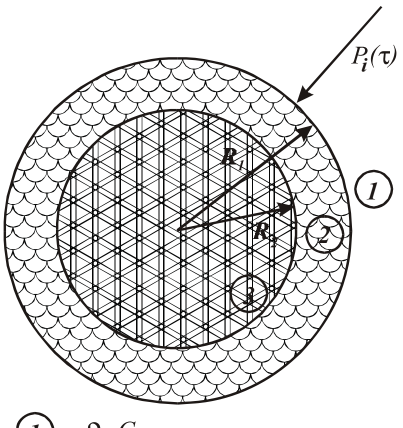
# ВИПРОМІНЮВАННЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ СФЕРИЧНИМ ОБ'ЄКТОМ ІЗ В'ЯЗКОПРУЖНИМ ПОКРИТТЯМ.

Онищук В.Я., Сулим Г.Т.

Львівський національний університет ім. І. Франка.

Питанню про взаємодію акустичного середовища із в'язкопружним об'єктом сферичної або циліндричної форми присвячено низку робіт.У випадку гармонійної часової залежності в роботі [1] було розглянуто задачу про взаємодію плоскої хвилі, яка падає паралельно до осі циліндра, з зануренним в ідеальну рідину пружним циліндром із в'язкопружним покриттям. Взаємодія плоскої хвилі зі сферичною порожниною у в'язкопружному середовищі в усталеному режимі описана в праці [2]. У публікації [3] досліджено проходження акустичних хвиль через занурену в рідину в'язкопружну сферичну оболонку із натуральної гуми або пластичного полівінілу.

В цій роботі з використаням інтегрального перетворення Фур'є за часом і розділення зміних за кутовими і радіальною координатами розв'язана нестаціонарна задача про випромінювання акустичних хвиль пружною сферою із в'язкопружним покриттям, яка занурена в безмежну ідеально-стисливу рідину і піддана дії зосередженого силового імпульса скінченої тривалості. Розв'язок подано у вигляді рядів за тессеральними сферичними функціями. Обернене перетворення пропонується здійснювати методом числового інтегрування Ромберга. Важливість цієї тематики полягає в тому, що у багатьох випадках для зменшення випромінювання тіла доцільно покривати в'язкопружним матеріалом. Тому важливо дослідити вплив покриття на акустичне поле.




1 $\rho_1, C_1$

2 $\rho_2, \lambda_{e_2}, \lambda_{\nu_2}, \mu_{e_2}, \mu_{\nu_2}$

3 $\rho_3, \lambda_{\nu_3}, \mu_{e_3}$

На пружний сферичний об'єкт із в'язкопружним покриттям, зануреним в безмежну ідеальну стисливу рідину, діє зосереджений силовий імпульс скінченної тривалості інтенсивністю

$$p_i = p_0 f(\tau)\frac{\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{\sin\theta}\left[H(\tau)-H(\tau-\tau_0)\right] \qquad (1)$$

де $\tau = C_1 t/R_1$, $\tau_0 = C_1 t_0/R_1$; $p_i$ – тиск, викликаний зосередженим імпульсом; $p_0$ – постійна, яка має розмірність тиску; $f(\tau)$ – функція, що визначає закон зміни тиску в імпульсі; $H(\tau)$ – одинична функція Хевісайда; $\delta(\theta)$ – функція Дірака; $R$, $\theta$, $\varphi$ – сферичні координати; $t$ – час; $t_0$ – тривалість імпульсу; $R_1$ – радіус в'язкопружного покриття; $C_1$ – швидкість звуку в акустичному середовищі.

