

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ УПРУГИХ СВОЙСТВ
ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ В МЕСТЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИ ОТДЕЛЕННОЙ ЧАСТИ ЭЛЕКТРОДНОГО ПОКРЫТИЯ
МЕТОДОМ НИЗКОЧАСТОТНОЙ ТОМОГРАФИИ**

Никитенко В.Н., Юрченко М.Е.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка

Рассмотрена задача о продольных колебаниях пьезокерамического стержня с толщиной поляризацией. Построено аналитическое решение при нулевых механических граничных условиях на торцах стержня. В случае, когда электроды отделенными диэлектрическими промежутками участка стержня разомкнуты, для первых нормальных мод, найдены собственные частоты колебаний. Эти значения сопоставлены со спектром продольных колебаний стержня со сплошными электродами. Согласно методу низкочастотной томографии приведены данные о месторасположении и приближенная форма неоднородности. Проведено сопоставление с экспериментальными исследованиями.

Известно, что собственные (резонансные) частоты колебаний упругих тел полностью определяются их геометрической формой и механическими свойствами. Если есть возможность определить бесконечное множество собственных частот и соответствующих им нормальных мод колебаний идеального упругого тела, появляется возможность построения решения обратных краевых задач теории колебаний, т. е. задач по определению геометрии тела с известной плотностью и упругими свойствами при условии известных (теоретически или экспериментально определенных) собственных частот колебаний. Кроме того, спектральные методики позволяют определить физические свойства тел заданной геометрии. Методы решения обратных задач, которые относятся к классу некорректных, получили интенсивное развитие за последние 20-30 лет, что в значительной мере стало возможным с появлением достаточно мощных ЭВМ. Для задач, не являющихся корректными в классическом смысле, А.Н. Тихонов предложил [14] новое понятие корректности, которое является физически оправданным для многих прикладных задач.

В работах известного математика М.Г. Крейна [7-9] математически строго решена задача об определении плотности неоднородной струны, если известен ее полный спектр частот колебаний. К сожалению, рассматриваемые автором методы не распространялись на обратные задачи колебаний упругих тел, т.е. на системы уравнений в частных производных.

Наиболее исчерпывающие результаты для обратной задачи Штурма-Лиувилля получены И.М. Левитаном и И.М. Гельфандом [4], а также Л.Д. Фаддеевым и В.А. Марченко для обратной задачи квантовой теории рассеяния [10,15].

Для уравнений в частных производных различные варианты решения обратной задачи рассеяния рассматривались в работе [3], задача об определении формы области по данным рассеяния – в работах [11,13]. Методы решения обратных задач широко используются в астрофизике [16], дефектоскопии [6], акустическом зонировании мирового океана [12]. Как уже было отмечено в [17,18], для построения решения обратных задач необходимо иметь дополнительную информацию об объекте исследования, а именно, о расположении дефекта и его размеры.

Задачи такого типа исследовались и в работах американских авторов [1,2] методом низкочастотной томографии. Аналогичный подход (приближение функций конечным числом членов ряда Фурье) для определения неоднородности упругих свойств стержня

используется и в данном докладе, но в отличие от вышеупомянутых работ удалось определить коэффициенты ряда Фурье не только с четными, но и с нечетными номерами.

I. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИ ОТДЕЛЕННОЙ ЧАСТЬЮ ЭЛЕКТРОДНОГО ПОКРЫТИЯ

Рассматриваем пьезокерамический стержень, длина которого l много больше его ширины b и толщины $2h$. Участки 1 и 3 стержня (рис. 1)

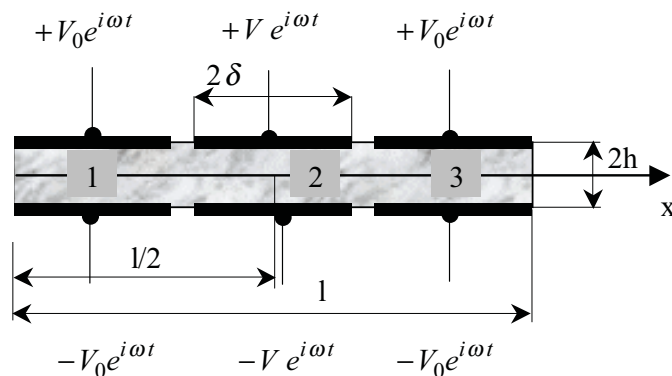


Рис. 1.

