

## ХАОТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ЭФФЕКТОМ ЗОММЕРФЕЛЬДА – КОНОНЕНКО

Т.С. Краснопольская

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

Под эффектом Зоммерфельда – Кононенко [1] понимают совокупность специфических явлений, обусловленных взаимодействием механизмов возбуждения (источников энергии) и колебательной нагрузки. Особенно существенна его роль в тех случаях, когда мощность механизма сопоставима с мощностью, потребляемой нагрузкой на внутреннем демпфировании. Это – случай, так называемой, “ограниченной” мощности механизма или неидеального источника энергии, когда нагрузка находится под “ограниченным” (неидеальным) возбуждением. Известно, что все машины излучают акустическую энергию, т. е. являются источниками шума. Как правило, на практике этот фактор рассматривается как нежелательный и вредный. Более того, в некоторых случаях потеря энергии на излучение звуковых и упругих волн в окружающих объектах может оказываться существенной для динамики самих машин и механизмов. Характерные особенности ограниченного возбуждения гидроупругих систем, где существенная доля использованной энергии транспортируется волнами, были изучены в работах [2,3], в которых рассматривались колебания бесконечной пластины в контакте с акустической средой, при возбуждении пластины в некоторой точке или вдоль прямой.

Условие ограниченности мощности механизма приводит к тому, что его динамика начинает зависеть от поведения нагрузки, а с математической точки зрения описывается неполной системой уравнений. Замыкание указанной системы осуществляется добавлением уравнения, представляющего поведение нагрузки. Вследствие этого размерность математической модели увеличивается. Известно, что увеличение порядка совокупной математической модели может быть решающим фактором, делающим возможным появление хаотических режимов. В общем случае, хаос может появляться в решениях гладких (дифференцируемых) систем нелинейных уравнений третьего или более высоких порядков.

В этом случае механизм не просто количественно “чувствует” эффект нагрузки, но его функционирование может происходить согласно качественно иным законам. До обнаружения хаоса в детерминированных системах при построениях математических моделей различных физических процессов обычно использовался принцип редукции, т. е. деления всего процесса на части и анализа каждой подсистемы в отдельности. Существование хаотических режимов привело к пониманию того, что полная, сложная система может иметь сложный режим поведения именно вследствие взаимодействия между несколькими компонентами. В работах [4,5,6] рассматривались условия возникновения хаоса при взаимодействии между механизмом и вибрационными системами.

Рассмотрим двигатель ограниченной мощности с эксцентриком [1], установленный на фундаменте. Фундамент моделируем одноступенной упругой системой – нелинейной пружиной. Будем считать, что последняя соединена с бесконечной упругой пластиной, контактирующей с акустическим полупространством. Пусть упругая пластина имеет толщину  $h$  и плотность  $\rho_0$ , ее срединная поверхность совпадает с плоскостью  $x=0$ , а полупространство  $x<0$  заполнено жидкостью с плотностью  $\rho$ , и скоростью звука  $c$ . Будем также полагать, что пружина имеет жесткость  $c_0 - \gamma u^2$  (где  $u$  – деформация

пружины) и помещена в точке  $O$ , являющейся началом цилиндрической системы координаты  $r, \varphi, x$ . Полагаем, что двигатель со статической массой  $M$  имеет дисбаланс – неуравновешенную массу  $m$  – на расстоянии  $a$  от оси вращения вала. При вращении вала вертикальная составляющая силы инерции, возникающей вследствие дисбаланса, составляет  $ma \frac{d^2}{dt^2}(1 - \cos \Theta)$ , где  $\Theta$  – угол поворота вала, отсчитываемый от верхнего положения вертикальной оси. При возбуждении системы двигателем с ограниченной мощностью угловая скорость вала  $\dot{\Theta}$  не является заданной величиной, а представляет собой дополнительную неизвестную функцию. Причиной этого является то, что вращение вала находится под влиянием обратного воздействия колебаний пружины и пластины, а также волн в гидроупругой системе.