Рівняння лінійної динамічної в'язкопружності в переміщеннях з використанням моделі в'язкопружності Кельвіна-Фойхта мають вигляд [1]:

$$\left(1+\frac{\mu_{\nu_2}}{\mu_{e_2}}\frac{C_1}{R_1}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\nabla^2\vec{u}^{(2)}+\left(\frac{\lambda_{e_2}+\mu_{e_2}}{\mu_{e_2}}\right)\left(1+\frac{\lambda_{\nu_2}+\mu_{\nu_2}}{\lambda_{e_2}+\mu_{e_2}}\frac{C_1}{R_1}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{(2)}\right)=\frac{C_1^2}{C_{s_2}^2}\frac{\partial^2\vec{u}^{(2)}}{\partial\tau^2}, \qquad (2)$$

де $\lambda_{e_2}$, $\mu_{e_2}$ – пружні сталі Ламе; $\lambda_{\nu_2}$, $\mu_{\nu_2}$ – їх в'язкі відповідники; $C_{s_2} = \left(\mu_{e_2}/\rho_2\right)^{1/2}$ – поперечна швидкість; $\rho_2$ – густина покриття; $\vec{u}^{(2)}$ – вектор переміщення, віднесений до $R_1$; $\vec{\nabla}$ – безрозмірний набла-оператор. Тут і надалі індекс 1 стосується зовнішнього акустичного середовища, 2 – в'язкопружного покриття, 3 – пружного об'єкту.

Рух ізотропного пружного тіла описується рівняннями:

$$\beta_1^2\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{(3)}\right)-\beta_2^2\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}^{(3)}\right)=\frac{\partial^2\vec{u}^{(3)}}{\partial\tau^2}, \qquad (3)$$

$\beta_1 = C_{d_3}/C_1$, $\beta_2 = C_{s_3}/C_1$, $C_{d_3} = \left[\left(\lambda_{e_3} + 2\mu_{e_3}\right)/\rho_3\right]^{1/2}$, $C_{s_3} = \left(\mu_{e3}/\rho_3\right)^{1/2}$, $\rho_3$ – густина матеріалу.

Подання вектора пружного переміщення $\vec{u}^{(3)}$ у вигляді

$$\vec{u}^{(3)} = \vec{\nabla}\phi_3 + \vec{\nabla}\times\vec{\psi}_3\,, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\psi}_3 = 0 \tag{4}$$

зводить рівняння руху (3) до

$$\nabla^2\phi_3 = \frac{1}{\beta_1^2}\frac{\partial^2\phi_3}{\partial\tau^2}\,, \quad \nabla^2\vec{\psi}_3 = \frac{1}{\beta_2^2}\frac{\partial^2\vec{\psi}_3}{\partial\tau^2}\,. \tag{5}$$

Потенціал переміщень $\Phi_1$ для акустичного середовища задовольняє рівнянню

$$\nabla^2\phi_1 = \frac{\partial^2\phi_1}{\partial\tau^2}\,. \tag{6}$$

Вектор переміщень $\vec{u}^{(1)}$ і тиск $p_1$ визначаються за формулами

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{\nabla}\phi_1\,, \; p_1 = -\rho_1 C_1^2\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\tau^2}\,. \tag{7}$$

Визначення нестаціонарного випроміненого звукового поля полягає в інтегруванні рівнянь (2), (5) і (6) за таких умов:

- початкові умови нульові;
- умова випромінювання при $r = R/R_1 \to \infty$ -

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\phi_1 = 0\,; \tag{8}$$

- умови контакту на поверхні $r = 1$ -

$$\sigma_{rr}^{(2)} + p_i + p_1 = 0\,, \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} = \sigma_{r\phi}^{(2)} = 0\,, \; u_r^{(2)} - u_r^{(1)} = 0\,; \tag{9}$$

- умови контакту на поверхні $r = r_2 = R_2/R_1$ -

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_{rr}^{(3)}\,, \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} = \sigma_{r\theta}^{(3)}\,, \; \sigma_{r\phi}^{(2)} = \sigma_{r\phi}^{(3)}\,, \; u_r^{(2)} = u_r^{(3)}\,, \quad u_\theta^{(2)} = u_\theta^{(3)}\,, \; u_\phi^{(2)} = u_\phi^{(3)}\,; \tag{10}$$

- умова обмеженості розв’язку в початку координат, при $r \to 0$.

Припускаємо, що розглядувані функції набувають скінченних значень в областях, де вони визначені.