запитаны генератором напряжений с круговой частотой подвода разности потенциалов ω :

$$\Psi|_{x=\pm h} = \pm V_0 e^{i\omega t} \quad (1)$$

Механическая неоднородность материала стержня обусловлена тем, что на участке 2 рассматриваемого пьезокерамического стержня электродное покрытие отделено от рабочего электродного покрытия диэлектрическими промежутками (рис. 1). В приближении прикладной теории стержней принято, что единственным компонентом напряжений, который необходимо учитывать в расчете, является напряжение $\sigma_x(x, t)$. Напряжения σ_y и σ_z малы по сравнению с ним и ими пренебрегаем:

$$\sigma_y \approx \sigma_z \approx 0 \quad (2)$$

Практически это предположение оправдано для тонких стержней ($l > 10 \cdot b$ и $l > 10 \cdot h$) при низких частотах колебаний. Одномерные уравнения состояния пьезокерамического стержня с толщиной поляризации имеют следующий вид [5]:

$$\varepsilon_x = S_{11}^E \sigma_x + d_{31} E_z \quad (3)$$

$$D_z = \varepsilon_{33}^T E_z + d_{31} \sigma_x$$

где: S_{11}^E - упругая податливость при постоянном (нулевом) электрическом поле; d_{31} - пьезоэлектрическая постоянная; ε_{33}^T - диэлектрическая проницаемость при постоянном (нулевом) напряжении; E_z - компонента вектора напряженности электрического поля; D_z - компонента вектора электрической индукции. Соотношения (3) дополняем уравнением движения элемента стержня, которое будет одинаковым для всех трех участков:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(i)}}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

уравнением вынужденной электростатики для рассматриваемых участков:

$$E_z^{(i)} = -\frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

и соотношением Коши:

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Для стержня с жестко заделанным торцом $x = 0$ и свободным правым торцом $x = l$ граничные условия имеют вид:

$$u^{(1)}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u^{(3)}}{\partial x}|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Для заданного равенством (1) условия изменения электрического потенциала во времени, решение уравнений (4) ищем в виде гармонически изменяющихся во времени функций:

$$u_x = \hat{u}(x) \cdot e^{i\omega t}, \quad \varepsilon_x = \hat{\varepsilon}(x) \cdot e^{i\omega t}, \quad \Psi = \hat{\Psi}(x) \cdot e^{i\omega t}. \quad (8)$$

В предположении прикладной теории потенциалы $\Psi^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ изменяются по толщине стержня по линейному закону. Поэтому для их амплитудных характеристик имеем выражения (9):

$$\hat{E}_z^{(1)} = -\frac{V_0}{h}, \quad \hat{E}_z^{(2)} = -\frac{V}{h}, \quad \hat{E}_z^{(3)} = -\frac{V_0}{h}, \quad (9)$$

На диэлектрически отделенном участке 2 рассматриваемого стержня амплитудная разность потенциалов V остается пока еще неизвестной постоянной. Исходя из (3) и условий (7) с учетом (8) для областей 1-3 получаем следующие равенства для амплитуд механических напряжений:

$$\hat{\sigma}_x^{(1)} = \frac{1}{S_{11}^E} \left[\frac{d\hat{u}_x^{(1)}}{dx} + d_{31} \frac{V_0}{h} \right]; \quad \hat{\sigma}_x^{(2)} = \frac{1}{S_{11}^E} \left[\frac{d\hat{u}_x^{(2)}}{dx} + d_{31} \frac{V}{h} \right]; \quad \hat{\sigma}_x^{(3)} = \frac{1}{S_{11}^E} \left[\frac{d\hat{u}_x^{(3)}}{dx} + d_{31} \frac{V_0}{h} \right]; \quad (10)$$

С учетом (7) и (10) уравнения для нахождения амплитудной функции \hat{u} в каждой из рассматриваемых областей стержня имеют вид:

$$\frac{d^2 \hat{u}_x^{(i)}}{dx^2} + \lambda^2 \hat{u}_x^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где $\rho S_{11}^E = 1/c_2$, $\omega/c = \lambda$, c – скорость распространения упругой продольной волны в стержне. Для определения функций $\hat{u}_x^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ кроме записанных по формуле (7) граничных условий, необходимо использовать приведенные ниже условия сопряжения решений для участков стержня:

$$\begin{aligned} \hat{u}_x^{(1)}|_{l/2-\delta} &= \hat{u}_x^{(2)}|_{l/2-\delta}, \quad \hat{u}_x^{(2)}|_{l/2+\delta} = \hat{u}_x^{(3)}|_{l/2+\delta}, \\ \hat{\sigma}_x^{(1)}|_{l/2-\delta} &= \hat{\sigma}_x^{(2)}|_{l/2-\delta}, \quad \hat{\sigma}_x^{(2)}|_{l/2+\delta} = \hat{\sigma}_x^{(3)}|_{l/2+\delta}. \end{aligned} \quad (12)$$

