H_{ϑ}^0 , которое создается постоянным током I^0 , протекающим по круглому в поперечном сечении проводнику. При этом вне проводника $H_{\vartheta}^0 = I^0 / (2\pi\rho)$. Радиусы поперечных сечений проводника и полого цилиндра обозначим символами α_0, α_1 и α_2 ($\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2$). Соосно с цилиндром, в срединной его части, располагается катушка, длина которой 2ℓ , радиусы поперечного сечения R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). В катушке имеется N витков, по которым протекает гармонически изменяющийся во времени с частотой ω электрический ток, амплитудное значение которого обозначим символом I^* .

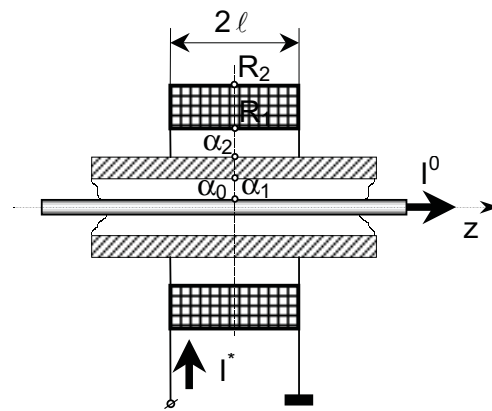


Рис. 1.

Очевидно, что амплитудное значение вектора напряженности \vec{H}^* магнитного поля катушки в цилиндрической системе координат, ось Oz которой совмещена с осью симметрии всей конструкции, полностью определяется компонентами $H_{\rho}^*(\rho, z)$ и $H_z^*(\rho, z)$. Совокупность магнитных полей $\vec{H}^*(\rho, z)$ и $\vec{H}^0(\rho, z)$ возбуждает в магнитоэластичном материале цилиндра осесимметричные сдвиговые деформации. При этом на поверхностях мысленно выделенного из объема цилиндра малого элемента существуют сторонние напряжения $\sigma_{\rho\vartheta}^* = -(m_1 - m_2)I^0 H_{\rho}^* / (4\pi\rho)$ и $\sigma_{z\vartheta}^* = -(m_1 - m_2)I^0 H_z^* / (4\pi\rho)$, а в объеме элемента действуют силы с плотностью

$$f_{\vartheta}^* = \sigma_{\rho\vartheta, \rho}^* + \sigma_{\vartheta z, z}^* + \frac{2}{\rho} \sigma_{\rho\vartheta}^* = -\frac{(m_1 - m_2)I^0}{4\pi\rho} \left(\frac{1}{\rho} H_{\rho}^* + H_{\rho, \rho}^* + H_{z, z}^* \right).$$

Указанная комбинация объемных и поверхностных нагрузок возбуждает крутильные волны, которые уходят влево и вправо от области существования переменного магнитного поля. Следует подчеркнуть, что в объеме полого цилиндра индуцируется вихревой ток, вектор плотности которого имеет всего лишь один окружной компонент J_{ϑ} . Рассматриваемый модельный пример примечателен тем, что в присутствии окружного поля подмагничивания силы Лоренца равны нулю.

На частотах ниже частоты запертия первой диспергирующей крутильной волны вынужденные колебания материальных частиц в объеме цилиндра определяются следующим образом [1]:

$$u_{\vartheta}^{(\pm)}(\rho, z) = \frac{ipe^{\pm i\gamma z}}{2G\pi(\alpha_2^4 - \alpha_1^4)\gamma} \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \xi^2 f_{\vartheta}^*(\xi, \vartheta, z) e^{\mp i\gamma z} d\xi d\vartheta dz + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} [\alpha_2^2 \sigma_{\rho\vartheta}^*(\alpha_2, \vartheta, z) - \alpha_1^2 \sigma_{\rho\vartheta}^*(\alpha_1, \vartheta, z)] e^{\mp i\gamma z} d\vartheta dz \right\}, \quad (1)$$

где $\gamma = \omega/v_s$, $v_s = \sqrt{G/\rho_0}$ ($G \equiv c_{66}^B$).