Уравнения, описывающие упругие вибрации фундамента  $u(t)$  и изгибные колебания пластины  $w(r, t)$ , запишем в виде [1,2,3]

$$\begin{aligned} M \left[ \ddot{u} + \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2} \right] + \kappa_0 \dot{u} + c_0 u - \gamma u^3 &= ma \frac{d^2}{dt^2}(1 - \cos \Theta), \\ D \Delta^2 w(r, t) + \rho_0 h \frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial t^2} &= (c_0 u - \gamma u^3) \frac{\delta(r)}{2\pi r} + p(r, 0, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r};$$

$\kappa_0$  – коэффициент демпфирования;  $D$  – изгибная жесткость пластины;  $\delta(r)$  – функция Дирака;  $p(r, x, t)$  – акустическое давление в жидкости (при  $x < 0$ ), удовлетворяющее волновому уравнению

$$\Delta p(r, x, t) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{c^2 \partial t^2}. \quad (2)$$

Уравнение вращения вала имеет вид

$$I \ddot{\Theta} = L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) + ma \sin \Theta \left[ g + \ddot{u} + \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2} \right]. \quad (3)$$

Здесь  $I$  – момент инерции вала ротора;  $L(\dot{\Theta})$  – движущий момент;  $H(\dot{\Theta})$  – момент сил сопротивления двигателя [1,2,3];  $g$  – ускорение свободного падения.

Чтобы упростить решение нелинейной системы дифференциальных уравнений, рассмотрим случай резонансных колебаний фундамента и предположим, что  $u(t) \gg w(r, t)$ . Тогда исследуемую систему уравнений (1)–(3) можно разделить на две подсистемы. Первая из них описывает процесс резонансных колебаний фундамента, возбуждаемых двигателем ограниченной мощности:

$$\begin{aligned} M \ddot{u} + \kappa_0 \dot{u} + c_0 u - \gamma u^3 &= ma \frac{d^2}{dt^2}(1 - \cos \Theta) \\ I \ddot{\Theta} &= L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) + ma \sin \Theta [g + \ddot{u}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Вторая, связанная с первой, описывает динамику бесконечной гидроупругой системы:

$$\begin{aligned} D \Delta^2 w + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (c_0 u - \gamma u^3) \frac{\delta(r)}{2\pi r} + p(r, 0, t), \\ \Delta p + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 p}{c^2 \partial t^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ограничимся рассмотрением установившихся режимов взаимодействия подсистем (4) и (5). Для этого введем малый положительный параметр  $\epsilon = \frac{m}{M}$ . Вращательную

скорость вала  $\dot{\Theta}$  считаем близкой к собственной частоте фундамента  $\omega_0 = (c_0/M)^{1/2}$ , т.е.  $\dot{\Theta} = \omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon^{2/3}\omega_0\nu(\tau)$ , где  $\tau = \epsilon^{2/3}\Theta(t)/2$  – “медленное” время. Резонансное решение для  $u$  ищем в форме

$$u(t) = \epsilon^{1/3}a[\alpha(\tau) \cos \Theta + \beta(\tau) \sin \Theta]. \quad (6)$$

Тогда для новых безразмерных переменных  $\alpha(\tau)$  и  $\beta(\tau)$  после усреднения по быстрому времени  $\Theta(t)$  получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\tau} &= -\eta\alpha - \nu\beta - \gamma_1(\alpha^2\beta + \beta^3), \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= -\eta\beta + \nu\alpha + \gamma_1(\alpha^3 + \alpha\beta^2) + 1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где} \quad \eta = \frac{\kappa_0}{M\epsilon^{2/3}\omega_0}; \quad \gamma_1 = \frac{3\gamma}{4M\omega_0^2}.$$

Поскольку мы исследуем установившиеся режимы взаимодействия, то в качестве движущего момента в двигателе  $L(\dot{\Theta})$  будем использовать его статическую характеристику [3]:

$$(L - H)I^{-1} = 2\epsilon^{2/3}\omega_0^{-1}M_1(\dot{\Theta}).$$

Введя замену переменных

$$\dot{\Theta} = \Omega(\tau) \quad (8)$$

и используя процедуру усреднения по быстрому времени  $\Theta$ , запишем уравнение для  $\Omega$  в виде

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = M_1(\Omega) - \mu\beta. \quad (9)$$

Здесь  $\mu = m^{1/3}M^{2/3}a^2\omega_0I^{-1}$ . Аппроксимируем статическую характеристику двигателя линейной функцией:

$$M_1(\Omega) = N_0 - N_1\Omega, \quad (10)$$

где  $N_0, N_1$  – постоянные. Тогда справедливо следующее уравнение для переменной расстройки частоты  $\nu$ :

$$\frac{d\nu}{d\tau} = N_2 - N_1\nu - \mu_1\beta. \quad (11)$$

Здесь  $N_2 = 2M^{2/3}m^{-2/3}(N_0\omega_0^{-1} - N_1)$ ;  $\mu_1 = 2M^{4/3}m^{-1/3}a^2I^{-1}$ . Таким образом, сложное резонансное взаимодействие между колебаниями фундамента и вращением вала приводит к рассмотрению двух нелинейных связанных уравнений (7) и линейного уравнения (11).

