К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТАНОВИВШИХСЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

Папков С.О., к. ф.-м. н., Чехов В.Н.*, д. ф.-м. н.

Севастопольский национальный технический университет

Таврический национальный университет*

Предлагается новый достаточный признак существования ограниченного решения для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, который позволяет с требуемой точностью локализовать резонансные частоты при установившихся вынужденных колебаниях упругой прямоугольной призмы. Строится зависимость первых трех собственных значений от отношения сторон призмы для двух типов симметрии нагрузки: симметричного и антисимметричного по координатным осям.

1. ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении динамических задач теории упругости наряду с изучением характеристик напряженно-деформированного состояния (НДС) значительный интерес представляет построение собственных частот и соответствующих им форм колебаний. В настоящий момент имеется решение данной проблемы только для ряда канонических тел. Для полупространства, бесконечного слоя и бесконечного цилиндра точные значения резонансных частот определяются из трансцендентных дисперсионных уравнений, которые удается получить с помощью нормальных мод. Однако уже для простейших конечных тел отражение упругих волн от границ представляет собой довольно сложный процесс, что приводит к трудностям при отыскании нормальных колебаний и определении собственных частот.

Обзор исследований установившихся колебаний в постановке плоской задачи теории упругости и эффективный метод решения динамических краевых задач для призмы прямоугольного поперечного сечения представлены в монографии Гринченко В.Т., Мелешко В.В. [1]. Краевая задача приводится к оценкам ограниченных решений парной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, которые определяются численным методом улучшенной редукции. Анализ характеристик НДС на основе решения соответствующей краевой задачи дает возможность исследовать проблему собственных значений.

Ниже предлагается иной подход к построению спектра в задаче об установившихся вынужденных колебаниях призмы на основе анализа существования ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СООТВЕТСВУЮЩИЕ БЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания прямоугольной призмы (рис.1) под действием нагрузки двух типов симметрии: симметричной и антисимметричной по координатным осям.

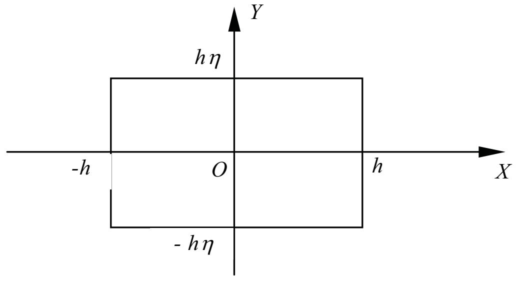

Рис. 1. Сечение призмы

Как известно, состояние упругой среды, занимающей некоторую область, описывается векторным уравнением Ламе:

$$\Delta\vec{\mathbf{u}} + \frac{1}{1-2\nu} grad\ div\ \vec{\mathbf{u}} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(grad\ \vec{\mathbf{u}} + (grad\ \vec{\mathbf{u}})^T); \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} div\ \vec{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{E}} + 2G\hat{\varepsilon},$$

где ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала; G – модуль сдвига; $\hat{\mathbf{E}}$ – единичный тензор второго ранга.

Перейдем к безразмерным координатам $x = X/h; \quad y = Y/h$. В данных координатах сформулируем вторую основную граничную задачу для призмы:

$$\frac{1}{2G}\sigma_{xx}\bigg|_{x=\pm 1} = f(y)\cdot e^{-i\omega t};\ \frac{1}{2G}\tau_{xy}\bigg|_{x=\pm 1} = 0;$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_{yy}\bigg|_{y=\pm\eta} = g(x)\cdot e^{-i\omega t};\ \frac{1}{2G}\tau_{xy}\bigg|_{y=\pm\eta} = 0. \tag{2}$$

В случае симметричного по осям напряженно-деформированного состояния функции $f(y)$ и $g(x)$ полагаются четными. В случае антисимметричного НДС данные функции – нечетные.

Следуя [1], строим общее решение $\vec{\mathbf{u}} = \{u(x,y)\vec{i} + v(x,y)\vec{j}\}e^{-i\omega t}$ уравнений Ламе (1) для прямоугольной области в виде суммы общих решений для полос $x\in[-1;1]$ и $y\in[-\eta;\eta]$ в зависимости от типа симметрии.