Застосовуючи інтегральне перетворення Фур’є за часом або приймаючи гармонійну часову залежність $e^{-i\omega\tau}$ з таким вибором $\varphi_2$ і $\vec{\psi}_2$, що

$$\vec{u}^{(2)} = \vec{\nabla}\phi_2 + \vec{\nabla}\times\vec{\psi}_2\,, \; \vec{\nabla}\cdot\vec{\psi}_2 = 0\,, \tag{11}$$

рівняння (2) заміниться рівняннями Гельмгольца

$$\left(\nabla^2 + k_{d_2}^2\right)\phi_2 = 0\,, \quad \left(\nabla^2 + k_{s_2}^2\right)\vec{\psi}_2 = 0\,, \tag{12}$$

$$k_{d_2}^2 = C_1^2\omega^2/C_{d_2}^2\left(1 - i\omega\frac{C_1}{R_1}M\right), \quad k_{s_2}^2 = C_1^2\omega^2/C_{s_2}^2\left(1 - i\omega\frac{C_1}{R_1}N\right),$$

$$M = \left(\lambda_{v_2} + 2\mu_{v_2}\right)/\left(\lambda_{e_2} + 2\mu_{e_2}\right), N = \mu_{v_2}/\mu_{e_2}\,,$$

де $C_{d_2}^2 = \left(\lambda_{e_2} + 2\mu_{e_2}\right)/\rho_2$ – повздовжня швидкість.

Для розв’язку рівнянь (12) подамо $\vec{u}^{(2)}$ у вигляді:

$$\vec{u}^{(2)} = a_1\vec{\nabla}\phi_2 + a_2\vec{\nabla}\times\left(\vec{i}_r r\psi_2^{(1)}\right) + a_3\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\left(\vec{i}_r r\psi_2^{(2)}\right)\right), \tag{13}$$

де $a_1$, $a_2$, $a_3$ – довільні сталі, $\vec{i}_r$ – одиничний вектор в радіальному напрямку. Кожна із скалярних функцій $\psi_2^{(j)}$ $(j = 1,2)$ задовольняє одному і тому ж рівнянню

$$\left(\nabla^2 + k_{s_2}^2\right)\psi_2 = 0. \tag{14}$$

Аналогічно для пружного ізотропного тіла

$$\vec{u}^{(3)} = b_1\vec{\nabla}\phi_3 + b_2\vec{\nabla}\times\left(\vec{i}_r r\psi_3^{(1)}\right) + b_3\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\left(\vec{i}_r r\psi_3^{(2)}\right)\right), \tag{15}$$

де $b_1$, $b_2$, $b_3$ – довільні сталі, а $\psi_3^{(j)}$ $(j = 1,2)$ задовольняють одному і тому ж рівнянню

$$\left(\nabla^2 + \omega_2^2\right)\psi_3 = 0, \quad \omega_2^2 = \omega^2 / \beta_2^2 \tag{16}$$

а $\phi_3$ - рівнянню

$$\left(\nabla^2 + \omega_1^2\right)\phi_3 = 0, \quad \omega_1^2 = \omega^2 / \beta_1^2 \tag{17}$$

У просторі зображень Фур'є (чи гармонійного випадку) хвильове рівняння для зовнішнього акустичного середовища та умова випромінювання набувають вигляду

$$\left(\nabla^2 + \omega^2\right)\phi_1 = 0: \tag{18}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega\right)\phi_1 = 0. \tag{19}$$

У випадку осьової симетрії з (12) маємо:

$$\left(\nabla^2 + k_{d_2}^2\right)\phi_2 = 0, \qquad \left(\nabla^2 + k_{s_2}^2\right)\psi_2 = 0 \tag{20}$$

Переміщення і напруження задаються співвідношеннями [2]

$$u_r^{(2)} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\phi_2 + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi_2)\right] + k_{s_2}^2 r\psi_2, \quad u_\theta^{(2)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\phi_2 + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi_2)\right]; \tag{21}$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = -\left(\lambda_{e_2} - i\omega\frac{C_1}{R_1}\lambda_{v_2}\right)k_{d_2}^2\phi_2 + 2\left(\mu_{e_2} - i\omega\frac{C_1}{R_1}\mu_{v_2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\phi_2 + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi_2)\right] + k_{s_2}^2\frac{\partial}{\partial r}(r\psi_2)\right),$$

