

УДК 539.3

ЕФЕКТИ ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ І ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ЗВ'ЯЗАНОСТІ ПРИ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАННЯХ БАЛКИ З П'ЄЗОАКТИВНИМИ ШАРАМИ

Я. О. Жук

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України
03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3; e-mail: zhuk@inmtech.kiev.ua

Розвивається підхід до описання динамічної зв'язаної поведінки фізично нелінійних балок з п'єзоактивними шарами. Дано наближену постановку зв'язаної динамічної задачі термоелектромеханіки фізично нелінійних непружних тіл для тонкостінних елементів. Стандартні для гіпотез Кірхгофа-Лява рівняння руху й геометричні рівняння гнучких оболонок доповнено модифікованими фізичними співвідношеннями, які враховують як фізично нелінійну поведінку пасивних шарів, так і п'єзоелектричні властивості активних шарів при гармонічному навантаженні. На прикладі модельної задачі про вимушені коливання тришарової балки, середній шар якої виготовлено із пасивного фізично нелінійного матеріалу, а зовнішні - з в'язкопружного п'єзоактивного матеріалу, вивчено амплітудно- і фазо-частотні характеристики коливань при механічному і електричному збудженні.

Інтенсивне деформування тонкостінних елементів конструкцій може супроводжуватись суттєвим розігрівом внаслідок внутрішньої дисипації механічної енергії, а також зв'язаності механічних і теплових полів. Ефекти зв'язаності найбільш виразно проявляються при резонансних режимах роботи. Додаткове ускладнення вноситься необхідністю описання поведінки п'єзоактивних шарів багатошарових конструкцій, які застосовуються для активного контролю коливань. Моделі зв'язаної термомеханічної поведінки лінійних і нелінійних пасивних, а також п'єзоактивних тонкостінних елементів розвинені, зокрема, в роботах [1–4]. В даній статті в рамках зв'язаної задачі термомеханіки досліджуються резонансні коливання і дисипативний розігрів шаруватої балки як типового представника класу тонкостінних елементів з *фізично нелінійних* матеріалів при гармонічному навантаженні. Для частинного випадку гармонічного навантаження система рівнянь термоелектромеханіки [1, 2, 6], може бути сформульована в термінах комплексних польових величин і електромеханічних характеристик. З цією метою використовується комплексна постановка задачі [1, 2, 6], яка ґрунтується на наближеній моделі циклічної поведінки фізично нелінійних тіл при гармонічному навантаженні [4, 5]. При цьому механічні властивості матеріалу описуються за допомогою комплексних модулів. Аналогічна постановка задачі для балки, яка містить тільки пасивні непружні шари, розвинута в [7]. Нижче особливу увагу буде приділено змінам, що вносяться в цю постановку наявністю активних в'язкопружних шарів.

Досліджуються закономірності зв'язаної термоелектромеханічної поведінки тонкостінних елементів на прикладі вимушених згинних коливань шаруватої балки $0 \leq x \leq L$ загальної товщини H_s і товщинами шарів h_s , $\left(H_s = \sum_s h_s \right)$. На поверхнях п'єзоактивних шарів задані значення електричного потенціалу φ_z . З врахуванням припущення одночастотності і концепції комплексних модулів визначальні рівняння для п'єзоактивних