Для симметричного по координатным осям НДС:

$$u(x,y) = C_0\sin\Omega_1 x - \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\frac{\alpha_n}{p_{1,n}}ch p_{1,n}y + B_n\frac{p_{2,n}}{\alpha_n}ch p_{2,n}y)\sin\alpha_n x + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n sh q_{1,n}x + D_n sh q_{2,n}x)\cos\beta_n y;$$

$$v(x,y) = A_0\sin\Omega_1 y + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n sh\, p_{1,n}y + B_n sh\, p_{2,n}y)\cos\alpha_n x - \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\frac{\beta_n}{q_{1,n}}ch q_{1,n}x + D_n\frac{q_{2,n}}{\beta_n}ch q_{2,n}x)\sin\beta_n y,$$

где $\alpha_n = \pi n$, $\beta_n = \dfrac{\pi n}{\eta}$.

Для антисимметричного состояния:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n ch q_{1,n}x + B_n ch q_{2,n}x)\sin\beta_n y + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\frac{\alpha_n}{p_{1,n}}sh p_{1,n}y + D_n\frac{p_{2,n}}{\alpha_n}sh p_{2,n}y)\cos\alpha_n x;$$

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\frac{\beta_n}{q_{1,n}}sh q_{1,n}x + B_n\frac{q_{2,n}}{\beta_n}sh q_{2,n}x)\cos\beta_n y + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n ch\, p_{1,n}y + D_n ch\, p_{2,n}x)\sin\alpha_n x,$$

где $\alpha_n = \dfrac{2n-1}{2}\pi$, $\beta_n = \dfrac{2n-1}{2\eta}\pi$.

В обоих случаях симметрии $q_{l,n}^2 = \beta_n^2 - \Omega_l^2;\ p_{l,n}^2 = \alpha_n^2 - \Omega_l^2$ (l=1,2); $\Omega_1 = \dfrac{\omega h}{c_1};\ \Omega_2 = \dfrac{\omega h}{c_2}$ (обезразмеренные частоты); $c_1 = \sqrt{\dfrac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$ – скорость продольной волны; $c_2 = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ – скорость сдвиговой волны.

Форма общего решения такова, что граничные условия на касательные напряжения удается выполнить точно, граничные условия на нормальные напряжения приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов из общих решений. Процедура сведения граничной задачи представленного типа к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений подробно рассмотрена в работах [1], [2]. Опуская промежуточные вычисления, запишем бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для двух рассмотренных типов симметрии НДС.

Для симметричного по координатным осям НДС:

$$\begin{cases} \dfrac{\nu}{1-2\nu}\dfrac{\sin\Omega_1\eta}{\eta}A_0 + \dfrac{1-\nu}{1-2\nu}\Omega_1\cos\Omega_1 C_0 = \dfrac{\nu\Omega_1^2\Omega_2^2}{2(1-2\nu)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{\alpha_n^2 p_{1,n}^2} + f_0, \\ \dfrac{1-\nu}{1-2\nu}\Omega_1\cos(\Omega_1\eta)A_0 + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\sin\Omega_1 C_0 = \dfrac{\nu\Omega_1^2\Omega_2^2}{2(1-2\nu)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y_n}{\beta_n^2 q_{1,n}^2} + g_0, \\ x_m = -\dfrac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)\Delta_m}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\beta_n^2+p_{1,m}^2}\left(\dfrac{2\alpha_m^2}{\beta_n^2+p_{2,m}^2} - \dfrac{\nu\Omega_2^2}{\beta_n^2}\right)y_n + \dfrac{2\nu\Omega_1^2\sin\Omega_1}{(1-2\nu)\Delta_m p_{1,m}^2}C_0 + \dfrac{g_m}{\Delta_m}, \\ y_m = -\dfrac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)\Delta_m^*}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha_n^2+q_{1,m}^2}\left(\dfrac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2+q_{2,m}^2} - \dfrac{\nu\Omega_2^2}{\alpha_n^2}\right)x_n + \dfrac{2\nu\Omega_1^2\sin\Omega_1\eta}{(1-2\nu)\eta\Delta_m^* q_{1,m}^2}A_0 + \dfrac{f_m}{\Delta_m^*}, \end{cases} \tag{3}$$