Введем обозначение

$$H_{\beta}^{(\pm)}(\rho, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\beta}^*(\rho, z) e^{\pm i\gamma z} dz, \quad \beta = \rho, z. \quad (2)$$

Полагая а priori, что интеграл (2) существует, выражение (1) можно преобразовать к следующему виду

$$u_{\vartheta}^{(\pm)}(\rho, z) = \frac{i(m_1 - m_2)^0 \rho e^{\pm i\gamma z}}{2G(\alpha_2^4 - \alpha_1^4)\gamma} \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \xi \left[\frac{1}{\xi} H_{\rho}^{(\mp)}(\xi, \gamma) + \frac{\partial H_{\rho}^{(\mp)}(\xi, \gamma)}{\partial \xi} \pm i\gamma H_z^{(\mp)}(\xi, \gamma) \right] d\xi - \right. \\ \left. - [\alpha_2 H_{\rho}^{(\mp)}(\alpha_2, \gamma) - \alpha_1 H_{\rho}^{(\mp)}(\alpha_1, \gamma)] \right\}. \quad (3)$$

Для того, чтобы определить фурье-трансформанты $H_{\beta}^{(\pm)}(\rho, \gamma)$ компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля, обратимся к уравнениям Максвелла..

В области ($\rho > \alpha_2$, $-\infty < z < \infty$) расположена катушка с током и поэтому уравнения Максвелла сводятся к уравнениям магнитостатики следующего вида

$$\varepsilon_{ijk} H_{k,j}^* = \begin{cases} J_i \forall \rho, z \in [R_1 \leq \rho \leq R_2, -l \leq z \leq l], \\ 0 \forall \rho, z \notin [R_1 \leq \rho \leq R_2, -l \leq z \leq l]. \end{cases} \quad (4)$$

Введем векторный потенциал $\vec{A}(\rho, z)$ такой, что $H_k^* = \varepsilon_{kmn} A_{n,m} / \mu_0$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость вакуума). После этого уравнение (29) можно записать в виде

$$-A_{\vartheta,zz} + A_{\vartheta} / \rho - (A_{\vartheta,\rho}) / \rho - A_{\vartheta,\rho\rho} = J_{\vartheta}(\rho, z), \quad (5)$$

где

$$J_{\vartheta}(\rho, z) = \begin{cases} \frac{\mu_0 l^* N}{2l(R_2 - R_1)} \forall \rho, z \in [R_1 \leq \rho \leq R_2, -l \leq z \leq l], \\ 0 \forall \rho, z \notin [R_1 \leq \rho \leq R_2, -l \leq z \leq l]. \end{cases}$$

Если левую и правую части уравнения (5) подвергнуть фурье-преобразованию (2), то для фурье-образов $A_{\vartheta}^{(\pm)}(\rho, \gamma)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\rho^2 A_{\vartheta,\rho\rho}^{(\pm)} + \rho A_{\vartheta,\rho}^{(\pm)} - [(\gamma\rho)^2 + 1] A_{\vartheta}^{(\pm)} = -\rho^2 J_{\vartheta}^{(\pm)}(\rho, \gamma), \quad (6)$$

где $J_{\vartheta}^{(\pm)}(\rho, \gamma) = \frac{\mu_0 l^* N}{2\pi(R_2 - R_1)} \cdot \frac{\sin \gamma l}{\gamma l} \cdot f(\rho)$; $f(\rho) = \begin{cases} 1 \forall \rho \in [R_1, R_2], \\ 0 \forall \rho \in [R_1, R_2]. \end{cases}$

Решение уравнения (6) имеет вид

$$A_{\vartheta}^{(\pm)}(\rho, \gamma) = A_1 I_1(\gamma\rho) + A_2 K_1(\gamma\rho) + A_1(\rho) I_1(\gamma\rho) + A_2(\rho) K_1(\gamma\rho), \quad (7)$$

где A_1 и A_2 – константы; $I_1(\gamma\rho)$ и $K_1(\gamma\rho)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда.;

$$\begin{Bmatrix} A_1(\rho) \\ A_2(\rho) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \\ + \end{Bmatrix} \frac{\mu_0 I^* N}{2\pi(R_2 - R_1)} \cdot \frac{\sin \gamma \ell}{\gamma \ell} \cdot \int_{\alpha_2}^{\rho} \xi f(\xi) \begin{Bmatrix} K_1(\gamma \xi) \\ I_1(\gamma \xi) \end{Bmatrix} d\xi.$$

