

**УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ
УПРУГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛ**

Марченко Т.А.

Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины

Численно-аналитическим методом [1,2] решается осесимметричная задача нестационарного контактного взаимодействия одинаковых упругих сферических тел, рассматриваются различные постановки задачи в зависимости от способа определения координат границы области контакта. Приводятся численные результаты силы реакции между рассматриваемыми сферами, нормальных напряжений в точке первоначального контакта.

1. *Постановка задачи.* Предполагается, что два одинаковых сферических тела двигаясь навстречу друг другу в определенный момент времени ($t = 0$) начинают взаимодействовать. Относительная скорость сближения тел $V_c(t) = V_c^{(2)}(t) - V_c^{(1)}(t)$ (где $V_c^{(1)}(t), V_c^{(2)}(t)$ соответственно скорость центров масс первой и второй сферы) направлена вдоль общей оси вращения и является величиной значительно меньшей скорости продольных волн. Последнее условие говорит о том, что поведение материала

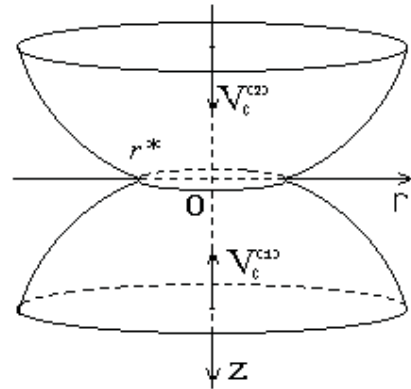


Рис.1

тел предполагается упругим. Свяжем тела с цилиндрической системой координат $Orz\theta$ так, чтобы ось Oz была направлена вдоль общей оси вращения, а точка начального контакта совпадала с началом системы координат - точкой O (Рис.1). Тогда в силу равноправия всех сечений плоскостями, содержащими ось Oz , ограничимся изучением процесса ударного взаимодействия в одном из них - плоскости zOr .

Введем безразмерные координаты и переменные:

$$\bar{r} = r/R; \quad \bar{z} = z/R; \quad \bar{u}_j^{(i)} = u_j^{(i)}/R; \quad \bar{M} = M/\rho R^3; \quad \bar{\sigma}_{jk}^{(i)} = \sigma_{jk}^{(i)}/K;$$

$$\bar{V}^{(i)} = V^{(i)}/c_0; \quad \bar{t} = c_0 t/R; \quad \bar{F} = F/KR^2; \quad j, k = r, z; \quad i = 1, 2;$$

где R - характерный линейный размер тела; M - масса каждого тела; F - сила реакции; $u_j^{(i)}$ - компоненты вектора перемещений; $V_c^{(i)}$ - скорости центров масс каждого тела; $\sigma_{jk}^{(i)}$ - компоненты тензора напряжений; c_0 - скорость распространения звуковых волн в материале при условии, что его модуль сдвига равняется нулю. В дальнейшем будут использоваться лишь безразмерные координаты и переменные, поэтому черточка над ними опускается.

Деформирование материала описывается с помощью двух скалярных волновых потенциалов $\varphi^{(i)}, \psi^{(i)}$ ($i=1,2$), которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\Delta\varphi^{(i)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial t^2}; \quad \Delta\psi^{(i)} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial t^2}; \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1)$$

Перемещения и напряжения выражаются через потенциалы $\varphi^{(i)}$ и $\psi^{(i)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r^{(i)} &= \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial r \partial z}; & u_z^{(i)} &= \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r}; \\ \sigma_{zz}^{(i)} &= (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left\{ \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 \psi^{(i)}}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial r \partial z} \right\} \\ \sigma_{rz}^{(i)} &= 2\beta^2 \left\{ \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial r \partial z} - \frac{1}{2\beta^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^3 \psi^{(i)}}{\partial r \partial z^2} \right\} \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (2)$$

Процесс взаимодействия рассматривается на промежутке времени, в течение которого волны возмущений, отразившиеся от тыльных поверхностей тел, не успевают возвратиться к области контакта. Учитывая последнее, а также то, что лобовая поверхность тел затуплена, а относительная скорость сближения, по сравнению со скоростью распространения продольных волн в материале, мала, граничные условия могут быть сформулированы на плоскости $rO\theta$. Тогда при отсутствии трения между контактирующими поверхностями граничные условия будут состоять в равенстве нормальных скоростей деформирования и нормальных напряжений в области контакта, отсутствии нормальных напряжений вне зоны контакта и отсутствии касательных напряжений на всей лобовой поверхности, а именно:

$$\begin{aligned} V_c^{(1)} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial t} \Big|_{z=0} &= V_c^{(2)} + \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial t} \Big|_{z=0}, \quad |x| \in (0 \dots |x^*|) \\ \sigma_{zz}^{(1)} \Big|_{z=0} &= \sigma_{zz}^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad |r| \in (0 \dots |r^*|) \\ \sigma_{zz}^{(i)} \Big|_{z=0} &= 0, \quad |r| \notin (0 \dots |r^*|); \quad \sigma_{rz}^{(i)} \Big|_{z=0} = 0, \quad |r| \geq 0, \quad i=1..2. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия должны быть дополнены нулевыми начальными условиями для потенциалов $\varphi^{(i)}$ и $\psi^{(i)}$

$$\varphi^{(i)} = \psi^{(i)} = \dot{\varphi}^{(i)} = \dot{\psi}^{(i)} = 0 \quad (t = 0), \quad (4)$$

а также уравнениями движения тел, в качестве которых будем рассматривать уравнения движения центров масс взаимодействующих сферических тел:

$$M \frac{dV_c^{(1)}}{dt} = F(t); \quad M \frac{dV_c^{(2)}}{dt} = -F(t); \quad (5)$$

$$F(t) = 2 \int_0^{r^*} \sigma_{zz}(t, r, 0) dx; \quad V_c^{(1)}(0) = V_0^{(1)}; \quad V_c^{(2)}(0) = V_0^{(2)}.$$

В силу выбора временного интервала, можно выделить ограниченную по r область, для которой отраженные от боковых границ волны не успевают возвратиться к области контакта. В этом случае взаимодействующие тела можно заменить полубесконечными цилиндрами, на торцевых поверхностях которых реализуются сформулированные выше граничные условия, а условиями на боковых поверхностях цилиндров распорядиться по своему. В частности, для удобства разделения переменных в общем решении, предположим, что на боковых гранях имеют место следующие условия:

$$u_r|_{r=l} = 0, \quad \sigma_{zr}|_{r=l} = 0. \quad (6)$$

В бесконечно удаленных точках возмущения отсутствуют:

$$\varphi^{(1)} \rightarrow 0, \quad \psi^{(1)} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty; \quad \varphi^{(2)} \rightarrow 0, \quad \psi^{(2)} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (7)$$

Размер области контакта $r^*(t)$ в общем случае определяется из условия:

$$w(t) - f(r) - u_z(t, r, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq r^*(t) \\ < 0, & r > r^*(t) \end{cases}, \quad (8)$$

где $w(t)$ - перемещение центров масс взаимодействующих тел, $f(r)$ - в общем случае кусочно-гладкая функция, которая при вращении вокруг оси Oz образует поверхность, ограничивающую рассматриваемые тела. В более упрощенной постановке координата точки смены граничных условий r^* определяется как радиальная координата точки пересечения недеформированных контуров тел при глубине взаимного проникания z^* .

Система уравнений (1.1) - (1.8) составляют смешанную начально-краевую задачу с неизвестной подвижной границей.

2. *Метод решения.* Применим к волновым уравнениям (1) преобразование Лапласа по t с параметром s и метод Фурье разделение переменных. В результате, учитывая условие (7) отсутствия возмущений в бесконечно удаленных точках, в пространстве изображений получим следующие представления для потенциалов $\varphi^{(i)L}$ и $\psi^{(i)L}$ ($i = 1, 2$)

$$\varphi^{(i)L} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(i)}(s) \cdot e^{zP_i} J_0(\lambda_n r), \quad \psi^{(i)L} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(i)}(s) \cdot e^{zS_i} J_0(\lambda_n r); \quad (9)$$

$$P_i = (-1)^i \sqrt{s^2/\alpha^2 + \lambda_n^2}, \quad S_i = (-1)^i \sqrt{s^2/\beta^2 + \lambda_n^2}.$$

Коэффициенты $A_n^{(i)}(s)$, $B_n^{(i)}(s)$ в системе (9) определяются из граничных условий, λ_n - собственные числа задачи, которые являются корнями уравнений $J_1(\lambda_n l) = 0$ ($n = \overline{0, \infty}$).