$m = 1, 2, \ldots$

где $x_m = \dfrac{(-1)^m \operatorname{sh} p_{2,m}\eta}{\eta}B_m; y_m = (-1)^m \operatorname{sh} q_{2,m} D_m$; $\Delta_m = \eta\left(p_{2,m}\operatorname{cth} p_{2,m}\eta - \dfrac{(\alpha_m^2+p_{2,m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1,m}}\operatorname{cth} p_{1,m}\eta\right)$;

$\Delta_m^* = q_{2,m}\operatorname{cth} q_{2,m} - \dfrac{(\beta_m^2+q_{2,m}^2)^2}{4\beta_m^2 q_{1,m}}\operatorname{cth} q_{1,m}$. Здесь величины f_m, g_m есть коэффициенты разложения в ряд Фурье для функций, задающих нагрузку на гранях призмы:

$$f(y) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m f_m\cos\beta_m y;\ g(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m g_m\cos\alpha_m x.$$

Для антисимметричного состояния:

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)\Delta_m^1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha_n^2+q_{1,m}^2}\left(\dfrac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2+q_{2,m}^2} - \dfrac{\nu\Omega_2^2}{\alpha_n^2}\right)y_n + \dfrac{f_m}{\Delta_m^1}; \\ y_m = \dfrac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)\Delta_m^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\beta_n^2+p_{1,m}^2}\left(\dfrac{2\alpha_m^2}{\beta_n^2+p_{2,m}^2} - \dfrac{\nu\Omega_2^2}{\beta_n^2}\right)x_n - \dfrac{g_m}{\Delta_m^2}, \end{cases} \tag{4}$$

$m = 1, 2, \ldots$

где $x_m = (-1)^m \operatorname{ch} q_{2,m} B_m; y_m = \dfrac{(-1)^m \operatorname{ch} p_{2,m}\eta}{\eta}D_m$; $\Delta_m^1 = q_{2,m}\operatorname{th} q_{2,m} - \dfrac{(\beta_m^2+q_{2,m}^2)^2}{4\beta_m^2 q_{1,m}}\operatorname{th} q_{1,m}$;

$\Delta_m^2 = \eta\left(p_{2,m}\operatorname{th} p_{2,m}\eta - \dfrac{(\alpha_m^2+p_{2,m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1,m}}\operatorname{th} p_{1,m}\eta\right)$. Аналогично симметричному случаю, величины f_m, g_m есть коэффициенты разложения в ряд Фурье для функций, задающих нагрузку на гранях призмы: $f(y) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^m f_m\sin\beta_m y;\ g(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^m g_m\sin\alpha_m x$.

3. ПРЕДЛОЖЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ

В работе [2] проводится анализ асимптотических свойств неизвестных в системе (3), показывающий существование ограниченного решения бесконечной системы на частотах, не совпадающих с собственными, которое подчиняется следующему асимптотическому закону:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\lim_{n\to\infty} y_n = a_0 \,. \qquad (5)$$

Использование асимптотического закона (5) позволяет построить эффективный численный алгоритм решения бесконечной системы, на основе которого исследуется [1] спектр краевой задачи. При этом критерием близости собственной частоты Ω^* служит [1] возрастание компонент тензора напряжений. При переходе через Ω^* изменяются фазы всех характеристик НДС. Точность локализации частоты резонанса оказывается напрямую связанной с точностью решения бесконечной системы. Учитывая, что вблизи резонанса решение бесконечной системы (3) неограниченно возрастает (как следствие неограниченно возрастают компоненты тензора напряжений), приходится увеличивать порядок конечной системы линейных алгебраических уравнений в методе улучшенной редукции, чтобы сохранить требуемую точность выполнения граничных условий. В силу чего использование данного подхода сопряжено с большим объемом вычислений.

Известно [2], что система (3) является квазирегулярной при любом значении частоты вынужденных колебаний, отличном от резонансного.

Бесконечная система

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n} x_n + b_k \quad \left(k = 1,\ 2,\ 3,\ldots\right) \qquad (6)$$

относительно последовательности $\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...\}$ называется квазирегулярной, если её коэффициенты и свободные члены удовлетворяют условиям [3]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{k,n}\right| < 1 \ \ (k = N^* + 1,\ N^* + 2,...), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{k,n}\right| < +\infty \ \ (k = \overline{1,\ N^*});$$

$$\left|b_k\right| < B_0\, \rho_k^* \ \ (k = N^* + 1,\ N^* + 2,...), \left(\rho_k^* = 1 - \sum_{n=N^*+1}^{\infty}\left|c_{k,n}\right|\right),$$

где N^* – некоторое натуральное число; B_0 – положительное число.

