

ЕФЕКТИ ВІД УСТАЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ПРУЖНОГО БІМАТЕРІАЛЬНОГО ТІЛА З ТРІЩИНАМИ

В.В. Михаськів¹, О.І. Степанюк², І.Я. Жбадинський¹

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, 79060 Львів, вул. Наукова 36, e-mail: tex@iapmm.lviv.ua

²Львівська державна академія ветеринарної медицини, 79010 Львів,
вул. Пекарська 50

Методом граничних інтегральних рівнянь розв’язується симетрична задача взаємодії плоских тріщин, розташованих по один бік від поверхні розмежування ідеально з’єднаних пружних півпросторів і навантажених гармонічними за часом зусиллями. Числові результати стосуються тривимірного хвильового поля, зумовленого сусідством з міжматеріальною поверхнею двох кругових тріщин під внутрішнім гармонічним тиском з постійною амплітудою. Для різних співвідношень між механічними сталими складових частин тіла, що забезпечують відсутність приповерхневих хвиль (нулів функції Стоунлі), дається розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень вздовж контурів дефектів в області низькочастотних і резонансних хвильових чисел.

1. ВСТУП. Актуальність теоретичних досліджень поведінки тріщин у кусково-однорідних тілах за умови поширення у них пружних хвиль обґрунтовується можливістю в’ясування механізму динамічного руйнування структурованих матеріалів, зокрема волоконно підкріплених композитів, шаруватих гірських порід тощо. Досі у літературі розглядалися лише випадки динамічно навантаженого біматеріального тіла з ізольованою тріщиною у двовимірній [1] і тривимірній [2] постановках задач. Врахована у цій роботі динамічна взаємодія тріщин як із міжматеріальною поверхнею, так і між собою, дозволяє більш повно змодельовати реальну ситуацію наявності в матеріалі конгломерату мікрodefektів типу тріщин, а також передбачити характерне їх накопичення на передруйнівній стадії. Слід відзначити, що інерційні впливи тріщин одна на одну у тривимірному однорідному тілі достатньо повно вивчалися у роботах [3,4].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ У ГРАНИЧНО-ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ. Розглянемо ідеально сконтактовані пружні півпростори A і B з густинами ρ^A і ρ^B , модулями зсуву G^A і G^B і коефіцієнтами Пуассона ν^A і ν^B відповідно. Нехай у півпросторі A перпендикулярно до міжматеріальної поверхні розташовано M плоских тріщин по областях $S^{(n)}$ ($n = \overline{1, M}$), на протилежні поверхні яких діють самозрівноважені нормальні гармонічні навантаження з відомими амплітудами $N^{(n)}$ ($n = \overline{1, M}$) і циклічною частотою ω . Задання навантажень на поверхнях тріщин відповідає також сингулярній частині розв’язку задачі дифракції на тріщинах пружної хвилі, що викликає на місцях локалізації дефектів у біматеріалі зусилля протилежного знаку.

Внаслідок усталеного деформування тіла з тріщинами часову координату можна вилучити з аналізу шляхом введення у розв’язок експоненціального множника і перейти до відшукування амплітудних значень актуальних величин. Якщо пов’язати із n -ою тріщиною систему координат $O^{(n)}x_1^{(n)}x_2^{(n)}x_3^{(n)}$ так, щоб її початок $O^{(n)}$ збігався з геометричним центром області $S^{(n)}$, а вісь $O^{(n)}x_3^{(n)}$ була спрямована перпендикулярно до площини розташування тріщини (тріщин), то на основі принципу суперпозиції напруження у цій площині у матеріалі A запишуться наступним чином:

$$\sigma_{j3}(\mathbf{x}^{(n)}) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \sigma_{33}(\mathbf{x}^{(n)}) = \sum_{k=1}^M \sigma_{33k}(\mathbf{x}^{(kn)}), \quad (1)$$

де $\mathbf{x}^{(n)}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ – радіус-вектор точки визначення напружень у n -ій системі координат, $\mathbf{x}^{(kn)}(x_1^{(kn)}, x_2^{(kn)})$ – радіус-вектор цієї ж точки у k -ій системі координат, причому $\mathbf{x}^{(kn)} = \mathbf{O}^{(k)} \mathbf{O}^{(n)} + \mathbf{x}^{(n)}$, σ_{33k} – складова напружень від розкриття поверхонь k -ої тріщини, яка з урахуванням умов контакту на міжматеріальній поверхні (рівності компонент переміщень та зусиль при підході до неї зі сторони обох матеріалів) подається інтегрально [2]

$$\sigma_{33k}(\mathbf{x}^{(k)}) = -\frac{4G^A}{\omega_{2A}^2} \iint_{S^{(k)}} \Delta u^{(k)}(\xi^{(k)}) [R_{ho}(\|\mathbf{x}^{(k)} - \xi^{(k)}\|, \omega) - R_{bi}(\mathbf{x}^{(k)}, \xi^{(k)}, \omega)] dS_{\xi}. \quad (2)$$