Так как $K_1(\gamma \rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$, то для того, чтобы $A_{\vartheta}^{(\pm)}(\rho, \gamma) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно потребовать, чтобы $[A_1 + A_2(\rho)]_1(\gamma \rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$. Из этого следует, что

$$A_1 = \frac{\mu_0 I^* N}{2\pi(R_1 - R_2)} \cdot \frac{\sin \gamma \ell}{\gamma \ell} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho K_1(\gamma \rho) d\rho = \frac{\mu_0 I^* N}{2\pi\gamma} \cdot \frac{\sin \gamma \ell}{\gamma \ell} \cdot R(\gamma),$$

где

$$R(\gamma) = \frac{\pi}{2(R_2 - R_1)} \left\{ R_2 [K_1(\gamma R_2) \mathbf{L}_0(\gamma R_2) + K_0(\gamma R_2) \mathbf{L}_1(\gamma R_2)] - R_1 [K_1(\gamma R_1) \mathbf{L}_0(\gamma R_1) + K_0(\gamma R_1) \mathbf{L}_1(\gamma R_1)] \right\}, \quad (8)$$

функция, определяющая влияние толщины катушки на эффективность возбуждения крутильных колебаний на частоте $\omega = \gamma v_s$; $\mathbf{L}_v(z)$ - модифицированная функция Струве. Графики изменения функции $R(\gamma)$ для различных отношений R_2/R_1 показаны на рис. 2. Отчетливо видно, что с ростом отношения R_2/R_1 происходит сужение полосы частот, в которой происходит эффективное возбуждение крутильных волн. В работе [2] дано физическое толкование этому явлению и показано, что увеличение размеров области нагружения сопровождается не только уменьшением ширины полосы частот, но и смещением максимальных значений частотной характеристики преобразователя в область низких частот. Очевидно, что произведе-

$$W_k(\gamma) = \frac{\sin \gamma \ell}{\gamma \ell} \cdot R(\gamma)$$

имеет смысл частотной характеристики катушки как источника переменного магнитного поля в составе ЭАП ЭМТ.

В области $\rho < R_1$ фурье-трансформанты $A_{\vartheta}^{(\pm)}(\rho, \gamma) = \frac{\mu_0 I^* N}{2\pi\gamma} W_k(\gamma) I_1(\gamma \rho) + A_2 K_1(\gamma \rho)$. Сообразно этому определяются фурье-трансформанты компонентов напряженности магнитного поля

$$H_{\rho}^{(\pm)}(\rho, \gamma) = \pm i \frac{I^* N}{2\pi} W_k(\gamma) I_1(\gamma \rho) \pm i \frac{\gamma}{\mu_0} A_2 K_1(\gamma \rho),$$

$$H_z^{(\pm)}(\rho, \gamma) = \frac{I^* N}{2\pi} W_k(\gamma) I_0(\gamma \rho) - \frac{\gamma}{\mu_0} A_2 K_0(\gamma \rho). \quad (9)$$

Для удобства последующих записей, пронумеруем области пространства ($0 \leq \rho \leq \alpha_0$, $-\infty < z < \infty$), ($\alpha_0 \leq \rho \leq \alpha_1$, $-\infty < z < \infty$) и ($\alpha_1 \leq \rho \leq \alpha_2$, $-\infty < \rho < \infty$) числами 0, 1 и 2 соответственно. Уравнения Максвелла в этих областях запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nj}^{(m)} H_{k,j} &= [r_{nn}^{(m)} + i\omega \chi_{nn}^{(m)}]^{(m)} E_n, \\ \varepsilon_{\rho q n}^{(m)} E_{n,q} &= -i\omega \mu_{nn}^{(m)} H_{\rho}, \quad m = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