шарів запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{xx} &= \tilde{c}_{11}^D \tilde{\epsilon}_{xx} + \tilde{c}_{12}^D \tilde{\epsilon}_{yy} + \tilde{c}_{13}^D \tilde{\epsilon}_{zz} - \tilde{h}_{31} \tilde{D}_z, & \tilde{\sigma}_{xy} &= (\tilde{c}_{11}^D - \tilde{c}_{12}^D) \tilde{\epsilon}_{xy} / 2, \\
 \tilde{\sigma}_{yy} &= \tilde{c}_{12}^D \tilde{\epsilon}_{xx} + \tilde{c}_{11}^D \tilde{\epsilon}_{yy} + \tilde{c}_{13}^D \tilde{\epsilon}_{zz} - \tilde{h}_{31} \tilde{D}_z, & \sigma_{yz} &= \tilde{c}_{44}^D \tilde{\epsilon}_{yz} - \tilde{h}_{15} \tilde{D}_y, \\
 \tilde{\sigma}_{zz} &= \tilde{c}_{13}^D \tilde{\epsilon}_{xx} + \tilde{c}_{13}^D \tilde{\epsilon}_{yy} + \tilde{c}_{33}^D \tilde{\epsilon}_{zz} - \tilde{h}_{33} \tilde{D}_z, & \tilde{\sigma}_{xz} &= \tilde{c}_{44}^D \tilde{\epsilon}_{xz} - \tilde{h}_{15} \tilde{D}_x, \\
 \tilde{E}_x &= -\tilde{h}_{15} \tilde{\epsilon}_{xz} + \tilde{\beta}_{11}^s \tilde{D}_x, & \tilde{E}_y &= -\tilde{h}_{15} \tilde{\epsilon}_{yz} + \tilde{\beta}_{11}^s \tilde{D}_y, & \tilde{E}_z &= -\tilde{h}_{31} (\tilde{\epsilon}_x + \tilde{\epsilon}_y) - \tilde{h}_{33} \tilde{\epsilon}_z + \tilde{\beta}_{33}^s \tilde{D}_z,
 \end{aligned} \tag{1}$$

де рівняння записані відносно системи координат $OXYZ$ (\vec{OZ} – вісь попередньої поляризації) і прийняті стандартні позначення для механічних та електричних величин і параметрів [1–4], $\tilde{a} = a' + ia''$.

Використання стандартних гіпотез типу Кірхгофа–Лява, узагальнених на випадок електромеханіки, і плоского напруженого стану в напрямках \vec{OY} і \vec{OZ} приводить до наступних визначальних співвідношень для кожного п'єзоактивного шару

$$\tilde{\sigma}_{xx} = \tilde{C}_{11} \tilde{\epsilon}_{xx} - p \tilde{H}_{31} \tilde{D}_z, \quad \tilde{E}_z = -p \tilde{H}_{31} \tilde{\epsilon}_{xx} + \tilde{B}_{33}^s \tilde{D}_z, \tag{2}$$

$$\tilde{C}_{11} = \tilde{c}_{11}^D - \left(\tilde{A}_1 \tilde{c}_{12}^D - \tilde{A}_2 \tilde{c}_{13}^D \right) / \tilde{\Delta}, \quad \tilde{H}_{31} = \tilde{h}_{31} - \left(\tilde{A}_1 \tilde{h}_{31} - \tilde{A}_2 \tilde{h}_{33} \right) / \tilde{\Delta},$$

$$\tilde{B}_{33}^s = \tilde{\beta}_{33}^s - \left(\tilde{A}_3 \tilde{h}_{31} - \tilde{A}_4 \tilde{h}_{33} \right) / \tilde{\Delta}, \quad \tilde{\Delta} = \tilde{c}_{11}^D \tilde{c}_{33}^D - \tilde{c}_{13}^D{}^2,$$

$$\tilde{A}_1 = \tilde{c}_{12}^D \tilde{c}_{33}^D - \tilde{c}_{13}^D{}^2, \quad \tilde{A}_2 = \tilde{c}_{12}^D \tilde{c}_{13}^D - \tilde{c}_{13}^D \tilde{c}_{11}^D, \quad \tilde{A}_3 = \tilde{h}_{31} \tilde{c}_{33}^D - \tilde{h}_{33} \tilde{c}_{13}^D, \quad \tilde{A}_4 = \tilde{h}_{31} \tilde{c}_{13}^D - \tilde{h}_{33} \tilde{c}_{11}^D,$$

а коефіцієнт p дорівнює 1, якщо вектор попередньої поляризації співпадає з додатнім напрямком осі \vec{OZ} , і дорівнює -1 в протилежному випадку.

