

МОДЕЛЬ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОВЕРХНІ ТІЛА ЛЮДИНИ З ВІБРАТОРОМ

В. Н. ОЛІЙНИК

*Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Желябова, 8/4, 03057, Київ, Україна
тел. (044) 456-69-83, e-mail: v_oliylik@yahoo.com*

Побудовані фізична й математична моделі контактної взаємодії поверхні тіла людини з вібратором механічного імпедансметра. На основі припущення, що основну роль при такій взаємодії грає стовп м'яких біотканин між вібратором і кістками скелета, розглянуто задачу про гармонічні коливання пружного циліндра з кінематично навантаженим торцем за умови відсутності дотичних напружень на поверхні контакту. Порівняння розрахункових результатів з даними експериментів по віброзбудженню шкіри передпліччя людини *in situ* продемонстрували в цілому задовільне узгодження між ними.

ВСТУП

Вивчення особливостей динамічної взаємодії поверхні тіла людини з контактними сенсорами розпочалося наприкінці 1940-х рр. [1]. В наш час посилення інтересу до цієї тематики обумовлюється активним розвитком медичних технологій, пов'язаних з реєстрацією та обробкою акустичних сигналів, породжених життєдіяльністю людського організму [1–3]. Адекватне врахування динамічної реакції поверхні тіла на присутність сенсора дозволяє передбачити характер і ступінь спотворення прийнятого сигналу за рахунок зміни віброакустичного поля в околі контакту [2, 4].

Незважаючи на існування ряду теоретичних і експериментальних робіт, спрямованих на обґрунтування тих чи інших моделей взаємодії поверхні тіла людини з сенсорами й поршневими вібраторами, виконаними з порівняно жорстких матеріалів [1, 3, 5, 6], ця проблема до цього часу не може вважатися розв'язаною остаточно. Здебільшого, робилися спроби використати для інтерпретації одержаних результатів розв'язки задач у спрощених постановках (див. [1, 5, 6]). При цьому характер зчеплення з об'єктом вимірювань ігнорувався (фактично, на поверхні контакту нав'язувався певний розподіл механічних напружень). Очевидно, що такий підхід, до певної міри виправданий, якщо описувати ситуацію з віброзбудженням, є абсолютно неприйнятним при аналізі поведінки кінематичного сенсора на поверхні тіла людини.

З огляду на сказане, доцільно розглянути фізичну модель досліджуваної системи зі збереженням характеру граничних умов на поверхні контакту. При цьому прийняті спрощення повинні, по можливості, дозволити записати розв'язок задачі в замкнутому вигляді (або у вигляді функціонального ряду з відомими коефіцієнтами). Такий підхід повинен допомогти більш наочно продемонструвати риси, які є суттєвими для адекватного опису контактної взаємодії поверхневих м'яких біотканин з сенсором або вібратором. В цій роботі будуть розглянуті умови, якими моделюється ситуація віброзбудження поверхні тіла.

1 ФІЗИЧНІ Й ГЕОМЕТРИЧНІ ПАРАМЕТРИ СИСТЕМИ

Перш ніж викласти математичну постановку задачі, слід з'ясувати питання про фізико-механічні характеристики м'яких біотканин і геометричні особливості досліджуваної системи. Аналіз наявних експериментальних даних дозволяє стверджувати, що для відносно малих статичних і динамічних навантажень така параметрична залежність не проявляється і поверхневі біотканини можна вважати лінійним ізотропним пружним матеріалом [2, 7].

Загальновідомо, що густини епітелію, м'язових та жирових тканин ненабагато перевищують густину води [1]. Тому при постановці модельної задачі приймемо густину пружного середовища $\rho = 1100 \text{ кг/м}^3$.

Традиційно більшість дослідників вважає швидкість поздовжніх хвиль у поверхневих біотканинах c_1 близькою до швидкості звуку у воді [1, 3, 5]: $c_1 \approx 1500 \text{ м/с}$.

Численні експерименти свідчать, що швидкість поширення поперечних хвиль у поверхневих біотканинах c_2 є дуже низькою (десятки або, навіть, одиниці метрів за секунду) [1, 3, 7]. Низька об'ємна стисливість м'яких біотканин $\mu \approx 0.5$ дозволяє легко оцінити фазову швидкість поперечної хвилі через відому величину модулів Юнга і зсуву [1, 6]:

$$c_2 = \sqrt{G/\rho} \approx \sqrt{E/(3\rho)} \approx 1.51 \text{ м/с}. \quad (1)$$

Оцінка хвильових розмірів тіла людини показує, що на частотах нижче $1.5 \div 2 \text{ кГц}$ поздовжні хвилі в біотканинах не затухають. На відміну від цього, затуханням поперечних хвиль для практично важливих випадків нехтувати не можна [1, 5, 6]. Будемо його через узагальнений комплексний модуль зсуву $G^* = G + i(G' + \omega G'')$. Значення G' і G'' слід обирати за результатами тестових розрахунків.