Установившиеся режимы, реализующиеся в системе уравнений (7), (11), соответствуют асимптотическим траекториям в трехмерном фазовом пространстве  $(\alpha, \beta, \nu)$ . Возможны следующие типы асимптотических траекторий: некоторая фиксированная точка (размерность ноль), замкнутая кривая (размерность единица), тор (размерность два), странный аттрактор (фрактальная размерность). Все они, кроме последнего, являются регулярными. Фиксированные точки (точки равновесия) соответствуют стационарным решениям системы, когда

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{d\nu}{d\tau} = 0. \quad (12)$$

Замкнутые кривые в фазовом пространстве и кривые на торе описывают соответственно периодически и квазипериодически изменяющиеся  $\alpha(\tau)$ ,  $\beta(\tau)$  и  $\nu(\tau)$ . Странному аттрактору, когда  $\alpha(\tau)$ ,  $\beta(\tau)$  и  $\nu(\tau)$  изменяются непредсказуемо, соответствует хаотический установившийся режим в регулярной системе уравнений (7), (11).

В рассматриваемой системе были обнаружены все возможные типы траекторий, как регулярные, так и хаотические. Заметим, что при этом использовался метод Рунге – Кутты четвертого порядка.

Система уравнений (9), (13) содержит пять параметров  $(\eta, \gamma_1, N_2, N_1, \mu_1)$ , которые, в совокупности с начальными условиями, определяют ее поведение в установившихся режимах. При расчетах принималось, что

$$\eta=0.1, \quad \gamma_1=0.125, \quad N_2=0.04, \quad \mu_1=0.5. \quad (13)$$

Параметр  $N_1$  рассматривался как бифуркационный и варьировался с целью определения всех возможных классов асимптотических траекторий. За исключением специально оговоренных случаев, начальные условия полагались нулевыми:

$$\alpha(0) = \beta(0) = \nu(0) = 0.$$

Известно, что хаотические решения обладают свойством локальной неустойчивости. Математически это выражается в том, что для них положителен хотя бы один (максимальный) показатель Ляпунова  $\lambda_0$ . Численный эксперимент показывает, что в системе имеются две такие области хаотических режимов:  $0.489 \leq N_1 \leq 0.506$  и  $0.631 \leq N_1 \leq 0.671$ .

При  $0 < N_1 < 0.382$  в системе существует положение устойчивого равновесия, соответствующее первому классу установившихся режимов – стационарному. Периодические же решения системы реализуются при значениях параметра  $N_1$ , лежащих в интервалах  $0.382 \leq N_1 < 0.489$ ,  $0.506 < N_1 < 0.631$  и  $0.671 < N_1 < 3.0$ .

Таким образом, в системе “двигатель – фундамент” обнаружены три класса установившихся режимов: (1) стационарные режимы (колебания фундамента происходят с постоянной амплитудой и частотой, а вал двигателя вращается с постоянной скоростью; (2) режимы с периодически изменяющимися амплитудой и частотой колебаний фундамента, скорость вала периодически изменяется во времени; (3) хаотические режимы (амплитуда и частота колебаний, а также скорость вращения двигателя изменяются во времени хаотично). Последний режим устанавливается в системе асимптотически и она не может выйти из него без дополнительного внешнего воздействия.