Факт существования ограниченного решения системы всюду, кроме резонансных частот, приводит к идее отыскания эффективного достаточного признака существования ограниченного решения квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, который позволил бы упростить процедуру отыскания собственных значений.

В монографии [3] доказано, что условием существования ограниченного решения бесконечной системы (6) является существование решения конечной системы порядка N^*, которая строится с помощью замены переменных:

$$x_k = z_k^{(0)} + \sum_{j=1}^{N^*} z_k^{(j)} x_j, \quad (k > N^*)\,.$$

Тогда бесконечная система (6) может быть сведена к совокупности регулярных бесконечных систем относительно $\{z_k^{(j)}\}_{k=N^*+1}^{\infty}$ ($j = 1,2,...,N^*$) с одинаковыми матрицами:

$$\left[\begin{array}{l} z_k^{(0)} = \displaystyle\sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} z_n^{(0)} + b_k, \\ z_k^{(j)} = \displaystyle\sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} z_n^{(j)} + c_{k,j}, \end{array}\right. \quad (k \ge N^* + 1,\ j = 1,2,...,N^*) \qquad (7)$$

Причем при соответствующих условиях на $\{b_k\}$ каждая из регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (7) имеет ограниченное (главное) решение, и вопрос о существовании ограниченного решения для квазирегулярной системы (6) эквивалентен вопросу существования решения конечной системы относительно первых $\{x_k\}_{k=1}^{N^*}$, которую можно получить, подставив (7) в (6) при $k = 1,2,\ldots,N^*$:

$$x_k = \sum_{j=1}^{N^*}[c_{k,j} + \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} z_n^{(j)}]x_j + \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} z_n^{(0)} + b_k \ . \qquad (8)$$

Таким образом, для бесконечных систем (3), (4) равенство нулю определителя конечной системы типа (8) дает дисперсионное уравнение для определения собственных частот. Использование данного подхода для определения спектра практически эквивалентно расчетной схеме с использованием характеристик НДС, хотя и обладает следующим преимуществом – ограниченные решения регулярных систем (7) существуют на всем диапазоне частот. При этом неизвестные в системах (7) подчинены тому же асимптотическому закону, что и решение исходной квазирегулярной системы, что в свою очередь дает возможность для их эффективного вычисления.

В ходе анализа квазирегулярных систем типа (3), (4) было замечено, что явное исключение нескольких неизвестных из бесконечной системы приводит к «улучшению» регулярности, как правило, условия регулярности начинают выполняться с более раннего номера N. Как обобщение данного факта предлагается следующая теорема.

ТЕОРЕМА Для бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (6) существует ограниченное решение $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ если коэффициенты и свободные члены системы подчинены следующим условиям:

а) $$\left\|(\mathbf{I}_N - C_N)^{-1}\vec{\mathrm{P}}_N\right\|_\infty < 1 + \inf_{k>N} \frac{\rho_k}{\sum_{n=1}^{N}|c_{kn}|};$$ ***б***) $$\sup_{k>N} \frac{|b_k|}{\sum_{n=1}^{N}|c_{kn}|} < \infty,$$

где $C_N = \left\|c_{k,n}\right\|_{k,n=1}^{N}$ - матрица, содержащая первых N строк и столбцов бесконечной матрицы системы (6), I_N – единичная матрица, $\vec{P}_N = \left\{1 - \rho_i - \sum_{n=1}^{N}|c_{in}|\right\}_{i=1}^{N}$, $\rho_k = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}|c_{k,n}|$, $\left\|\vec{a}\right\|_\infty = \max_j a_j$.

Отметим, что в оценки (*а*), (*б*) теоремы входит параметр N. Выполнение условий предложенной теоремы при некотором значении N соответствует тому, что после исключения первых N неизвестных из бесконечной системы (6) получается регулярная бесконечная система, и для нее выполняется теорема существования ограниченного решения [4].