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} = -\left(\mu_{e_2} - i\omega\frac{C_1}{R_1}\mu_{v_2}\right)\left[2\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\phi_2 + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\psi_2)\right)\right] + k_{s_2}^2\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}\right]. \tag{22}$$

Для знаходження розв'язку поставленої задачі застосовуємо інтегральне перетворення Фур'є за часом (або приймемо гармонійну часову залежність $e^{-i\omega\tau}$) і, розклавши дельта-функцію в ряд по тессеральних сферичних функціях, подамо зосереджений імпульс (1) у вигляді:

$$p_i = p_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Phi_n^m(\theta,\varphi), \tag{23}$$

де $\Phi_m^m(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)[a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi]$, $a_{nm} = f^F(\omega)A_{nm}$, $b_{nm} = f^F(\omega)B_{nm}$; $\omega$ – параметр перетворення Фур'є, або кругова частота при гармонійній залежності; $f^F(\omega)$ - зображення Фур'є від $f(\tau)[H(\tau) - H(\tau-\tau_0)]$; $A_{nm}$, $B_{nm}$ – коефіцієнти розкладу дельта-функції в ряд за тессеральними функціями.

Розв'язок рівняння (18), який задовольняє умову (19), шукаємо у вигляді безмежного ряду

$$\frac{E}{1+\nu}\phi_1 = p_0\sum_{n=0}^{\infty}h_n(\omega r)x_n(\omega)\sum_{m=0}^{\infty}\Phi_n^m(\theta,\varphi), \tag{24}$$

де $h_n(\omega r)$ – сферична функція Ханкеля першого роду; $x_n(\omega)$ – шукані коефіцієнти.

Розв'язки рівнянь (20) запишемо у вигляді

$$\frac{E}{1+\nu}\phi_2 = p_0\sum_{n=0}^{\infty}Y_n\left(k_{d_2}r\right)\sum_{m=0}^{\infty}\Phi_n^m(\theta,\varphi); \tag{25}$$

$$\frac{E}{1+\nu}\psi_2 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(k_{s_2} r) \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_n^m(\theta,\varphi), \tag{26}$$

$$Y_n(k_{d_2} r) = C_{1n} j_n(k_{d_2} r) + D_{1n} n_n(k_{d_2} r), \quad Y_n(k_{s_2} r) = C_{2n} j_n(k_{s_2} r) + D_{2n} n_n(k_{s_2} r).$$

Тут $j_n(z)$, $n_n(z)$ – сферичні функції Бесселя і Неймана відповідно; $C_{in}$, $D_{in}$ $(i=1,2)$ – довільні сталі.

Обмежені при $r \to 0$ загальні розв’язки рівнянь (16) і (17) шукаємо у вигляді рядів

$$\frac{E}{1+\nu}\phi_3 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\omega_1 r) \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_n^m(\theta,\varphi); \tag{27}$$

$$\frac{E}{1+\nu}\psi_3 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\omega_2 r) \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_n^m(\theta,\varphi), \tag{28}$$

$Z_n(\omega_i r) = B_{in} j_n(\omega_i r)$, $(i=1,2)$, $j_n(\omega_i r)$ – сферична функція Бесселя, $B_{in}$ – довільні сталі.

У випадку осьової симетрії, покладаючи в (23), (24), (25), (26), (27) і (28) $m=0$, знаходимо:

$$p_i = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n0} P_n(\cos\theta), \quad a_{n0} = A_{n0} f^F(\omega); \tag{29}$$

$$\frac{E}{1+\nu}\phi_1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\omega r) x_n(\omega) a_{n0} P_n(\cos\theta); \tag{30}$$

$$\frac{E}{1+\nu}\phi_2 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(k_{d_2} r) a_{n0} P_n(\cos\theta); \tag{31}$$

$$\frac{E}{1+\nu}\psi_2 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(k_{s_2} r) a_{n0} P_n(\cos\theta); \tag{32}$$

$$\frac{E}{1+\nu}\phi_3 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\omega_1 r) a_{n0} P_n(\cos\theta); \tag{33}$$

$$\frac{E}{1+\nu}\psi_3 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\omega_2 r) a_{n0} P_n(\cos\theta). \tag{34}$$