В дополнение к записанным равенствам (12) для диэлектрически отделенного участка 2 необходимо записать уравнение:

$$\int_{l/2-\delta}^{l/2+\delta} \hat{D}_z^{(2)} dx = 0. \quad (13)$$

Решение уравнения (11) для указанных на рис.1 областей с учетом условий на левом торце стержня представляются через тригонометрические функции:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_x^{(1)} &= A \cdot \sin \lambda x \\ \widehat{u}_x^{(2)} &= B \cdot \sin \lambda x + C \cdot \cos \lambda x \\ \widehat{u}_x^{(3)} &= D \cdot \sin \lambda x + F \cdot \cos \lambda x.\end{aligned}\quad (14)$$

В виде аналогичных равенств представляются и выражения для напряжений. Входящие в решение (14) пять постоянных интегрирования A, B, C, D, F находятся из условия сопряжения решений (12) и нулевого граничного условия для механических напряжений при $x = l$ (7):

$$\begin{aligned}A \sin \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) - B \sin \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) - C \cos \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) &= 0; \\ A \cos \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) - B \cos \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) + C \sin \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) &= -\frac{d_{31}}{\lambda} \cdot \frac{V_0 - V}{h}; \\ B \sin \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) + C \cos \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) - D \sin \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) - F \cos \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) &= 0; \\ B \cos \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) - C \sin \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) - D \cos \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) + F \sin \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) &= \frac{d_{31}}{\lambda} \cdot \frac{V_0 - V}{h}; \\ D \cos \lambda l - F \sin \lambda l &= -\frac{d_{31}}{\lambda} \cdot \frac{V_0}{h}.\end{aligned}\quad (15)$$

Входящее в записанные выше уравнения значение выходного потенциала V/h можно получить, используя дополнительное условие (13), что приводит к равенству:

$$\frac{V}{h} = \frac{V_0}{h} \cdot \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \cdot \frac{1}{\Delta(\lambda l)} \cdot \frac{\sin \lambda \delta}{\lambda \delta} \cdot \frac{\cos \lambda(l - \delta) - \cos \lambda l / 2}{\cos \lambda l} \quad (16)$$

где $k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{11}^E \cdot \epsilon_{33}^T}$ – продольный коэффициент электромеханической связи,

$$\Delta = \cos \lambda l + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \cdot \frac{\sin \lambda l}{\lambda \delta} \cdot \cos \lambda(l - \delta) \quad (17)$$

Решение системы алгебраических уравнений (15) с использованием полученного равенства (16), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}A &= -\frac{d_{31}}{\lambda} \frac{V_0}{h} \frac{1}{\Delta(\lambda l)} \left\{ 1 + \frac{\sin \lambda \delta}{\lambda \delta} \cdot \left[\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \cos \lambda \delta - 2(\lambda \delta) \sin \lambda \frac{l}{2} \right] \right\}; \\ B &= -\frac{d_{31}}{\lambda} \frac{V_0}{h} \frac{1}{\Delta(\lambda l)} \left\{ 1 + \frac{\sin \lambda \delta}{\lambda \delta} \sin \lambda \frac{l}{2} \left[\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \sin \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) - 2(\lambda \delta) \right] - \cos \lambda \delta \cdot \cos \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) \right\} \\ C &= -\frac{d_{31}}{\lambda} \frac{V_0}{h} \frac{1}{\Delta(\lambda l)} \frac{\sin \lambda \delta}{\lambda \delta} \sin \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) \cdot \left[\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \cos \lambda \frac{l}{2} + (\lambda \delta) \cos \lambda \delta \right] \\ D &= -\frac{d_{31}}{\lambda} \frac{V_0}{h} \frac{1}{\Delta(\lambda l)} \left\{ 1 + \frac{\sin \lambda \delta}{\lambda \delta} \cdot \left[\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} (\cos \lambda \delta - \sin \lambda l \cdot \sin \lambda \delta) - 2(\lambda \delta) \sin \lambda \frac{l}{2} (1 + \cos \lambda l) \right] \right\} \\ F &= 2 \frac{d_{31}}{\lambda} \frac{V_0}{h} \cdot \frac{\sin \lambda \delta \cdot \cos \lambda l / 2}{\Delta(\lambda l)} \left[\lambda \delta \cdot \cos \lambda l + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \cos \lambda \frac{l}{2} \sin \lambda \delta \right].\end{aligned}\quad (18)$$