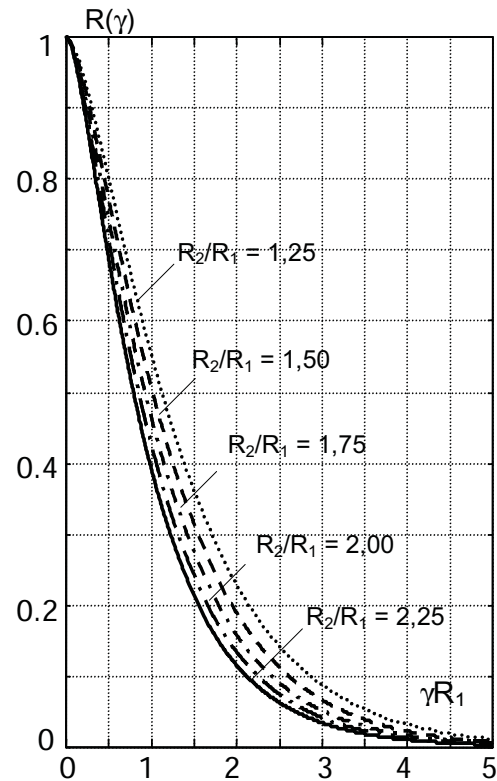


Рис. 2.

откуда следует, что

$$\varepsilon_{pqn} \varepsilon_{rijk} {}^{(m)}H_{k,jq} + i\omega[r_{nn}^{(m)} + i\omega\chi_{nn}^{(m)}]\mu_{nn}^{(m)} H_p = 0 \forall \rho, z \in (\rho < \alpha_2, -\infty < z < \infty). \quad (10)$$

В терминах фурье-трансформант ${}^{(m)}H_{\beta}^{(\pm)}(\rho, \gamma)$ ($\beta = \rho, z$) система уравнений (10) принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma^2 {}^{(m)}H_{\rho}^{(\pm)} \mp i\gamma {}^{(m)}H_{z,\rho}^{(\pm)} - (k_{(m)}^2 - i\omega\mu_2^{(m)}r_2^{(m)}) {}^{(m)}H_{\rho}^{(\pm)} &= 0 \forall \rho \in [\alpha_{m-1}, \alpha_m], \\ \mp \frac{i\gamma}{\rho} {}^{(m)}H_{\rho}^{(\pm)} - \frac{1}{\rho} {}^{(m)}H_{z,\rho}^{(\pm)} \mp i\gamma {}^{(m)}H_{\rho,\rho}^{(\pm)} - {}^{(m)}H_{z,\rho\rho}^{(\pm)} - (k_{(m)}^2 - i\omega\mu_2^{(m)}r_2^{(m)}) {}^{(m)}H_z^{(\pm)} &= 0 \forall \rho \in [\alpha_{m-1}, \alpha_m], \end{aligned}$$

где $k_{(m)}^2 = \omega^2 \mu_2^{(m)} \chi_2^{(m)}$. Из последних уравнений следует, что

$${}^{(m)}H_{\rho}^{(\pm)} = \pm \frac{i\gamma {}^{(m)}H_{z,\rho}^{(\pm)}}{\xi_{(m)}^2}, \quad \xi_{(m)}^2 = \gamma^2 - k_{(m)}^2 + i\omega\mu_2^{(m)}r_2^{(m)},$$

и

$$\rho^2 {}^{(m)}H_{z,\rho\rho}^{(\pm)} + \rho {}^{(m)}H_{z,\rho}^{(\pm)} - (\xi_{(m)}\rho)^2 {}^{(m)}H_z^{(\pm)} = 0 \forall \rho \in [\alpha_{m-1}, \alpha_m]. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) для областей $m = 1, 2$ имеет вид

$$\begin{aligned} {}^{(m)}H_z^{(\pm)}(\rho, \gamma) &= B_1^{(m)} I_0(\xi_{(m)}\rho) + B_2^{(m)} K_0(\xi_{(m)}\rho), \\ {}^{(m)}H_{\rho}^{(\pm)}(\rho, \gamma) &= \mp \frac{i\gamma}{\xi_{(m)}} [B_1^{(m)} I_1(\xi_{(m)}\rho) - B_2^{(m)} K_1(\xi_{(m)}\rho)]. \end{aligned} \quad (12)$$

где $I_v(z)$ и $K_v(z)$ - модифицированные цилиндрические функция порядка v . Решение уравнения (11) для области $m = 0$ выглядит следующим образом

$${}^{(0)}H_z^{(\pm)}(\rho, \gamma) = B_1^{(0)} I_0(\xi_{(0)}\rho), \quad {}^{(0)}H_{\rho}^{(\pm)}(\rho, \gamma) = \pm \frac{i\gamma}{\xi_{(0)}} B_1^{(0)} I_1(\xi_{(0)}\rho). \quad (13)$$