В подальшому використовуємо геометрично лінійний варіант теорії оболонок. Стосовно задачі про коливання балки, переходячи до комплексних аналогів переміщень $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ та інших кінематичних параметрів, виразимо деформації довільної точки балки через деформаційні параметри її осі наступним чином

$$\tilde{\epsilon}_{xx} = \tilde{\epsilon} + z \tilde{\chi}. \tag{3}$$

Інтегруючи друге співвідношення (2) по товщині кожного шару з врахуванням (3), знаходимо

$$\tilde{n}^{(s)} \tilde{\epsilon} + \tilde{m}^{(s)} \tilde{\chi} - \tilde{l}^{(s)} \tilde{D}_z = \tilde{U}^{(s)}, \tag{4}$$

$$\tilde{U}^{(s)} = \tilde{\varphi}(z_s) - \tilde{\varphi}(z_{s-1}), \quad \tilde{n}^{(s)} = \int_{z_{s-1}}^{z_s} \tilde{H}_{31} dz, \quad \tilde{m}^{(s)} = \int_{z_{s-1}}^{z_s} \tilde{H}_{31} z dz, \quad \tilde{l}^{(s)} = \int_{z_{s-1}}^{z_s} \tilde{B}_{33}^s dz.$$

Якщо заданим є електричний струм на електродах п'єзоактивних шарів, то із співвідношення $I_E^{(s)} = -S \partial D_z^{(s)} / \partial t$ знаходимо $I_E^{(s)} = -i\omega S \tilde{D}_z^{(s)}$.

Рівняння для комплексних зусиль і моментів отримуємо підстановкою напружень з (2) в класичні формули для зусиль і моментів, що припадають на одиницю довжини дуги базисної поверхні. В результаті, з врахуванням (3) для кожного активного шару комплексний аналог фізичних співвідношень має вигляд

$$\tilde{N}_x^{(s)} = \tilde{C}_1^{(s)} \tilde{\epsilon} + \tilde{K}_1^{(s)} \tilde{\chi} - \tilde{n}^{(s)} \tilde{D}_z^{(s)}, \quad \tilde{M}_x^{(s)} = \tilde{K}_1^{(s)} \tilde{\epsilon} + \tilde{D}_1^{(s)} \tilde{\chi} - \tilde{m}^{(s)} \tilde{D}_z^{(s)}, \tag{5}$$

$$\left(\tilde{C}_1^{(s)}, \tilde{K}_1^{(s)}, \tilde{D}_1^{(s)} \right) = \int_{z_{s-1}}^{z_s} \tilde{C}_{11}^{(s)}(1, z, z^2) dz.$$

Виражаючи $\tilde{D}_z^{(s)}$ з (4) з наступною підстановкою в (5) і сумуванням зусиль і моментів по всьому пакету шарів (як активних, так і пасивних), приходимо до остаточної форми фізичних співвідношень

$$\tilde{N}_x = \tilde{C}_1 \tilde{\epsilon} + \tilde{K}_1 \tilde{\varkappa} - \tilde{N}^E, \quad \tilde{M}_x = \tilde{K}_1 \tilde{\epsilon} + \tilde{D}_1 \tilde{\varkappa} - \tilde{M}^E, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 &= \sum_{sa} \left(\tilde{C}_1^{(s)} - \frac{\tilde{n}^{(s)} \tilde{n}^{(s)}}{\tilde{l}^{(s)}} \right) + \sum_{sp} \tilde{C}_1^{(s)}, \quad \tilde{K}_1 = \sum_{sa} \left(\tilde{K}_1^{(s)} - \frac{\tilde{n}^{(s)} \tilde{m}^{(s)}}{\tilde{l}^{(s)}} \right) + \sum_{sp} \tilde{K}_1^{(s)}, \\ \tilde{D}_1 &= \sum_{sa} \left(\tilde{D}_1^{(s)} - \frac{\tilde{m}^{(s)} \tilde{m}^{(s)}}{\tilde{l}^{(s)}} \right) + \sum_{sp} \tilde{D}_1^{(s)}, \quad \tilde{N}^E = - \sum_{sa} \frac{\tilde{n}^{(s)}}{\tilde{l}^{(s)}} \tilde{U}^{(s)}, \quad \tilde{M}^E = - \sum_{sa} \frac{\tilde{m}^{(s)}}{\tilde{l}^{(s)}} \tilde{U}^{(s)}. \end{aligned}$$