Приступим к определению прогиба пластины и давления в жидкости. Применим метод интегральных преобразований Лапласа по времени и Ханкеля по радиальной координате. Общие выражения для прогиба пластины и давления в жидкости представим в виде [2,3,5,6]

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_0^{\infty} \zeta_1(\lambda, s) J_0(\lambda r) \lambda e^{st} d\lambda ds, \\ p(r, x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_0^{\infty} \zeta_2(\lambda, s) J_0(\lambda r) e^{x\sqrt{\lambda^2+s^2/c^2}} \lambda e^{st} d\lambda ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $J_0(\lambda r)$  – функция Бесселя нулевого порядка. Знак у квадратного корня в экспоненте (14) всегда выбирается положительным, чтобы выполнялось условие  $\sqrt{\lambda^2+s^2/c^2} > 0$  и давление при  $x \rightarrow -\infty$  не возрастало.

Удовлетворение граничного условия приводит к следующей связи изображений искомых функций  $\zeta_1(\lambda, s)$  и  $\zeta_2(\lambda, s)$ :

$$\zeta_2(\lambda, s) = -\frac{\rho s^2}{\sqrt{\lambda^2 + s^2/c^2}} \zeta_1(\lambda, s). \quad (15)$$

Преобразовав по Лапласу функцию  $c_0u - \gamma u^3$ , введем в рассмотрение её функцию-изображение  $\Phi(s)$  Тогда искомое решение запишется как

$$w(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(s)}{\xi(\lambda, s)} J_0(\lambda r) \lambda e^{st} d\lambda ds, \quad (16)$$

$$p(r, x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_0^{\infty} \frac{\rho s^2 \Phi(s)}{\xi(\lambda, s)} J_0(\lambda r) \lambda e^{st} \frac{e^{x\sqrt{\lambda^2+s^2/c^2}}}{\sqrt{\lambda^2+s^2/c^2}} d\lambda ds.$$

Здесь

$$\xi(\lambda, s) = D\lambda^4 + \rho_0 h s^2 + \frac{\rho s^2}{\sqrt{\lambda^2 + s^2/c^2}}. \quad (17)$$

Таким образом, по изображению функции силового воздействия и соотношениям (18) можно определить конкретный вид решения для изгибных колебаний пластины  $w(r, t)$  и акустического давления  $p(r, x, t)$ .

Для первого класса установившихся режимов колебаний фундамента, когда  $u(t)$  является периодической функцией времени с постоянными амплитудами  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  и ча-

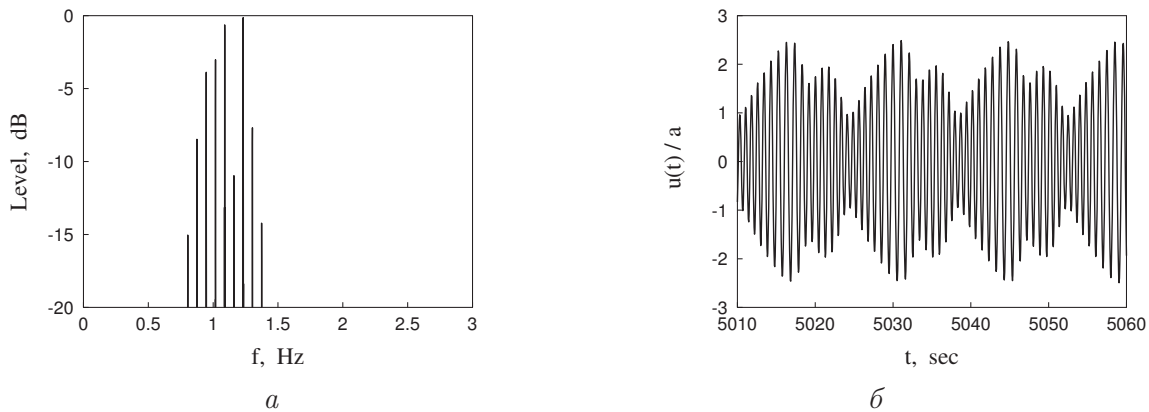


Рис. 1. Периодический режим для  $N_1 = 0.70$ :