В состав решений (9), (12) и (13) входят константы $(A_2, B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, B_1^{(0)})$, которые определяются из стандартных граничных условий

$$\left. \begin{aligned} {}^{(m)}H_z^{(\pm)}(\rho, \gamma) - {}^{(m-1)}H_z^{(\pm)}(\rho, \gamma) &= 0 \forall \rho = \alpha_m, \\ \mu_2^{(m)} {}^{(m)}H_{\rho}^{(\pm)}(\rho, \gamma) - \mu_2^{(m-1)} {}^{(m-1)}H_{\rho}^{(\pm)}(\rho, \gamma) &= 0 \forall \rho = \alpha_m. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

При записи граничных условий (14) внешней области $\rho > \alpha_2$, в которой фурье-трансформанты компонентов вектора напряженности магнитного поля определены формулами (9), присвоен номер $m = 3$.

Граничные условия (14) образуют неоднородную линейную систему из шести алгебраических уравнений, которая разрешается относительно шести искомых констант единственным образом.

Практические вычисления констант более удобно производить на основе системы уравнений

$$\beta_{nm} \hat{C}_m = \hat{U}_n, \quad (n, m = 1, \dots, 6) \quad (15)$$

которая с достаточной очевидностью следует из системы уравнений (14) и в которой приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \left[\frac{\mu_2^{(2)}}{\xi_{(2)}\mu_0} I_1(\xi_{(2)}\alpha_2) + \frac{K_1(\gamma\alpha_2)}{K_0(\gamma\alpha_2)} I_0(\xi_{(2)}\alpha_2) \right]; \quad \beta_{13} = 0; \\ \beta_{12} &= \left[\frac{K_1(\gamma\alpha_2)}{K_0(\gamma\alpha_2)} K_0(\xi_{(2)}\alpha_2) - \frac{\mu_2^{(2)}}{\xi_{(2)}\mu_0} K_1(\xi_{(2)}\alpha_2) \right]; \quad \beta_{14} = \beta_{15} = 0; \quad \beta_{25} = 0; \quad \beta_{21} = I_0(\xi_{(2)}\alpha_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{22} &= K_0(\xi_{(2)}\alpha_1); \quad \beta_{23} = -I_0(\gamma\alpha_1); \quad \beta_{24} = -K_0(\gamma\alpha_1); \quad \beta_{31} = \frac{\gamma\mu_2^{(2)}}{\xi_{(2)}\mu_0} I_1(\xi_{(2)}\alpha_1); \quad \beta_{33} = -I_1(\gamma\alpha_1); \\ \beta_{32} &= -\frac{\gamma\mu_2^{(2)}}{\xi_{(2)}\mu_0} K_1(\xi_{(2)}\alpha_1); \quad \beta_{34} = K_1(\gamma\alpha_1); \quad \beta_{35} = 0; \quad \beta_{41} = \beta_{42} = 0; \quad \beta_{43} = I_0(\gamma\alpha_0); \quad \beta_{44} = K_0(\gamma\alpha_0); \\ \beta_{45} &= -I_0(\xi_{(0)}\alpha_0); \quad \beta_{51} = \beta_{52} = 0; \quad \beta_{53} = I_1(\gamma\alpha_0); \quad \beta_{54} = -K_1(\gamma\alpha_0); \quad \beta_{55} = -\frac{\gamma}{\xi_{(0)}} I_1(\xi_{(0)}\alpha_0); \\ B_1^{(2)} &= \frac{I^*N}{2\pi} W_k(\gamma)\hat{C}_1; \quad B_2^{(2)} = \frac{I^*N}{2\pi} W_k(\gamma)\hat{C}_2; \quad B_1^{(1)} = \frac{I^*N}{2\pi} W_k(\gamma)\hat{C}_3; \quad B_2^{(1)} = \frac{I^*N}{2\pi} W_k(\gamma)\hat{C}_4; \\ B_1^{(0)} &= \frac{I^*N}{2\pi} W_k(\gamma)\hat{C}_5; \quad \hat{U}_1 = -1/[(\gamma\alpha_2)K_0(\gamma\alpha_2)]; \quad \hat{U}_2 = \hat{U}_3 = \hat{U}_4 = \hat{U}_5 = 0. \end{aligned}$$