У формулі (2) $\xi^{(k)}(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})$ – радіус-вектор точки інтегрування у k -ій системі координат, $\|\mathbf{x}^{(k)} - \xi^{(k)}\|$ – відстань між точками $\mathbf{x}^{(k)}$ та $\xi^{(k)}$, $\Delta u^{(k)} = [u_3^{(k)-} - u_3^{(k)+}] / 4\pi$ – стрибок нормальних переміщень протилежних поверхонь k -ої тріщини, ядра R_{ho} , R_{bi} мають вигляд

$$\begin{aligned} R_{ho}(r, \omega) &= \left[9 - 9i\omega_{1A}r + (\omega_{2A}^2 - 5\omega_{1A}^2)r^2 + i\omega_{1A}(2\omega_{1A}^2 - \omega_{2A}^2)r^3 + \frac{1}{4}(2\omega_{1A}^2 - \omega_{2A}^2)^2 r^4 \right] \times \\ &\quad \times \frac{\exp(i\omega_{1A}r)}{r^5} - [9 - 9i\omega_{2A}r - 4\omega_{2A}^2 r^2 + i\omega_{2A}^3 r^3] \frac{\exp(i\omega_{2A}r)}{r^5}, \\ R_{bi}(\mathbf{x}^{(k)}, \xi^{(k)}, \omega) &= R_{ho}\left(\|\mathbf{x}^{(k)} - \xi^{(k)}\|, \omega\right) + 2 \int_0^{\infty} \frac{\tau}{F_{Sr}(\tau)} \langle \Omega_1(\|\mathbf{x}_1^{(k)} - \xi_1^{(k)}\|, \omega, \tau) \times \\ &\quad \times \exp[-(2d^{(k)} - x_2^{(k)} - \xi_2^{(k)})V_1^A(\tau)] + \Omega_2(\|\mathbf{x}_1^{(k)} - \xi_1^{(k)}\|, \omega, \tau) \exp[-(2d^{(k)} - x_2^{(k)} - \\ &\quad - \xi_2^{(k)})V_2^A(\tau)] - \Omega_3(\|\mathbf{x}_1^{(k)} - \xi_1^{(k)}\|, \omega, \tau) \{ \exp[-(d^{(k)} - x_2^{(k)})V_2^A(\tau) - \\ &\quad - (d^{(k)} - \xi_2^{(k)})V_1^A(\tau)] + \exp[-(d^{(k)} - x_2^{(k)})V_1^A(\tau) - (d - \xi_2^{(k)})V_2^A(\tau)] \} \}, \end{aligned} \quad (3)$$

$\omega_{1A} = \omega/c_1^A$, $\omega_{2A} = \omega/c_2^A$ – хвильові числа, c_1^A , c_2^A – швидкості розповсюдження повздовжніх та поперечних хвиль у матеріалі A , $\bar{\mathbf{x}}^{(k)} = \bar{\mathbf{x}}^{(k)}(x_1^{(k)}, 2d^{(k)} - x_2^{(k)})$, $d^{(k)}$ – відстань від точки $O^{(k)}$ до міжматеріальної поверхні (глибина залягання k -ої тріщини),

$$V_j^A(\tau) = \sqrt{\tau^2 - \omega_{jA}^2} = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \omega_{jA}^2}, & \text{якщо } \tau \geq \omega_{jA}, \\ -i\sqrt{\omega_{jA}^2 - \tau^2}, & \text{якщо } \tau < \omega_{jA}, \end{cases}$$

$F_{Sr}(\tau)$ – відома функція Стоунлі, приведена у роботі [5], Ω_j ($j = \overline{1,3}$) – відомі функції, приведені у роботі [2].