Переміщення і напруження у в’язкопружному покритті такі:

$$\frac{E}{1+\nu}\frac{u_r^{(2)}}{p_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dY_n(k_{d_2} r)}{dr} a_{n0} P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} r\left[\frac{d^2 Y_n(k_{s_2} r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dY_n(k_{s_2} r)}{dr} + k_{s_2}^2 Y_n(k_{s_2} r)\right] a_{n0} P_n(\cos\theta); \tag{35}$$

$$\frac{E}{1+\nu}\frac{u_\theta^{(2)}}{p_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} Y_n(k_{d_2} r) a_{n0} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{dY_n(k_{s_2} r)}{dr} + \frac{1}{r} Y_n(k_{s_2} r)\right] a_{n0} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta); \tag{36}$$

$$\frac{E}{1+\nu}\frac{\sigma_{rr}^{(2)}}{p_0} = -\left(\lambda_{e_2} - i\omega\frac{C_1}{R_1}\lambda_{v_2}\right) k_{d_2}^2 \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(k_{d_2} r) a_{n0} P_n(\cos\theta) + 2\left(\mu_{e_2} - i\omega\frac{C_1}{R_1}\mu_{v_2}\right) \times \tag{37}$$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2}{dr^2} Y_n(k_{d_2} r) a_{n0} P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty}\left[r\frac{d^3}{dr^3} Y_n(k_{s_2} r) + 3\frac{d^2}{dr^2} Y_n(k_{s_2} r) + k_{s_2}^2 r \frac{d}{dr} Y_n(k_{s_2} r) + k_{s_2}^2 Y_n(k_{s_2} r)\right] a_{n0} P_n(\cos\theta)\right);$$

$$\frac{E}{1+\nu}\frac{\sigma_{r\theta}^{(2)}}{p_0} = \left(\mu_{e_2} - i\omega\frac{C_1}{R_1}\mu_{v_2}\right)\left\{2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr} Y_n(k_{d_2} r) - \frac{1}{r^2} Y_n(k_{d_2} r)\right] a_{n0} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d^2}{dr^2} Y_n(k_{s_2} r) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} Y_n(k_{s_2} r) + \left(\frac{1}{2}k_{s_2}^2 - \frac{1}{r^2}\right) Y_n(k_{s_2} r)\right] a_{n0} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta)\right\}. \tag{38}$$

Для пружного тіла

$$\frac{E}{1+\nu}\frac{u_r^{(3)}}{p_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dr}Z_n(\omega_1 r)a_{n0}P_n(\cos\theta)+\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)\frac{Z_n(\omega_2 r)}{r}a_{n0}P_n(\cos\theta); \qquad (39)$$

$$\frac{E}{1+\nu}\frac{u_\theta^{(3)}}{p_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_n(\omega_1 r)}{r}a_{n0}\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\{rZ_n(\omega_2 r)\}a_{n0}P_n(\cos\theta). \qquad (40)$$

Використовуючи співвідношення деформації-переміщення і напруження-деформації і зауважуючи, що вираз для об'ємного розширення $\Theta$ має вигляд

$$\Theta^{(3)}=div\vec{u}^{(3)}=-\omega_1^2\phi_3=-\frac{1+\nu}{E}p_0\omega_1^2\sum_{n=0}^{\infty}Z_n(\omega_1 r)a_{n0}P_n(\cos\theta), \qquad (41)$$

подамо напруження в пружному тілі за допомогою виразів

$$\frac{\sigma_{rr}^{(3)}}{p_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d^2Z_n(\omega_1 r)}{dr^2}-\frac{\omega_1^2\nu}{1-2\nu}Z_n(\omega_1 r)\right]a_{n0}P_n(\cos\theta)+\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)\frac{d}{dr}\left(\frac{Z_n(\omega_2 r)}{r}\right)a_{n0}P_n(\cos\theta); \qquad (42)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}^{(3)}}{p_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r}\left[\frac{dZ_n(\omega_1 r)}{dr}-\frac{Z_n(\omega_1 r)}{r}\right]a_{n0}\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{d^2Z_n(\omega_2 r)}{d^2 r}+\frac{n^2+n-2}{r^2}Z_n(\omega_2 r)\right]a_{n0}\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta). \qquad (43)$$