Приравнивая $\Delta(\lambda l)$ нулю, получаем трансцендентное уравнение для нахождения резонансных частот:

$$\cos z + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \cdot \frac{\sin z \bar{\delta}}{(z \bar{\delta})} \cdot \cos [z \cdot (1 - \bar{\delta})] = 0 \quad (19)$$

где $z = \lambda l$, $\bar{\delta} = \delta / l$. При $\bar{\delta} = 0$ получаем известное частотное уравнение для продольных колебаний стержня со сплошными электродами

$$\cos z = 0, \quad (20)$$

где

$$(\lambda l)_m^{(cнл.)} = z_m^{(cнл.)} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Корни уравнений (19) находились численным путем для $\bar{\delta} = 0.15$, материала керамики ЦТБС-3 с $k_{31}^2 = 0,1042$ и представлены в таблице 1. В этой же таблице для сравнения приведены также значения $(\lambda l)_m^{(cнл.)}$, найденные при помощи (21).

Таблица 1.

m	$Z_m^{(отдел.)}$	$Z_m^{(сплошн.)}$
1	1.59492	1.57079
2	4.77595	4.71239
3	7.93379	7.85398
4	11.06408	10.99557
5	14.17681	14.13717
6	17.29093	17.27876
7	20.42058	20.42035
8	23.56663	23.56194
9	26.71983	26.70354
10	29.86911	29.84513
11	33.00858	32.98672
12	36.14057	36.12832
13	39.27276	39.26991
14	42.41161	42.41150
15	45.55762	45.55301
16	48.70598	48.69469
17	51.85084	51.83628
18	54.98972	54.97787
19	58.12501	58.11946
20	61.26173	61.26106

II. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. МЕТОД НИЗКОЧАСТОТНОЙ ТОМОГРАФИИ

Согласно метода низкочастотной томографии и используя полученные в работе [18] результаты по выявлению дефектов неоднородности материала стержня, представим приближенно неоднородность отрезком ряда Фурье в следующем виде:

$$\frac{S_{11}^E(x)}{S_{11}^E(0)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ 1 + \varepsilon(x), & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 1, & x_0 + \delta < x \leq l \end{cases} = 1 + \sum_{n=0}^N b_n \cdot \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, \quad (22)$$

где b_n - неизвестные коэффициенты ряда Фурье. Рассматриваемая задача при исследовании ее методом низкочастотной томографии сводится к восстановлению неоднородности путем сопоставления частотных спектров колебаний пьезоэлектрического стержня в случае отделенных электродов и частотного спектра колебаний рассматриваемого стержня со сплошным электродным покрытием.

Проведено экспериментальное исследование для пьезокерамического стержня длиной 10 см, толщиной 0,2 см и шириной 1 см из материала ЦТБС-3 ($\bar{\delta} = 0.15$). Удалось определить первые шесть резонансных частот в случаях отделенных и сплошных электродов. Эти данные представлены в таблице 2.

Таблица 2

$Z_m^{(отдел.)}$	$Z_m^{(сплошн.)}$
1.58903	1.57079
4.73322	4.68981
7.79580	7.74109
10.63869	10.61698
13.88188	13.86972
14.40144	15.37192

Сопоставляя представленные в таблице 2 частотные спектры, согласно теоретических выкладок, представленных в статье [18], получаем систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов ряда Фурье b_n :

$$(z)_{m(отдел.)}^2 - (z)_{m(спл.)}^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot b_n \cdot \alpha_{mn} + \frac{(-1)^m}{2\pi} \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{k=0}^K (-1)^k \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^N (-1)^n b_n \gamma_{mn}^{(k)} \right], \quad (23)$$

$m = 0, 1, 2, \dots, 5$, $N = 5$, $n = 0, 1, 2, \dots, 5$, $K = 5$, $k = 0, 1, 2, \dots, 5$, где введены обозначения

$$\alpha_{mn} = \frac{2}{n + 1/2} - \frac{1}{n + 2m + 3/2} - \frac{1}{n - 2m - 1/2},$$

$$\gamma_{mn}^{(k)} = \frac{1}{n - m + k + 1/2} + \frac{1}{n + m - k + 1/2} - \frac{1}{m + k + n + 3/2} - \frac{1}{n - m - k - 1/2}, \quad (24)$$

$\gamma_{mn}^{(k)} = \alpha_{mn}$, при $k = m$. Штрих означает, что в сумме пропущен член с номером $k = m$. Как было показано в [18,19], значения коэффициентов разложения можно найти не только из полной алгебраической системы (23), но и из уравнений диагонального вида

$$(z)_{m(отделен)}^2 - (z)_{m(сплошн.)}^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^N (-1)^n \cdot b_n \alpha_{mn} \quad (25)$$