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве приложения сформулированной теоремы рассмотрим бесконечные системы (3), (4). Для фиксированного значения отношения сторон призмы η проверялись условия предложенной выше теоремы при изменении частоты с малым шагом $\Delta\Omega = 0{,}001$ (здесь $\Omega = \frac{2}{\pi}\frac{\omega h}{c_2}$). При невыполнении условий теоремы на некотором интервале изменения Ω увеличиваем значение параметра N в оценках (*а*), (*б*) с тем, чтобы уменьшить величину интервала до тех пор, пока значение резонанса не будет локализовано с требуемой точностью. Так как предложенная теорема дает только достаточные условия существования ограниченного решения, то требуется проверить наличие резонанса на локализованной частоте путем проверки характеристик НДС или вычислением определителя системы (8), который на собственной частоте обращается в нуль.

Задача об отыскании спектра и собственных форм колебаний в случае симметричного НДС имеет точные решения при некоторых значениях параметра η - моды Ламе. Так при $\eta_L = \frac{2n-1}{2m-1}$ $(n, m \in \mathbf{N})$, собственные значения, отвечающие модам Ламе имеют вид

$\Omega_L^m = \sqrt{2}(2m-1)$. При значении ν = 0,17 (плавленый кварц) и η=1 значение первой собственной частоты равно $\Omega_L^1 = \sqrt{2} = 1{,}41421...$. В таблице 1 показано как увеличением параметра N удается локализовать данную частоту.

Табл. 1. Локализация первой собственной частоты при ν = 0,17, η=1.

N	1	2	5	10	20	50
Интервал для Ω^1	(1,412 – 1, 428)	(1, 413 – 1, 423)	(1, 413 – 1,418)	(1,414 – 1,416)	(1,414 – 1,4148)	(1,41419 – 1,41432)

Отметим также, что объем вычислений, который требуется для использования данного подхода оказывается гораздо меньше, чем при использовании классического подхода с расчетом характеристик НДС.

Для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (3), (4) указанным способом были рассчитаны первые три собственные частоты в зависимости от η при ν=0,17 (рис.2). Так как собственные значения зависят только от типа симметрии, для собственных частот в рассмотренных краевых задачах (2) следует соотношение

$$\Omega^*(1/\eta) = \eta\Omega^*(\eta).$$

Поэтому на рис.2. геометрический параметр меняется от 1. Для удобства сравнения с результатами, представленными в [1], геометрию прямоугольника характеризует параметр $L = 1/\eta$. Рисунок (*а*) качественно повторяет картину спектра, представленного в работе [1] для ν = 0,248, количественные оценки здесь также близки. Так краевой резонанс для обоих значений коэффициента Пуассона достигается в районе L = 3.

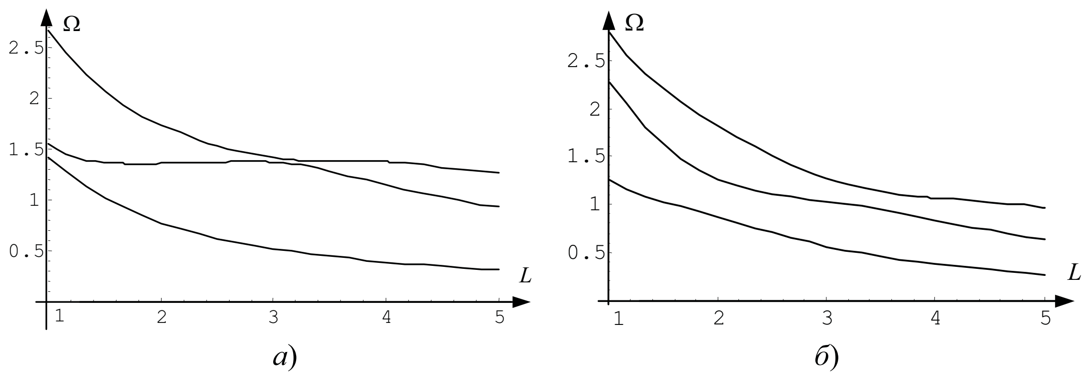

Рис.2. Зависимость первых трех собственных частот призмы от отношения ее сторон (а – случай симметричного НДС, б – случай антисимметричного НДС).

5. ВЫВОДЫ

Применение сформулированного достаточного признака существования ограниченного решения квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений для определения собственных частот прямоугольной призмы достаточно эффективно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. Думка, 1978. – 264 с.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – 4-е изд. - М.;Л.: Гостехиздат, 1952. – 695 с.
4. Папков С.О., Чехов В.Н. О достаточных условиях существования решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений // Доповіді НАН України. - 2001. - №1 - С. 28-32.