Підставивши співвідношення (2) у формули (1) з подальшим задоволенням умов дії навантажень на поверхнях кожної із тріщин, приходимо до системи M граничних інтегральних рівнянь відносно функцій розкриття тріщин $\Delta u^{(n)}$ ($n = \overline{1, M}$) у вигляді

$$\sum_{k=1}^M \iint_{S^{(k)}} \Delta u^{(k)}(\xi^{(k)}) [R_{ho}(\mathbf{x}^{(kn)} - \xi^{(k)}, \omega) - R_{bi}(\mathbf{x}^{(kn)}, \xi^{(k)}, \omega)] dS_{\xi} = \frac{\omega_{2A}^2}{4G^A} N^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}),$$

$$\mathbf{x}^{(n)} \in S^{(n)}, \quad n = \overline{1, M}. \quad (4)$$

Ядро R_{ho} описує пряму (рафіновану) взаємодію тріщин і збігається з ядром інтегральних рівнянь для системи компланарних тріщин у однорідному тілі з механічними сталими матеріалу A , регулярне у випадку $F_{St} \neq 0$ ядро R_{bi} описує взаємодію тріщин через відбиті від міжматеріальної поверхні хвилі.

3. ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. Рівняння (4) є гіперсингулярними, що впливає із асимптотичного розвою ядра R_{ho} , коли $k = n$, в околі полюса $\xi^{(n)}$, а саме:

$$R_{ho}(\mathbf{x}^{(n)} - \xi^{(n)}, \omega) = \frac{\omega_{2A}^2}{4(1-v^A)} \left[\frac{1}{|\mathbf{x}^{(n)} - \xi^{(n)}|^3} + \frac{A\omega_{2A}^2}{|\mathbf{x}^{(n)} - \xi^{(n)}|} \right] + O(1), \quad (5)$$

де $A = [7 - 12v^A + 8(v^A)^2] / [8(1 - v^A)]$.

На підставі формули (5) у системі граничних інтегральних рівнянь (4) можна виділити особливі інтеграли шляхом її тотожного перетворення

$$\begin{aligned} & \iint_{S^{(n)}} \frac{\Delta u^{(n)}(\xi^{(n)})}{|\mathbf{x}^{(n)} - \xi^{(n)}|^3} dS_{\xi} + A\omega_{2A}^2 \iint_{S^{(n)}} \frac{\Delta u^{(n)}(\xi^{(n)})}{|\mathbf{x}^{(n)} - \xi^{(n)}|} dS_{\xi} + \iint_{S^{(n)}} \Delta u^{(n)}(\xi^{(n)}) \left[\frac{4(1-v^A)}{\omega_{2A}^2} \times \right. \\ & \times R_{ho}(\mathbf{x}^{(n)} - \xi^{(n)}, \omega) - \left. \frac{1}{|\mathbf{x}^{(n)} - \xi^{(n)}|^3} - \frac{A\omega_{2A}^2}{|\mathbf{x}^{(n)} - \xi^{(n)}|} \right] dS_{\xi} + \frac{4(1-v^A)}{\omega_{2A}^2} \sum_{k=1}^M \iint_{S^{(k)}} \Delta u^{(k)}(\xi^{(k)}) \times \\ & \times [(1 - \delta_{kn}) R_{ho}(\mathbf{x}^{(kn)} - \xi^{(k)}, \omega) - R_{bi}(\mathbf{x}^{(kn)}, \xi^{(k)}, \omega)] dS_{\xi} = \frac{1-v^A}{G^A} N^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{x}^{(n)} \in S^{(n)}, \quad n = \overline{1, M}.$$

Тут перші два інтеграли мають особливість ньютонівського (статичного) потенціалу, тому до них застосовна відома методика регуляризації [6], що передбачає для кругових тріщин подання

$$\Delta u^{(n)}(\xi^{(n)}) = \sqrt{(a^{(n)})^2 - (\xi_1^{(n)})^2 - (\xi_2^{(n)})^2} \alpha^{(n)}(\xi^{(n)}), \quad n = \overline{1, M}, \quad (7)$$

де $a^{(n)}$ – радіус n -го дефекту, $\alpha^{(n)}$ – невідомі функції. Подання (7) узгоджується із фізичним змістом функцій $\Delta u^{(n)}$ як стрибків переміщень протилежних поверхонь тріщин.