Тут під сумуванням по sa і sp мається на увазі сумування по активних і пасивних шарах відповідно. Вирази для коефіцієнтів $\tilde{C}_1^{(s)}$, $\tilde{K}_1^{(s)}$ і $\tilde{D}_1^{(s)}$ для випадку пасивних шарів наведені в [6, 7]. Відзначимо, що ці комплексні характеристики враховують фізичну нелінійність і температурно залежні властивості матеріалу. Вплив п'єзоелектричних факторів на рівні фізичних співвідношень виражається наявністю «електричних» зусиль і моментів \tilde{N}^E і \tilde{M}^E .

До постановки задачі необхідно включити також комплексні аналоги рівнянь коливань

$$\frac{\partial \tilde{N}_x}{\partial x} + \bar{\rho} \omega^2 H_s \tilde{u} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial x} + \bar{\rho} \omega^2 H_s \tilde{w} = 0, \quad \text{де } \bar{\rho} = H_s^{-1} \sum_s \int_{z_j}^{z_{j+1}} \rho_j dz, \quad (7)$$

вирази для компонентів деформаційних параметрів осі балки

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad \tilde{\varkappa} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}, \quad \tilde{v} = - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \quad (8)$$

і осереднене за період коливань рівняння теплопровідності

$$c_v \dot{\theta} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\alpha_{y1} + \alpha_{y2}}{h_y} (\theta - \theta_0) - \frac{\alpha_{z1} + \alpha_{z2}}{H_s} (\theta - \theta_0) + \bar{D}', \quad (9)$$

де c_v і k – коефіцієнти теплоємності і теплопровідності, θ – температура, $\alpha_{y1,2}$ і $\alpha_{z1,2}$ – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $y = \pm h_y/2$ і $z = \pm H_s/2$ відповідно; h_y – ширина балки.

Середня за період швидкість дисипації енергії \bar{D}' записується у вигляді

$$\bar{D}' = \frac{\omega}{2} \text{Im} \left(\tilde{\sigma}_{xx} \tilde{\epsilon}_{xx}^* + \tilde{E}_z \tilde{D}_z^* \right), \quad (10)$$

де зірочкою позначені комплексно спряжені величини.

Постановка задачі замикається заданням граничних (як на внутрішніх, так і на зовнішніх границях) умов, а також початкової умови для температури [2].

Отримана система рівнянь механіки (6)–(8) може бути представленою в нормальній формі

$$\frac{d\tilde{Y}}{dx} = [\tilde{A}] \tilde{Y} + \tilde{B}, \quad (11)$$

де $\tilde{\mathbf{Y}}^T = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{y}_4, \tilde{y}_5, \tilde{y}_6\} = \{\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{M}_x, \tilde{N}_x, \tilde{Q}_x, \tilde{v}\}$; $[\tilde{A}]$ – комплекснозначна матриця розміру 6×6 , в якій відмінними від нуля елементами є $\tilde{a}_{13} = \tilde{a}_{64} = -\tilde{Q}_2$, $\tilde{a}_{14} = \tilde{Q}_1$, $\tilde{a}_{26} = -1$, $\tilde{a}_{35} = 1$, $\tilde{a}_{41} = \tilde{a}_{52} = -\omega^2 \bar{\rho} H_s$ і $\tilde{a}_{63} = \tilde{Q}_3$; $\tilde{\mathbf{B}}$ – вектор-стовпець, такий, що

$$\tilde{\mathbf{B}}^T = \left\{ \tilde{Q}_1 \tilde{N}_E - \tilde{Q}_2 \tilde{M}_E, 0, 0, 0, 0, \tilde{Q}_3 \tilde{M}_E - \tilde{Q}_2 \tilde{N}_E \right\};$$

$$\tilde{Q}_1 = \tilde{D}_1 / \left(\tilde{C}_1 \tilde{D}_1 - \tilde{K}_1^2 \right), \quad \tilde{Q}_2 = \tilde{K}_1 / \left(\tilde{C}_1 \tilde{D}_1 - \tilde{K}_1^2 \right), \quad \tilde{Q}_3 = \tilde{C}_1 / \left(\tilde{C}_1 \tilde{D}_1 - \tilde{K}_1^2 \right).$$