Задовольняючи умови контакту у випадку осьової симетрії (у просторі зображень Фур'є або за умови гармонійної часової залежності):

- умови контакту на поверхні $r=1$ -

$$\sigma_{rr}^{(2)}+p_i+p_1=0, \quad \sigma_{r\theta}^{(2)}=0, \quad u_r^{(2)}=u_r^{(1)}; \qquad (44)$$

- умови контакту на поверхні $r=r_2=R_2/R_1$ -

$$\sigma_{rr}^{(2)}=\sigma_{rr}^{(3)}, \qquad \sigma_{r\theta}^{(2)}=\sigma_{r\theta}^{(3)}, \qquad u_r^{(2)}=u_r^{(3)}, \qquad u_\theta^{(2)}=u_\theta^{(3)}, \qquad (45)$$

отримаємо систему алгебричних рівнянь для обчислення безрозмірних невідомих комплексних коефіцієнтів $x_n(\omega)$ для кожного члена ряду (30):

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}a_n+\beta_{11}b_n+\alpha_{12}c_n+\beta_{12}d_n+(\alpha_{13}+i\beta_{13})x_n=\alpha_{10},\\
&\alpha_{21}a_n+\beta_{21}b_n+\alpha_{22}c_n+\beta_{22}d_n+(\alpha_{23}+i\beta_{23})x_n=0,\\
&\alpha_{31}a_n+\beta_{31}b_n+\alpha_{32}c_n+\beta_{32}d_n+\alpha_{33}e_n+\alpha_{34}f_n=0,\\
&\alpha_{41}a_n+\beta_{41}b_n+\alpha_{42}c_n+\beta_{42}d_n+\alpha_{43}e_n+\alpha_{44}f_n=0,\\
&\alpha_{51}a_n+\beta_{51}b_n+\alpha_{52}c_n+\beta_{52}d_n=0, \qquad (46)\\
&\alpha_{61}a_n+\beta_{61}b_n+\alpha_{62}c_n+\beta_{62}d_n+\alpha_{63}e_n+\alpha_{64}f_n=0,\\
&\alpha_{71}a_n+\beta_{71}b_n+\alpha_{72}c_n+\beta_{72}d_n+\alpha_{73}e_n+\alpha_{74}f_n=0,
\end{aligned}$$

$$\alpha_{11}=k_{d_2}^2\frac{(1+\nu)}{E}\left[\left(\lambda_{e_2}-i\omega\frac{C_1}{R_1}\lambda_{\nu_2}\right)j_n(k_{d_2})-2\left(\mu_{e_2}-i\omega\frac{C_1}{R_1}\mu_{\nu_2}\right)j_n''(k_{d_2})\right],$$

$$\alpha_{12}=-k_{s_2}^2\frac{2(1+\nu)}{E}\left(\mu_{e_2}-i\omega\frac{C_1}{R_1}\mu_{\nu_2}\right)\left[k_{s_2}j_n'''(k_{s_2})+3j_n''(k_{s_2})+k_{s_2}j_n'(k_{s_2})+j_n(k_{s_2})\right],$$

$$\alpha_{13}=-\rho_1C_1^2\omega^2\frac{(1+\nu)}{E}j_n(\omega), \quad \alpha_{10}=1, \quad \alpha_{21}=k_{d_2}j_n'(k_{d_2}), \quad \alpha_{22}=k_{s_2}^2j_n''(k_{s_2})+2k_{s_2}j_n'(k_{s_2})+k_{s_2}^2j_n(k_{s_2}),$$

$$\alpha_{23}=-\omega j_n'(\omega), \quad \alpha_{31}=\frac{(1+\nu)}{E}\left(\lambda_{e_2}-i\omega\frac{C_1}{R_1}\lambda_{\nu_2}\right)k_{d_2}^2j_n(k_{d_2}r_2)-\frac{2(1+\nu)}{E}\left(\mu_{e_2}-i\omega\frac{C_1}{R_1}\mu_{\nu_2}\right)k_{d_2}^2j_n''(k_{d_2}r_2),$$