Из представлений (9) и зависимостей (2) следует, что искомые функции на поверхностях тел представляются в виде рядов по системе собственных функций задачи. При этом соответствующие гармоники снабжаются индексом n

$$\sigma_{zz}^{(i)}(t, r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zzn}^{(i)}(t) J_0(\lambda_n r); \quad V^{(i)}(t, r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(i)}(t) J_0(\lambda_n r).$$

Для удовлетворения смешанных граничных условий (3) найдем зависимость между коэффициентами разложений в ряды нормального напряжения $\sigma_{zzn}^{(i)}(t)$ и скорости деформирования поверхности $V_n^{(i)}(t)$. Для этого предположим, что на лобовой поверхности тел ($r \leq l$) задана вертикальная составляющая скорости деформирования $V^{(i)}(t, r)$

$$V^{(i)}(t, r) = \left. \frac{\partial u_z^{(i)}(t, r, 0)}{\partial t} \right|_{z=0}, \quad (11)$$

касательное напряжение равняется нулю

$$\sigma_{rz}^{(i)}(t, r, 0) \Big|_{z=0} = 0, \quad r \leq l. \quad (12)$$

Удовлетворяя преобразованным по Лапласу условиям (11), (12) с помощью представления (2) сначала в пространстве изображений, а потом и в пространстве оригиналов получаем следующую связь между соответствующими коэффициентами при n -х гармониках скорости деформирования и нормального напряжения на поверхностях взаимодействующих тел ($n = \overline{0, \infty}$)

$$\sigma_{zzn}^{(i)}(t) = (-1)^i \alpha \left(V_n^{(i)}(t) + \int_0^t V_n^{(i)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right), \quad i=1,2. \quad (13)$$

$$F_n(t) = -\lambda_n \alpha J_1(\lambda_n \alpha t) + 4\beta^2 \lambda_n^2 \int_0^t \left(J_0(\lambda_n \alpha \tau) - \frac{\beta}{\alpha} J_0(\lambda_n \beta \tau) \right) \left(1 + \beta^2 \lambda_n^2 \frac{(t-\tau)^2}{2} \right) d\tau$$

Используя зависимость (13), перейдем к удовлетворению смешанных граничных условий (3). После соответствующих разложений в ряды и использования свойства ортогональности Бесселевых функций получаем две бесконечных системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $V_n^{(1)}(t), V_n^{(2)}(t)$:

$$\begin{aligned} V_n^{(1)}(t) + \frac{1}{2} \int_0^t V_n^{(1)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} \int_0^t V_m^{(2)}(\tau) F_m(t-\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha'_{mn} \int_0^t V_m^{(1)}(\tau) F_m(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} c_n(r^*) V_c(t); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} V_n^{(2)}(t) + \frac{1}{2} \int_0^t V_n^{(2)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} \int_0^t V_m^{(1)}(\tau) F_m(t-\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha'_{mn} \int_0^t V_m^{(2)}(\tau) F_m(t-\tau) d\tau = -\frac{1}{2} c_n(r^*) V_c(t); \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, в случае соударения двух одинаковых упругих тел вращения смешанная задача сводится к решению бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода (14) или (15) (они отличаются лишь знаком в правой части), которая должна быть дополнена уравнением движения тел как целых (5).

3. *Числовые результаты.* Целью вычислений было определение развития нормальных напряжений и скоростей деформирования поверхности тела, определение изменения области контакта и силы взаимодействия тел в зависимости от начальной скорости сближения, массы тел и их упругих характеристик.

Интегралы в системе (14) и выражениях (5), (13) вычислялись по формуле Грегори [3]. Уравнение (5) с усеченной правой частью решалось методом Адамса [4]. И в формуле Грегори, и в формуле Адамса удерживались разности до пятого порядка включительно. Бесконечные системы интегральных уравнений подвергались редукции. Порядок редукции выбирался из соображений практической сходимости. Для сглаживания явлений Гиббса применялись σ -множители Гиббса. В частности, достоверные числовые результаты удалось получить при удержании 80 уравнений в бесконечной системе (15), при этом шаг интегрирования был выбран $\Delta t = 0,025$. Кривые на рисунках соответствуют случаю взаимодействия двух одинаковых упругих сфер ($f(r) = 1 - \sqrt{1 - r^2}$). Сплошной линией на рисунках приводятся результаты решения задачи, когда граница области контакта определялась из условия (8), пунктирной – как точка пересечения недеформируемых контуров рассматриваемых тел (учет изменения формы поверхности, непосредственно примыкающей к области, контакта не производится).