Як показує досвід, при моделюванні взаємодії сенсора чи вібратора з поверхневими біотканинами найбільш природно розглядати задачі про навантаження штампом деформівного шару м'якої біотканини, який лежить на кістковій основі зі значно більшою жорсткістю [6]. Виходячи з порівняльного аналізу фізичних параметрів м'яких і кісткових тканин [3], можна зробити висновок, що при аналізі особливостей контактної взаємодії на поверхні грудної клітки людини можна деформівний шар, який лежить на абсолютно твердій основі. При контактній взаємодії вібратора з поверхнею тіла людини має існувати певна частотна смуга, для якої в формуванні імпедансних властивостей контактної ділянки поверхні участь бере фактично лише стовп біотканини, що знаходиться безпосередньо під зоною контакту. Це припущення дозволяє значно спростити фізико-математичну модель досліджуваної системи, розглянувши задачу про вимушені коливання скінченного пружного циліндра з вільною бічною поверхнею і торцями, осьові зміщення яких вважаються заданими.

2 МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ І РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

Нехай до торців кругового циліндра довжиною $2h$ й радіусом a (рис. 1) вздовж його осі прикладено гармонічне за часом кінематичне навантаження $U_0 e^{i\omega t}$. При цьому дотичні напруження на торці покладемо рівними нулеві. Бічна поверхня циліндра вільна від навантажень.

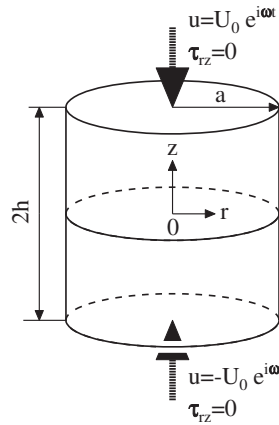


Рис. 1.

Матеріал циліндра вважаємо ідеально пружним – його динамічні деформації описуються рівнянням Ламе, яке для гармонічного випадку має вигляд

$$c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{u}. \quad (2)$$

Тут $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ – вектор амплітуд зміщень [8] (експоненційний часовий множник опущено). Оскільки задача в такій постановці має осьову симетрію, то в усіх співвідношеннях $\partial/\partial\theta \equiv 0$, $u_\theta \equiv 0$.

Запишемо граничні умови на бічній поверхні

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \text{при } r = a, \quad |z| \leq h \quad (3)$$

і на торцях циліндра:

$$u_z = \pm U_0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } z = \pm h, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (4)$$

Нас буде цікавити механічний імпеданс торця, оскільки цю характеристику можна визначити експериментально. Вона визначається за формулою

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{F}_z}{i\omega U_0} = \frac{2\pi}{i\omega U_0} \int_0^a \sigma_z r dr \quad \text{при } z = \pm h, \quad (5)$$

де \mathcal{F}_z – повна реакція торця циліндра вздовж осі z ; σ_z – осьові механічні напруження в циліндрі.

За умови гладкого контакту загальний розв'язок задачі для зміщень має вигляд

$$\begin{aligned} u_r &= A_0 J_1(k_1 r) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \eta_n z \left[A_n I_1(q_{1n} r) + A_n^* I_1(q_{2n} r) \right], \\ u_z &= U_0 \frac{\sin k_1 z}{\sin k_1 h} - \sum_{n=1}^{\infty} \sin \eta_n z \left[A_n \frac{\eta_n}{q_{1n}} I_0(q_{1n} r) + A_n^* \frac{q_{2n}}{\eta_n} I_0(q_{2n} r) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут J_s та I_s – відповідно звичайні й модифіковані функції Беселя першого роду; A_0 , A_n й A_n^* – невідомі коефіцієнти рядів Фур’є;

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}; \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}; \quad c_2^8 = \sqrt{G^*/\rho};$$

$$\eta_n = \frac{\pi n}{h}; \quad q_{ln} = \sqrt{\eta_n^2 - k_l^2}; \quad l = 1, 2.$$