С учетом принятых обозначений выражение (3) можно представить в следующем виде $u_{\vartheta}^{(\pm)}(\rho, z) = \pm \Psi(\gamma)re^{\pm i\gamma z}$, где зависящий от частоты угол поворота плоского поперечного сечения $\Psi(\gamma) = \Psi_0 W_k(\gamma)W_c(\gamma)$. Параметр Ψ_0 имеет смысл статического угла поворота поперечных сечений полого цилиндра за пределами области нагружения и определяется по формуле $\Psi_0 = (m_1 - m_2)^0 I^* N \alpha_2^2 / [8\pi G(\alpha_2^4 - \alpha_1^4)]$. Для никелевой трубки с параметрами $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $\alpha_1/\alpha_2 = 0,5$; $I^0 = 1$ А; $I^* = 0,1$ А; $(m_1 - m_2) = 1,5$ Н/А² и $N = 30$ угол $\Psi_0 = 4,83 \cdot 10^{-7}$ рад или $0,1''$. Зависящая от частоты функция $W_c(\gamma)$, которая учитывает влияние намагничивающегося тела на характер распределения переменного магнитного поля катушки рассчитывается по формуле

$$W_c(\gamma) = \frac{1}{\xi_{(2)}\alpha_2} \left\{ \frac{\Delta_1(\beta_{mn})}{\Delta_0(\beta_{mn})} \left[I_1(\xi_{(2)}\alpha_2) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} I_1(\xi_{(2)}\alpha_1) \right] + \frac{\Delta_2(\beta_{mn})}{\Delta_0(\beta_{mn})} \left[K_1(\xi_{(2)}\alpha_2) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} K_1(\xi_{(2)}\alpha_1) \right] \right\},$$

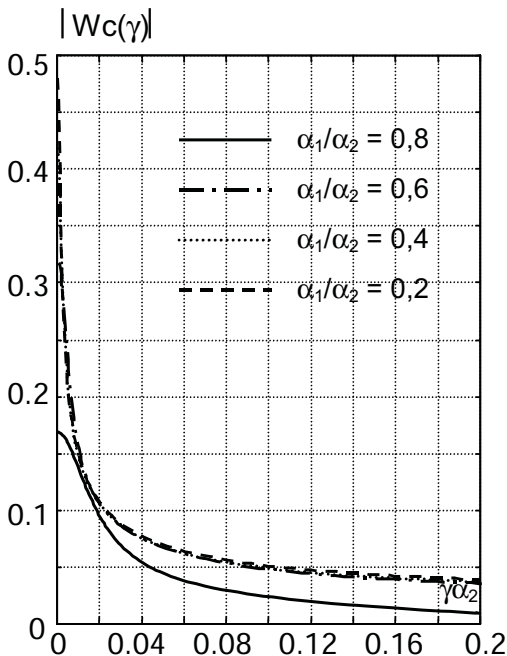


Рис. 3.

в которой символом $\Delta_0(\beta_{mn})$ обозначен определитель системы уравнений (40), а величины $\Delta_k(\beta_{mn})$ - суть алгебраические дополнения при коэффициентах \hat{C}_k . Графики модуля функции $W_c(\gamma)$ для никелевой трубки с внешним радиусом $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м, на оси которой находится медный проводник диаметра $0,6\alpha_2$, показаны на рис. 3. Необходимо отметить, что на характер частотно-зависимого изменения функции $W_c(\gamma)$ оказывает влияние параметр α_1/α_2 , т. е. толщина стенок и практически никакого влияния не оказывает относительный размер проводника с током, т. е. величина α_0/α_2 , которая в ходе вычислений была принята равной 0,3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрищев О. Н. Возбуждение магнитным полем крутильных колебаний в магнитоэластических цилиндрах // Акустика и ультразвуковая техника. 1985. Вып. 20. С. 64 –69.
2. Гринченко В. Т., Петрищев О. Н. Возбуждение внешним магнитным полем упругих колебаний в продольно поляризованной магнитоэластической полосе // Прикл. механика. 1986. 22. №7. С. 60 –65.