Розглядаються два способи навантаження балки. Згідно з першим коливання збуджуються механічними моментами, прикладеними на кінцях $x = 0, L$, які змінюються в часі за законом $M_x = \sigma_{xx}^0 H_s^2 / 6 \sin \omega t = M_0 \sin \omega t$, де σ_{xx}^0 – максимальна амплітуда напруження, розподіленого по лінійному закону вздовж торців $x = 0, L$ балки.

Відповідні умови в комплексній формі мають вигляд

$$\tilde{M}_x = -i M_0 = -i \sigma_{xx}^0 H_s^2 / 6, \quad \tilde{N}_x = \tilde{Q}_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L. \quad (12)$$

При другому способі навантаження – електричному – задається різниця потенціалів $U^{(s)}$ на кожному п'єзоактивному шарі, яка змінюється по гармонічному закону в часі $U^{(s)} = U_0^{(s)} \sin \omega t$, де $U_0^{(s)}$ – амплітуда електричного напруження; в комплексній формі відповідна умова записується у вигляді

$$\tilde{U}^{(s)} = -i U_0^{(s)}, \quad \tilde{N}_x = \tilde{Q}_x = 0, \quad \text{при} \quad x = 0, L. \quad (13)$$

Задачі електромеханіки (11), (12) або (11), (13) розв'язуються чисельно за допомогою ітераційної процедури методу змінних параметрів пружності в поєднанні з методом ортогональної прогонки [7]. Для нестационарної задачі теплопровідності, яка використовує двовимірне формулювання (9), застосовується явна різницева схема методу скінчених різниць.

Як приклад, розглядається модельна задача про коливання і дисипативний розігрів тришарової балки. Її зовнішні шари виготовлені з п'єзочераміки ЦТС-19, а внутрішній шар – із сталі 12ХНЗА. Верхній керамічний шар вважається попередньо поляризованим в напрямку осі \vec{OZ} , а нижній – поляризований в протилежному напрямку. Комплексні характеристики матеріалів взяті з [5, 7]. Розрахунки проводились для наступних геометричних параметрів балки: $L = 0,76$ м, $H_s = h_y = 0,3 \cdot 10^{-1}$ м, $h_1 = h_3 = 0,5 \cdot 10^{-2}$ м і $h_2 = 0,2 \cdot 10^{-1}$ м. Геометрія і параметри навантаження балки вибираються таким чином, щоб задовольнити умови, при яких справедлива геометрично лінійна теорія балок і гіпотеза постійності електричної індукції по товщині п'єзоактивних шарів [1, 2]. При розв'язанні задачі теплопровідності використані наступні значення параметрів: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 100$ Вт/м²°К, $T_c = T_0 = 20$ °С; коефіцієнти теплоємності і теплопровідності приймалися рівними: для сталі 12ХНЗА $c_v = 3,8 \cdot 10^6$ Дж/м³°К, $k = 30,98$ Вт/м°К, і для п'єзочераміки ЦТС-19 $c_v = 3,58 \cdot 10^6$ Дж/м³°К, $k = 1,25$ Вт/м°К. Частота лінійного пружного резонансу балки на першій симетричній згинній моді дорівнює 203 Гц.