а – спектральная плотность, б – временная зависимость  $u/a$

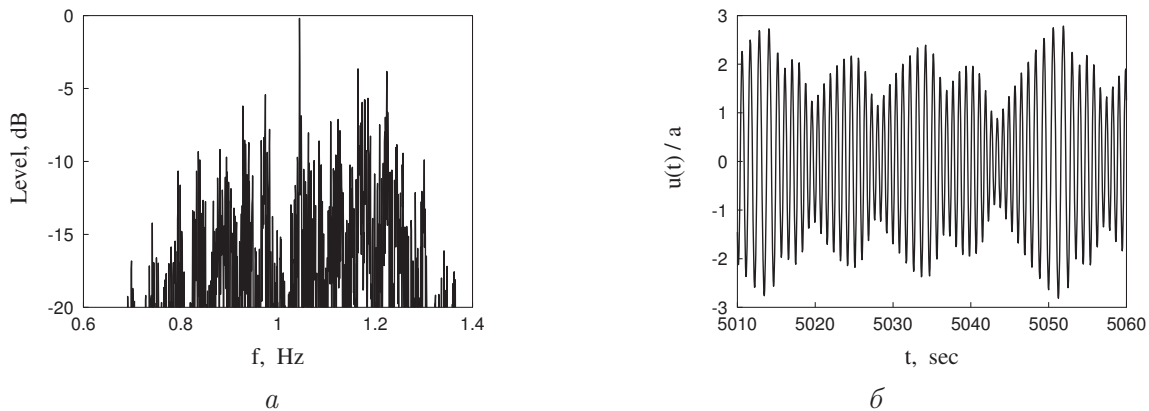


Рис. 2. Хаотический режим для  $N_1 = 0.64$  и нулевых начальных условий:

а – спектральная плотность, б – временная зависимость  $u/a$

стойкой  $\Omega_0$ , колебания пластины  $w(r, t)$  имеют форму с конечным числом гармоник [5,6]. Для второго класса установившихся режимов колебаний фундамента, когда  $u(t)$  представляет собой модулированную периодическую функцию (амплитуда и частота которой также являются периодическими функциями времени). В этом случае колебания пластины и давление в жидкости описываются сложными, но регулярными функциями времени, содержащими счетное число гармоник ряда Фурье [5,6]. Пример спектральной плотности и временной зависимости функции  $u(t)/a$ , характерных для модулированного периодического режима, приведен на рисунке 1. Расчет проводился при  $\epsilon=0.1$ ,  $f_0=\omega_0/(2\pi)\approx 1.44$  Гц и  $N_1=0.70$ .

Как видно из графика, главный пик частотного спектра соответствует  $f_0$ , а остальные расположены регулярно с интервалом  $f_a=\epsilon^{2/3}\omega f_0/2$ . В этом случае, вследствие линейности задачи, выражения (18) для  $w$  и  $p$  будут представлять собой бесконечные суммы. Для каждой частоты в отдельности необходимо рассматривать задачу о волнах, возбуждаемых в гидроупругом полупространстве. Для этого следует выполнить обратное преобразование Ханкеля с учетом особенностей подынтегрального выражения. Заметим, что на рисунке видны девять пиков с уровнями, превышающими  $-20$  дБ относительно максимума. Из этого следует, что основная энергия системы сосредоточена между 0.6 и 1.4 Гц. Таким образом,  $w$  и  $p$  можно с достаточной точностью аппроксимировать суммой девяти решений.

Наконец, для третьего класса установившихся режимов колебаний фундамента, когда  $u(t)$  является хаотической функцией с хаотически изменяющейся частотой, функция  $u(t)$  имеет непрерывный спектр (рисунок 2). Расчет проводился при  $\epsilon=0.1$ ,  $f_0\approx 1.44$  Гц и  $N_1=0.64$ . Все решения анализировались по истечении интервала времени, достаточного для завершения переходных процессов ( $t > 5 \cdot 10^4$  с).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 256 с.
2. Краснополская Т. С. Колебания бесконечной пластины, соприкасающейся с жидкостью, при возбуждении вдоль прямой двигателем ограниченной мощности // Прикл. мех. – 1988. – **24**, N 9. – С. 96–103.
3. Фролов К. В., Краснополская Т. С. Эффект Зоммерфельда в системах без внутреннего трения // Прикл. мех. – 1987. – **23**, N 12. – С. 19–24.
4. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. Chaos in vibrating systems with limited power-supply // Chaos. – 1993. – **3**. – P. 387–395.
5. Krasnopolskaya T. S. Acoustic chaos caused by Sommerfeld effect // J. Fluids Struct. – 1994. – **8**. – P. 803–815.
6. Краснополская Т. С. Акустический хаос, порожденный эффектом Зоммерфельда–Кононенко // Акуст. вісн. – 2002. – **5**, N 9. – С. 96–103.