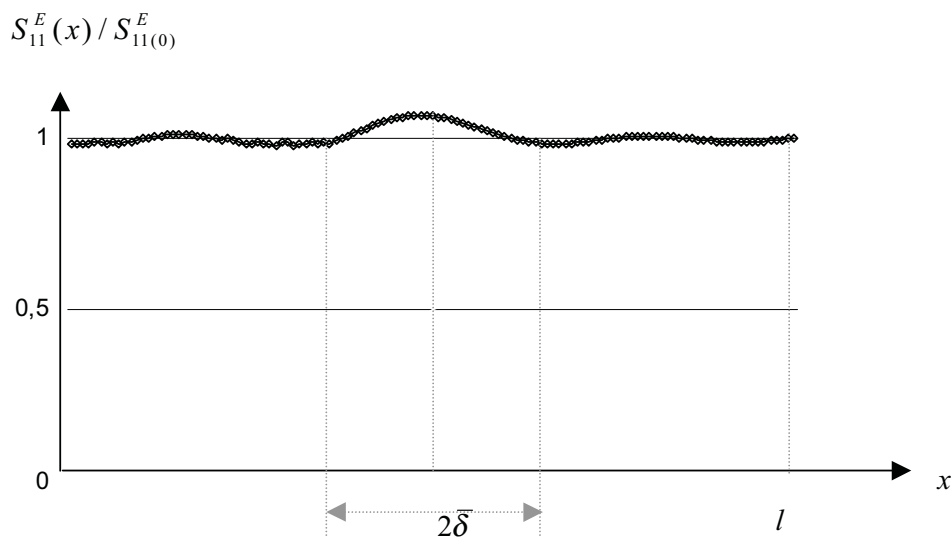


Рис. 2

На графике, представленном на рис.2 изображено томографическое восстановление неоднородности с учетом коэффициентов разложения b_n , полученных из системы (25).

На основании приведенного исследования можно сделать вывод о том, что результаты экспериментальных измерений с высокой точностью совпадают с теоретическими расчетами. Это дает основание утверждать, что методы низкочастотной томографии позволяют определить месторасположение и характер неоднородности упругих свойств тонкостенных элементов, в случае, когда известны их первые нормальные моды колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Testardi L. R., Norton S.J. Acoustic dimensional resonance tomography : some examples in one-dimensional system // J. Appl. Phys.- 1986.-**96**, N1.-P. 55-58/
2. Testardi L. R., Norton S.J., Hsich T. Dimensional resonance tomography // J. Appl. Phys.- 1984.-**56**, N2.-P. 68-81/
3. Ватуляян А.О. Математические модели и обратные задачи // Сорос. образоват. ж.- 1998.-N11.- С.143-148.
4. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1951.-**15**, N4.-С.345-354.
5. Жарий О.Ю., Улитко А.Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн.- Киев: Выща школа, 1989.-183 с.
6. Ильинский Н.Б. Обратные краевые задачи и их приложения // Сорос. образоват. ж. – 1997.-N4.-С.105-110.
7. Крейн М.Г. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции // Докл. АН СССР.-1953.-N4.- С.617-620.

8. Крейн М.Г. Об обратных задачах для неоднородной струны // Докл. АН СССР.-1952.- N5.-С.364-369.
9. Крейн М.Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля // Докл. АН СССР.-1951.- N1.-С.21-24.
10. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. - Киев: Наукова думка, 1978.-332 с.
11. Ниордсен Ф. Относительно обращения проблемы собственных чисел для задачи о колебаниях пластин // Проблемы механики твердого деформированного тела. - Л.: Судостроение, 1970.-С.287-294.
12. Потетюнко Э.Н., Черкесов Л.В., Шубин Д.С., Щербак Е.Н. Свободные колебания и обратные спектральные задачи. - М.: Вузовская книга, 2001.-288 с.
13. Романов В.Г. О численном методе решения одной обратной задачи для гиперболического уравнения // Сибирский матем. ж.-1996.-N3.-С.633-655.
14. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1986.- 287 с.
15. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния // Усп. матем. Наук.-1959.- 14, N4.-С.57-119.
16. Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г. Некорректные задачи астрофизики.-М.: Наука,1985.-247 с.
17. Юрченко М.Є. Резонансний метод визначення локальної неоднорідності пружних властивостей при повздожніх та згиних коливаннях стержня // Акуст. вісн. - 2002.-5, N4.-С. 51-60.
18. Юрченко М.Є. Резонансний метод визначення локальної неоднорідності пружних властивостей стержня // Вісник Київського ун-та, фізико-матем. науки, 2001.-N3.- С.152-161.