На рис.2, рис.3 показано соответственно развитие во времени нормального напряжения

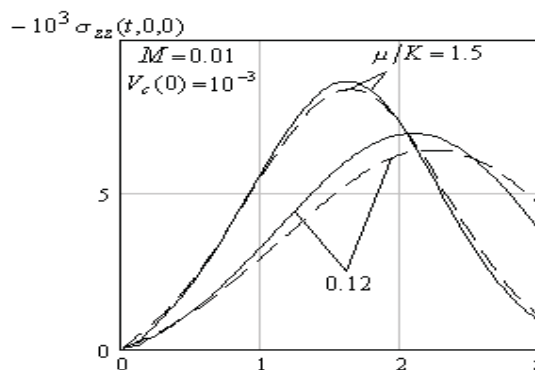


Рис. 2

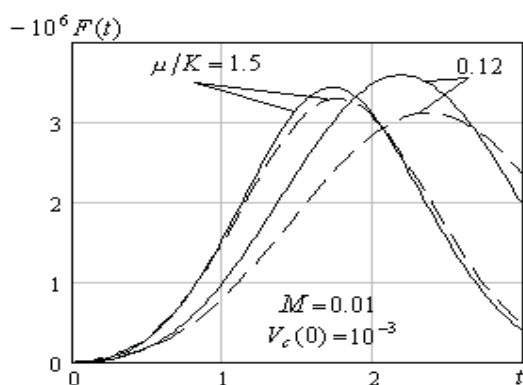


Рис. 3

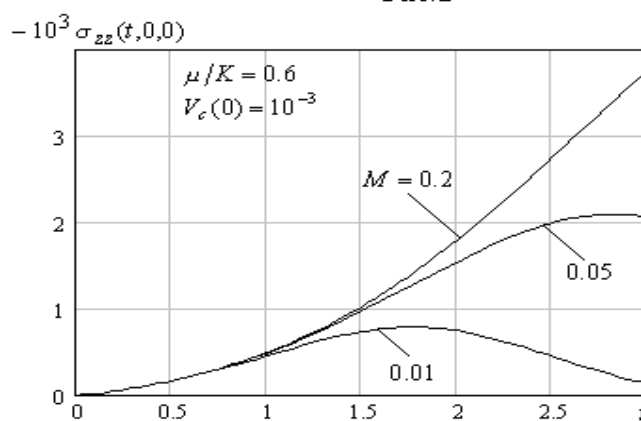


Рис. 4

в точке первоначального контакта $\sigma_{zz}^{(i)}(t,0,0)$ и силы реакции $F(t)$ для разных значений отношения $\mu/K = 0,12; 0,6; 1,5$, при этом $-10^3 \sigma_{zz}(t,0,0)$

$M = 0.01$, $V_c(0) = 10^{-3}$. На заданном временном интервале достигается максимальное значение как напряжения, так и силы взаимодействия, с увеличением отношения μ/K максимум достигается раньше.

На рис.4 изображена зависимость нормального напряжения $\sigma_{zz}^{(i)}(t,0,0)$ от массы взаимодействующих тел. Начальная относительная скорость сближения тел -

$V_c(0) = 10^{-3}$, масса - $M = 0.01$. С увеличением массы растет максимальное значение нормального напряжения, которое достигается позднее.

Рис.5 демонстрирует зависимость величины напряжения в лобовой точке $\sigma_{zz}^{(i)}(t,0,0)$ от начальной скорости взаимодействующих тел $V_c(0) = 2 \cdot 10^{-3}; 10^{-3}; 6 \cdot 10^{-4}$. Максимальное значение нормального напряжения в лобовой точке пропорционально относительной скорости соударения.

Таким образом, неучет деформирования поверхности, прилегающей к области контакта приводит к уменьшению величины нормального напряжения по сравнению с результатами, полученными в более строгой постановке. Изменение массы и начальной скорости значительно влияет на величину и характер изменения со временем нормального напряжения между взаимодействующими телами.

1. Кубенко В.Д. Об одном способе решения задачи проникания тел в акустическую и упругую среду // Пробл. динамики взаимодействия деформируемых сред. – Ереван: Изд-во АрмССР, 1984. – С. 183-187
2. Кубенко В.Д., Попов С.Н. Осесимметричная задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства // Прикл. механика. – 1989. – **25**, №7. – С. 16-24.
3. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1968. – 400 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.

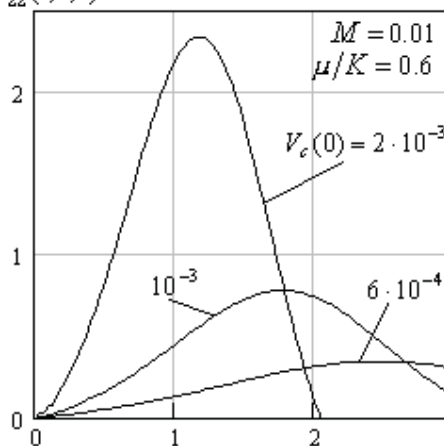


Рис.5