На рис. 1 представлені частотні залежності амплітуди прогинів $\Delta w = |\tilde{w}(L/2)|$ для різних способів навантаження. Лінія 1 відповідає електричному навантаженню згідно з (13) при амплітуді електричного потенціалу $U_0^{(1)} = U_0^{(3)} = 400$ кВ. Крива 2 відповідає механічному навантаженню по (12) при параметрі навантаження $M_0 = 0,75 \cdot 10^{-1}$ МН·м ($\sigma_{xx}^0 = 500$ МПа). Показані криві демонструють ідентичну поведінку для випадків механічного і електричного навантажень. Загалом вона є типовою для систем з м'якою

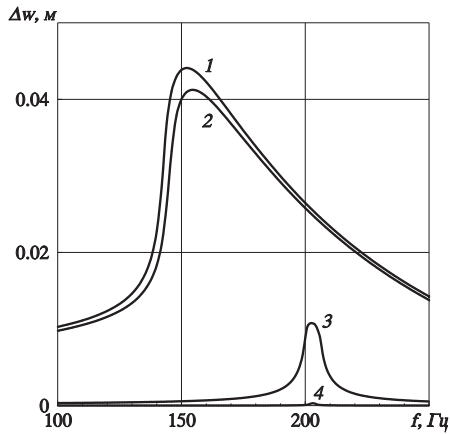


Рис.1

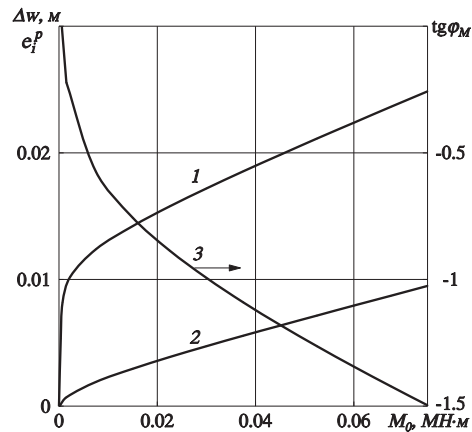


Рис.2

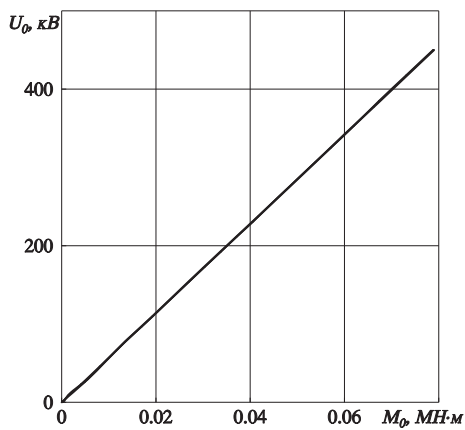


Рис.3

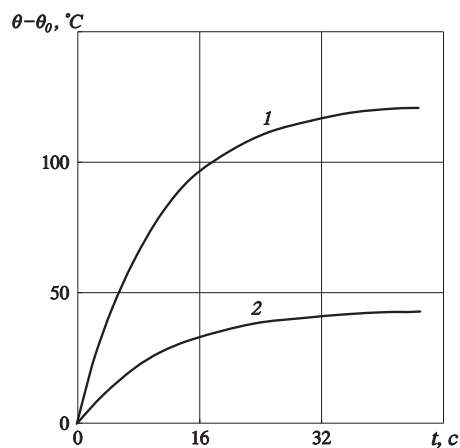


Рис.4

нелінійністю. Для розглядуваних способів навантаження розподіли польових величин аналогічні один одному. На рис. 2 представлені залежності амплітуд прогину Δw (лінія 1), інтенсивності непружних деформацій $\epsilon^p = \epsilon^p = [1/2 (\epsilon_{ij}^{p'} \epsilon_{ij}^{p'} + \epsilon_{ij}^{p''} \epsilon_{ij}^{p''})]^{1/2}$ в точці з координатами $x = 0,38$ м, $z = 0,1 \cdot 10^{-1}$ м (лінія 2) і тангенсу фази коливань $\text{tg } \varphi_M = w''/w'$ від величини навантаження для частоти 200 Гц. На відміну від квазістатичних коливань досліджуваної балки, відмічається жорсткий тип залежності $M_0 \sim \Delta w$. Цей ефект зумовлений взаємодією динамічності і фізичної нелінійності матеріалу. Збільшення динамічної жорсткості системи відбувається за рахунок «сповзання» з резонансної частоти внаслідок зменшення останньої через непружне пом'якшення матеріалу. Для випадку електричного збудження поведінка вказаних характеристик аналогічна. Отримані результати дозволяють зробити висновок про еквівалентність реакції балки на розглядувані способи навантаження і використовувати його, наприклад, для гасіння механічно збуджуваних коливань шляхом вибору відповідної амплітуди і фази електричного напруження [8] (див. лінії 3 і 4 на рис. 1).