Подальша дискретизація рівнянь (6) базується на розбитті областей $S^{(n)}$ ($n = \overline{1, M}$) на граничні елементи, в межах яких припускається постійність шуканих функцій, і задоволенні рівнянь у колокаційних точках посередині введених елементів. Так отримаємо систему $Q \times M$ (Q – кількість граничних елементів) лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами відносно значень функцій $\alpha^{(n)}$ у вузлах дискретизації. Через ці функції визначаються коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) поблизу тріщин. Зокрема, КІН розриву $K_1^{(n)}$ для n -ї тріщини задається співвідношенням (внаслідок симетричності задачі щодо площини розташування тріщин КІН зсуву дорівнюють нулю):

$$K_1^{(n)}(\varphi^{(n)}) = -\frac{2G^A \pi \sqrt{\pi a^{(n)}}}{1 - \nu^A} \alpha^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}) \left| \begin{array}{l} x_1^{(n)} = a^{(n)} \cos \varphi^{(n)}, \\ x_2^{(n)} = a^{(n)} \sin \varphi^{(n)} \end{array} \right. \quad (8)$$

де $\varphi^{(n)}$ – кутова координата точки контуру n -ї тріщини.

Як приклад, розглянемо взаємодію у біматеріалі двох тріщин однакового радіуса $a^{(1)} = a^{(2)} = a$ під гармонічними зусиллями з постійною амплітудою $N^{(1)} = N^{(2)} = N_0 = \text{const}$. Під час обчислень відстань l між центрами тріщин вибирали як $l = 2,4a$, відстань між центрами тріщин і міжматеріальною поверхнею – як $d^{(1)} = d^{(2)} = d = 1,1a$. Густина, коефіцієнти Пуассона складових композиту поклали рівними між собою $\rho^A = \rho^B$, $\nu^A = \nu^B = 0,3$, а неоднорідність тіла забезпечували різними модулями зсуву матеріалів з показником $G = G^B / G^A$. Нормування КІН відриву здійснювали за допомогою статичного аналога $K_1^* = 2N_0 \sqrt{a/\pi}$ для поодинокі кругової тріщини під нормальним зусиллям N_0 у безмежному однорідному тілі.

На рис. 1–4 зображено залежності відносної амплітуди КІН відриву $\overline{K}_1^{(1)} = |K_1^{(1)}| / K_1^*$ для першої тріщини (КІН для другої тріщини визначаються із очевидних умов симетрії) від кутової координати $\varphi^{(1)}$ точки її контуру для низькочастотних та резонансних (пікових) коливань з хвильовими числами $\omega_{2,A} a = 0,7$ (рис. 1,2) та $\omega_{2,A} a = 1,5$ (рис. 3,4) відповідно. Відлік кута $\varphi^{(1)}$ проводиться від найближчої до сусідньої тріщини точки контуру, у напрямку до міжматеріальної поверхні. Рис. 1,3 відносяться до випадку, коли півпростір B володіє меншим модулем зсуву, ніж півпростір A : $G = 0,8$ (маркована квадратами крива); $G = 0,5$ (маркована кружечками крива); $G = 0,1$ (маркована трикутниками крива). Рис. 2,4 описують протилежне співвідношення між модулями зсуву: $G = 2$ (маркована квадратами крива); $G = 5$ (маркована кружечками крива); $G = 10$ (маркована трикутниками крива). З метою порівняння на всіх рисунках суцільною кривою зображено КІН для аналогічних тріщин в однорідному тілі, коли $G = 1$ (вони узгоджуються із результатами роботи [3]).

4. ВИСНОВКИ. Кутова залежність КІН в околі контуру тріщин, викликана тривимірністю хвильового поля, має різний характер у низькочастотній області та області резонансних хвильових чисел. У першому випадку (рис. 1,2) спостерігаються

закономірності, притаманні статичному (при $\omega \rightarrow 0$) аналогові задачі [7]: КІН вздовж усього контуру тріщин у біматеріалі більший від КІН для так само навантажених