Визначивши невідомі вагові коефіцієнти з граничних умов, остаточно отримуємо

$$\frac{1}{2GU_0} \frac{h}{\pi a^2} \mathcal{F}_z = \chi k_1 h \operatorname{ctg} k_1 h - \frac{2(\chi-1)^2 J_1(k_1 a)}{\chi k_1 a J_0(k_1 a) - J_1(k_1 a)} + 2(\chi-1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^4 k_2^2}{q_{1n}^4 \eta_n^2} \frac{I_1(q_{2n} a)}{\Delta_n^A}, \quad (7)$$

де

$$\Delta_n^A = \alpha_n \left[\left(1 - (\chi-1) \frac{k_1^2}{q_{1n}^2} \right) q_{1n} a I_0(q_{1n} a) - I_1(q_{1n} a) \right] - \left[q_{2n} a I_0(q_{2n} a) - I_1(q_{2n} a) \right];$$

$$n = 1, 2, \dots$$

3 АСИМПТОТИЧНИЙ І ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Насамперед, дослідимо низькочастотну поведінку імпедансу торця циліндра при гладкому контакті зі штампом. Випадок $\omega \rightarrow 0$ з практичної точки зору відповідає діапазону частот, в якому довжини поздовжньої й поперечної хвиль значно перевищують характерні розміри циліндра.

Очевидно, що при $k_1 \ll 1$ нескінченна сума в формулі (7) має значно вищий порядок малості, ніж два перші члени. Тоді, замінивши циліндричні функції на відповідні асимптотичні вирази в околі нуля, отримаємо з точністю до $O(\omega^2)$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{Z} = \frac{\pi a^2}{h} \left[\frac{1}{i\omega} E + i\omega \rho \left(\frac{1}{3} h^2 + \frac{\nu^2}{2} a^2 \right) \right]. \quad (8)$$

Цей результат дає можливість оцінити ступінь залучення пружного матеріалу циліндра до контактної взаємодії торця зі штампом. Виявляється, що за умови гладкого контакту пружна характеристика формується за рахунок усього стовпа матеріалу під штампом, а інерційні властивості визначаються лише відносно невеликою кінцевою зоною, яка здійснює інтенсивні коливання. З формули (8) випливає проста оцінка для частоти резонансу циліндра на поздовжній хвилі f_r :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{\rho} \left(\frac{1}{3} h^2 + \frac{\nu^2}{2} a^2 \right)} = \frac{c_2 \sqrt{1+\nu}}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{3} h^2 + \nu^2 a^2}. \quad (9)$$

Перейдемо до аналізу чисельних даних. На рис. 2 показані експериментальні й теоретичні залежності механічного імпедансу для трьох діаметрів робочої частини вібратора: $2a = 8.075, 11.8$ і 16.03 мм, які відповідають даним, наведеним у статті [9]. Висота циліндра й фізичні характеристики його матеріалу обирались такими: $h = 6.5$ мм, $\rho = 1100$ кг/м³, $c_1 = 1500$ м/с, $c_2 = 1.51$ м/с ($G = 2.5$ кПа). Експериментальні криві [9] позначені неперервними лініями (чим більший діаметр вібратора, тим вище розташована крива). Розрахункові залежності показано штриховими лініями.

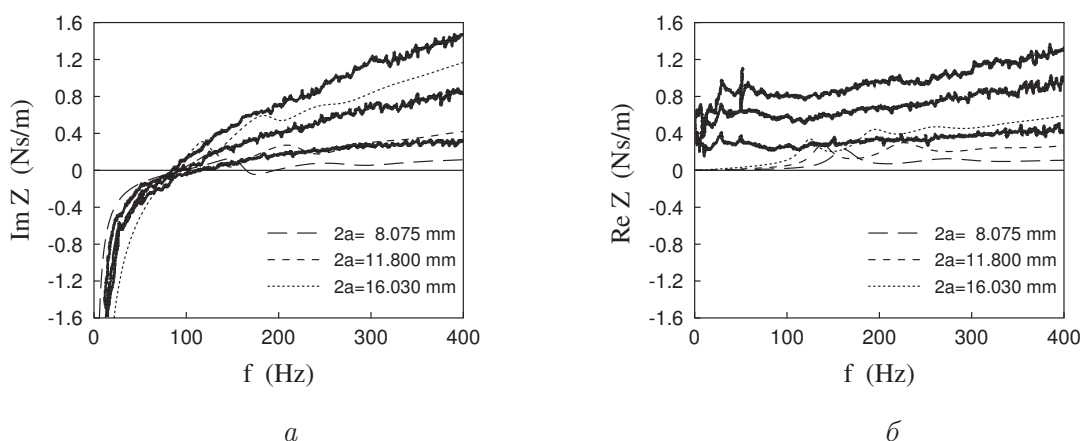


Рис. 2.