$$\alpha_{32}=-2\frac{(1+\nu)}{E}\left(\mu_{e_2}-i\omega\frac{C_1}{R_1}\mu_{\nu_2}\right)k_{s_2}^2\left[(k_{s_2}r_2)j_n'''(k_{d_2}r_2)+3j_n''(k_{s_2}r_2)+(k_{s_2}r_2)j_n'(k_{s_2}r_2)+j_n(k_{s_2}r_2)\right],$$

$$\alpha_{33} = -\omega_1^2\left[\frac{\nu}{1-2\nu} j_n(\omega_1 r_2) - j''_n(\omega_1 r_2)\right], \quad \alpha_{34} = \frac{n(n+1)}{r_2^2}\left[j_n(\omega_2 r_2) - (\omega_2 r_2) j'_n(\omega_2 r_2)\right],$$

$$\alpha_{41} = k_{d_2} j'_n(k_{d_2} r_2), \quad \alpha_{42} = k_{s_2}\left[(k_{s_2} r_2) j''_n(k_{s_2} r_2) + 2 j'_n(k_{s_2} r_2)\right], \qquad \alpha_{43} = -\omega_1 j'_n(\omega_1 r_2),$$

$$\alpha_{44} = -n(n+1)\frac{j_n(\omega_2 r_2)}{r_2}, \quad \alpha_{51} = 2\left(\mu_{e_2} - i\omega\frac{C_1}{R_1}\mu_{\nu_2}\right)\left[j_n(k_{d_2}) - k_{d_2} j'_n(k_{d_2})\right],$$

$$\alpha_{52} = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}k_{s_2}^2\right) j_n(k_{s_2}) - k_{s_2} j'_n(k_{s_2}) - k_{s_2}^2 j''_n(k_{s_2})\right],$$

$$\alpha_{61} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\left(\mu_{e_2} - i\omega\frac{C_1}{R_1}\mu_{\nu_2}\right)\left[j_n(k_{d_2} r_2) - (k_{d_2} r_2) j'_n(k_{d_2} r_2)\right],$$

$$\alpha_{62} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\left(\mu_{e_2} - i\omega\frac{C_1}{R_1}\mu_{\nu_2}\right)\left[\left(1 - \frac{(k_{s_2} r_2)^2}{2}\right) j_n(k_{s_2} r_2) - (k_{s_2} r_2) j'_n(k_{s_2} r_2) - (k_{s_2} r_2)^2 j''_n(k_{s_2} r_2)\right],$$

$$\alpha_{63} = j_n(\omega_1 r_2) - (\omega_1 r_2) j'_n(\omega_1 r_2), \qquad \alpha_{64} = -\frac{1}{2}\left[(n^2 + n - 2) j_n(\omega_2 r_2) + (\omega_2 r_2)^2 j''_n(\omega_2 r_2)\right],$$

$$\alpha_{71} = j_n(k_{d_2} r_2), \quad \alpha_{72} = j_n(k_{s_2} r_2) + (k_{s_2} r_2) j'_n(k_{s_2} r_2), \quad \alpha_{73} = -j_n(\omega_1 r_2),$$

$$\alpha_{74} = -\left[j_n(\omega_2 r_2) + (\omega_2 r_2) j'_n(\omega_2 r_2)\right], \quad a_n = C_{1n}, \quad b_n = D_{1n}, \quad c_n = C_{2n}, \quad d_n = D_{2n},$$

$$e_n = B_{1n}, \quad f_n = B_{2n}.$$

Штрих означає похідну за аргументом. Коефіцієнти $\beta_{ij}$ отримуються із $\alpha_{ij}$ заміною сферичних функцій Бесселя $j_n(\omega)$ сферичними функціями Неймана $n_n(\omega)$.

Використовуючи перетворену за Фур'є формулу (7) і значення $\phi_1$ за формулою (30), для зображення тиску в акустичному середовищі, що оточує сферичний об'єкт, одержимо

$$p_1^F = p_0 f^F(\omega) F^F(\omega), \tag{47}$$

де $F^F(\omega) = \rho C_1^2 \omega^2 \frac{(1+\nu)}{E}\sum_{n=0}^{\infty} h_n(\omega r) x_n(\omega) A_{n0} P_n(\cos\theta)$.