Залежності $U_0 \sim M_0$ для значень частоти збудження 100 Гц, 200 Гц і 250 Гц представлені на рис. 3. Лінії співпадають з точністю до зображення на рисунку. Отримані дані показують, що в дослідженому інтервалі частот, незважаючи на різний рівень

прогинів і непружних деформацій, які зумовлюють суттєву нелінійність залежностей $\Delta w \sim M_0$ і $\Delta w \sim U_0$, залежність $U_0 \sim M_0$ є лінійною, і, отже, може бути конкретизованою шляхом розв’язання лінійної задачі. Однак, механічний і електричний способи навантаження виявляються нееквівалентними по дисипативних характеристиках, які визначають в даному підході зсув фаз між навантаженням і реакцією. Дійсно, аналіз виразу (10) з врахуванням (4) показує, що при короткозамкнених електродах навіть при лінійній поведінці матеріалів шарів (при $\sigma_{xx}^0 = 1,17$ МПа) дисипація буде меншою ($D_A = 113,98$ МВт/м²), ніж при еквівалентному йому електричному навантаженні ($U_0=1$ кВ, $D_A = 187,70$ МВт/м²), де D_A – сумарна дисипована енергія в активних шарах для частоти 200 Гц. На рис. 4 лінією 1 показано кінетику зміни температури вібророзігріву в точці $x = 0,38$ м, $z = 0,1 \cdot 10^{-1}$ м для $\sigma_{xx}^0 = 280$ МПа і частоти 250 Гц при механічному збудженні. Еволюція температури при спільній дії електричного і механічного навантажень при повному гасінні коливальних представлена кривою 2. Видно, що, незважаючи на нульовий прогин, вібророзігрів має місце внаслідок діелектричного механізму дисипації в п’єзокерамічних шарах. Проте його рівень значно нижчий, оскільки відсутні втрати, зумовлені непружними деформаціями в середньому сталевому шарі. Загалом просторовий розподіл характеризується високою однорідністю по товщині балки і має дзвоноподібну форму вздовж її осі.

Таким чином, ефекти фізичної нелінійності і термомеханічної зв’язаності у досліджуваній задачі полягають у формуванні амплітудно-частотних характеристик м’якого типу, обмеженості резонансних амплітуд та існуванні непружних деформацій і піку дисипативного розігріву в обмеженому інтервалі частот.

Література

- [1] Гололобов В.И. Соотношения упругости для тонкостенных оболочек с пьезокерамическими слоями // Прикл. механика – 1984. – 20, № 6. – С. 117–120.
- [2] Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Термоэлектромеханическое поведение вязкоупругих пьезокерамических тел при гармоническом возбуждении // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1974. – Вып. 14. – С. 121–126.
- [3] Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.; Отв. ред. А.Н. Гузь; АН УССР. Ин-т механики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
- [4] Сенченков И.К., Жук Я.А., Табиева Г.А., Червинко О.П. Упрощенные модели связанного термовязкопластического поведения тел при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33, № 9. – С. 24–33.
- [5] Жук Я.А., Сенченков И.К. Связанное термомеханическое поведение трехслойной вязкопластической балки при гармоническом нагружении // Прикладная механика.– 2000.– Т. 36, № 2.– С. 135–143.
- [6] Червинко О.П., Жук Я.О. Співвідношення зв’язаної динамічної задачі термов’язкопластичності для гнучких оболонок з п’єзоактивними шарами // Доповіді НАН України. – 2002. – № 1. – С. 68–74.
- [7] Жук Я.А., Сенченков И.К. Исследование резонансных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных элементов из физически нелинейного материала // Прикл. механика. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 93–101.
- [8] Жук Я.О. Дослідження динамічної зв’язаної поведінки в’язкопластичної балки з п’єзоактивними шарами // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2001. – № 5. – С. 280–285.