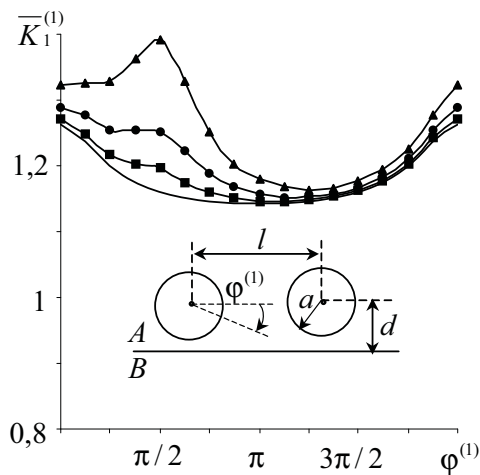


Рис. 1

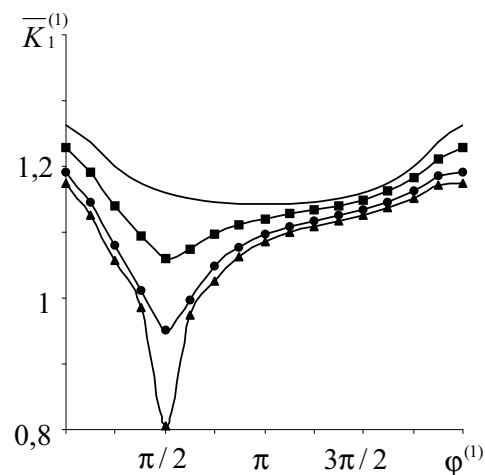


Рис. 2

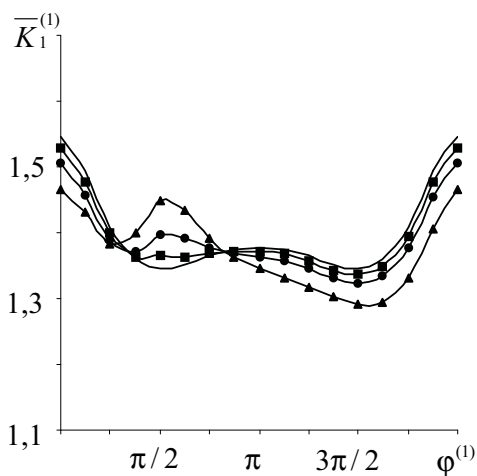


Рис. 3

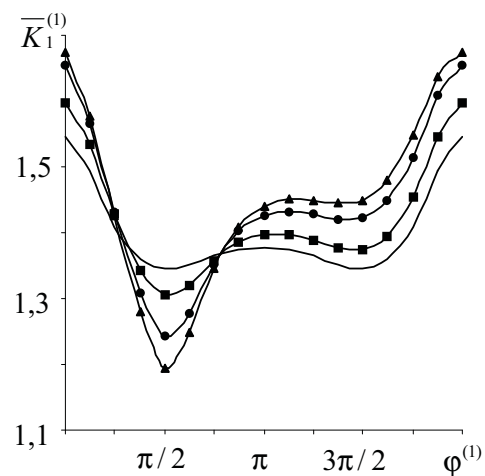


Рис. 4

тріщин у однорідному тілі, коли $G < 1$ (матеріал B “мякший”, ніж матеріал A), або менший – коли $G > 1$ (матеріал B жорсткіший, ніж матеріал A). У другому випадку (рис. 3,4) описані співвідношення між КІН справджуються лише у ближній до міжматеріальної поверхні зоні контуру тріщин, в той час як у інших точках контуру тріщин виконуються протилежні нерівності. Важливим наслідком із цього є підвищення (зниження) динамічної міцності матеріалу з тріщинами, який контактує з іншим матеріалом, що наділений

меншим (більшим) модулем зсуву. Показово, що зміна параметра G майже не позначається на межах зон збільшення чи зменшення КІН порівняно із відповідником для тріщин в однорідному тілі. Контрастніші матеріали проявляють усі вказані ефекти більш виразно.

Слід відзначити, що запропонований метод граничних інтегральних рівнянь відкриває перспективу числового дослідження тривимірних задач усталеного навантаження кусково-однорідних тіл з тріщинами, розташованими у різних матеріалах, а також, із залученням апарату інтегрального перетворення Фур'є за часом, – тривимірних нестационарних задач для біматеріального тіла з тріщинами.

Робота виконана за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект 01.07.00133).

ЛІТЕРАТУРА

1. Sih G.C., Chen E.P. Axisymmetric elastodynamic response from normal and radial impact of layered composites with embedded penny-shaped crack // *Jnt. J. Solids and Structures*. – 1980. – **16**. – P. 1093 – 1107.
2. Mykhas'kiv V.V., Stepanyuk O.I. Boundary integral analysis of symmetric problem for an infinite bimaterial solid with an embedded crack // *Meccanica* – 2001. – **36**, No. 4. – P. 479 – 495.
3. Kit H.S., Khaj M.V., Mykhas'kiv V.V., Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM // *Engng. Fact. Mech.* – 1996. – **55**, No. 2. – P. 191 – 207.
4. Mykhas'kiv V.V. Time-domain boundary element analysis in 3-D dynamic fracture mechanics // *Boundary Elements Communications*. – 1996. – **7**, No. 6. – P. 253 – 256.
5. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 283 с.
6. Кит Г.С., Хай М.В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 283с.
7. Хай М.В., Степанюк А.И. О взаимодействии трещин в кусочно-однородном теле // *Прикл. механика*. – 1992. – **28**, №12. – С. 46 – 56.