З графіків видно, що реальні частотні залежності $\mathbf{Im} Z$ і $\mathbf{Re} Z$ не мають виражених піків, пов'язаних з резонансами шару для поперечних хвиль. Розглянувши різні моделі затухання, можна прийти до висновку, що найбільш згладженими є частотні залежності для $\mathbf{Im} Z$ при $G' = 250$ Па, $G'' = 0.25$ Па с.

Зауважимо, що в області частот $f > f_r$ криві для імпедансу, обчислені з урахуванням поперечних мод лежать помітно нижче як експериментальної кривої, так і асимптотичної залежності Z_{lf} . Це природно, оскільки наявність скінченної пружності при зсуві робить систему більш жорсткою. Зближення теоретичних і експериментальних залежностей можна очікувати при розгляді фізичного об'єкта, частина поверхні якого залишається поза торцем робочої частини вібратора (плоско-паралельний шар, циліндр з радіусом, який значно перевищує a , тощо). Очевидно, що наявність вільної поверхні збільшить приєднану масу системи, компенсуючи пружність, яка вноситься поперечними модами. Що ж до низьких частот ($f \leq f_r$), тут добре працює низькочастотна асимптотика (8). Слід відзначити, що експеримент дає величину затухання, яка у всьому частотному діапазоні значно перевищує розрахункові значення. Для об'єктів, у яких частина поверхні залишається поза контактом з вібратором, можна сподіватись на зростання $\mathbf{Re} Z$ за рахунок випромінювання акустичної енергії в цю зону з подальшою її дисипацією. Високий рівень $\mathbf{Re} Z$ на дуже низьких частотах може бути викликаний неідеальністю умов проведення експеримента.

ВИСНОВКИ

1. Урахування існування поперечної хвилі є принциповим для правильного опису характеру частотної залежності механічного імпедансу поверхні тіла при контактній взаємодії з вібратором.
2. При порівнянні розрахункових даних з результатами вимірювань механічного імпедансу на передпліччі людини встановлено, що теоретична модель в цілому вірно відображає основні риси контактної взаємодії поверхні тіла з вібратором. Після вдосконалення фізичної моделі через розгляд об'єкта, частина поверхні якого за-

лишається поза робочим торцем вібратора, слід очікувати подальшого зближення теоретичних даних з експериментальними.

3. Проведене моделювання не дозволило зробити остаточного висновку про величину й частотну поведінку коефіцієнта затухання поперечної хвилі в м'яких тканинах.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Oestreicher H. L.* Field and impedance of an oscillating sphere in a viscoelastic medium with an application to biophysics // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1951.– **23**, N 6.– P. 707–714.
2. *Олійник В. Н.* Раціональне проектування п'єзоакселерометрів для вимірювань на піддатливих поверхнях // *Акуст. вісн.*– 1998.– **1**, N 3.– С. 54–65.
3. *Zhang X., Royston T. J., Mansy H. A., Sandler R. H.* Radiation impedance of a finite circular piston on a viscoelastic half-space with application to medical acoustics // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2001.– **109**, N 2.– P. 795–802.
4. *Vermarien H., van Vollenhoven E.* The recording of heart vibrations: a problem of vibration measurement on soft tissue // *Med. & Biol. Eng. & Comput.*– 1984.– **22**.– P. 168–178.
5. *Еремін Е. В., Тиманин Е. М.* Интерпретация механического импеданса слоя, измеренного с помощью твердого круглого штампа // *Акуст. ж.*– 2000.– **46**, N 4.– С. 490–495.
6. *Клочков Б. Н.* Ближнее поле силового низкочастотного источника на слоистой биоткани // *Акуст. ж.*– 2002.– **48**, N 1.– С. 70–76.
7. *Greenleaf J. F., Fatemi M., Insana M.* Selected methods for imaging elastic properties of biological tissues // *Ann. Rev. Biomed. Engng.*– 2003.– **5**.– P. 57–78.
8. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
9. *Тиманин Е. М.* Модель формирования импедансных свойств мягких биологических тканей // *Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей.*– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– С. 75–91.