Дійсний тиск в акустичному середовищі з урахуванням (47) і формули обернення перетворення Фур'є запишемо у вигляді

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} f^F(\omega) F^F(\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega, \tag{48}$$

якому з урахуванням парності підінтегральної функції надамо вигляду:

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_{0}^{\infty} f^F(\omega) F^F(\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega. \tag{49}$$

Обчислення інтегралу (49) проводиться методом числового інтегрування Ромберга [3]. За закон зміни тиску в зосередженому імпульсі взято синусоїду $f(\tau) = \sin\omega_0\tau$, де $\omega_0$ – частота синусоїдального заповнення. Розрахунки звукового поля були проведенні в дальньому полі $(r >> 1)$ на осі дії зосередженого імпульсу $(\theta = 0)$.

В'язкопружний матеріал зазвичай описується через дійсний об'ємний модуль $K$ і комплексний модуль зсуву $\mu^*$. Оскільки $\lambda^* = K - \frac{2}{3}\mu^*$, то $C_{d_2}^2 = \left(K + \frac{3}{4}\mu^*\right)\Big/\rho_2$. Комплексний модуль зсуву описується формулою: $\mu^*(\omega) = \mu(\omega)[1 + i\delta(\omega)]$, де $\delta(\omega)$ - затухаючий фактор.Числові значення $\mu(\omega)$ і $\delta(\omega)$ в залежності від частоти для натуральної гуми і пластичного полівінілу наведені в [4].

Зв'язок між комплексними сталими Ламе $\lambda^*$ і $\mu^*$ та пружними сталими Ламе $\lambda_{e_2}$ і $\mu_{e_2}$ і їх в'язкими відповідниками $\lambda_{v_2}$ і $\mu_{v_2}$ у просторі зображень Фур'є (або гармонійної часової залежності) даються формулами

$$\lambda_{e_2} = K - \frac{2}{3}\mu(\omega), \quad \mu_{e_2} = \mu(\omega), \quad \lambda_{v_2} = \frac{2}{3}\frac{R_1}{C_1\omega}\mu(\omega)\delta(\omega), \quad \mu_{v_2} = -\frac{R_1}{C_1\omega}\mu(\omega)\delta(\omega)$$

Покладаючи затухаючий фактор $\delta(\omega) = 0$, отримаємо задачу для сферичного об'єкту із пружним покриттям зі сталими $\lambda_{e_2}, \mu_{e_2}$. Якщо $\lambda_{e_2}$ і $\mu_{e_2}$ дорівнюють відповідним характеристикам сферичного об'єкту $\lambda_{e_3}$ і $\mu_{e_3}$, то буде отримано розв'язок задачі про випромінювання акустичних хвиль суцільною пружною сферою радіуса $R_1$, який детально описаний у роботі [5]. Такий самий результат для сфери $R_2$ отримується при прямуванні товщини $R_1 - R_2$ в'язкого покриття до нуля.

**Література:**


1. G. C. Gaunaurd Sonar cross section of a coated hollow cylinder in water. // J. Acoust. Soc. Amer., 1977, **61.- P.** 360-368.
2. G. C. Gaunaurd and H. Uberall Theory of resonant scattering from spherical cavities in elastic and viscoelastic media // J. Acoust. Soc. Amer., 1978, **63.-** P. 1699-1712.
3. Fairweather G. Algorithm 351. Modified Romberg quadrature // Communns ACM. 1969. - Vol. 12, № 6.
4. G. Workman, S. I. Hayek Transmission of Acoustic Waves through Submerged Viscoelastic Spherical Shells // J. Acoust. Soc. Amer., 1969, **46.** – P. 1340-1349.
5. В.Я. Онищук Акустичне поле від суцільної пружної сфери // Вісник Львів. у-ту, сер. мех.-мат., вип. 16. Теоретичні і прикладні питання математичного аналізу. – Львів: Вища школа. Вид-во при Львів у-ті. - 1980. – С.54-60.