

ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ ТРЕЩИНАХ

Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Шапарь Е.М.

*Кубанский Государственный Университет
(г. Краснодар)*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о дифракции упругих волн на наклонной трещине, выходящей на поверхность полупространства.

Описываемая задача является плоской ($y = 0$), колебания точек упругой среды, обозначенные

$$u(x, z) = \{u_x, u_z\},$$

описываются уравнениями Ляме, которые в случае установившихся гармонических колебаний принимают вид:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \Delta u_x + \rho \omega^2 u_x = 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \Delta u_z + \rho \omega^2 u_z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Где $e = \operatorname{div} u = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$, λ и μ - константы Ляме. К поверхности полупространства $z = 0$ приложена нагрузка в точке x_0 :

$$\tau \Big|_{x=x_0} = \delta(x - x_0). \quad (2)$$

В остальных точках поверхность свободна от напряжений:

$$\tau \Big|_{z=0} = 0, \forall x \in (-\infty, \infty). \quad (3)$$

Здесь $\tau = \{\tau_{xz}, \sigma_{zz}\}$ - вектор напряжений, возникающих в упругом теле на некоторой элементарной площадке с нормалью. Берега трещины предполагаются свободными от напряжений:

$$\tau \Big|_{(x,z) \in \Omega} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, объединяя условия (1)-(4), получаем краевую задачу относительно неизвестной вектор - функции $u(x, z)$.

В качестве условия излучения будет использован принцип предельного поглощения.

Описание метода решения

Общее волновое поле складывается в описываемом случае из поля, создаваемого источником на поверхности полупространства, полем, отраженным от трещины и поверхности полупространства.

Решение ищем в виде:

$$u(x, z) = u_0(x, z) + u_1(x, z) + u_2(x, z), \quad (5)$$

где $u_0(x, z)$ - падающее поле, $u_1(x, z)$ - поле, отраженное от трещины, $u_2(x, z)$ - поле, отраженное от поверхности полуплоскости. Для нахождения всего волнового поля – решения поставленной задачи, исходную задачу разбиваем на две вспомогательные. В первой задаче, которую назовем задачей (а), рассматривается распространение волн в полупространстве без трещины. К поверхности полупространства приложена неизвестная нагрузка $q_1(x)$. Во второй задаче, которую назовем (б), рассматривается дифракция волн на трещине в пространстве,

содержащем трещину. Будем считать, что задача (а) решается в системе координат XOY и связана с поверхностью полупространства. Задача (б) решается в системе координат $X'OY'$ и связана с трещиной.

Обозначим $C(\theta)$ - матрица перехода из системы координат XOY в систему $X'OY'$, $C^{-1}(\theta)$

- матрица перехода из системы координат $X'OY'$ в систему XOY .

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Решаем вспомогательную задачу (а) для полупространства без трещины

В этой задаче находятся неизвестные перемещения точек упругого полупространства без трещины под действием поверхностной точечной нагрузки, обозначенные вектор - функцией

$$u_2 = \{u_{2,x}, u_{2,z}\}.$$

Колебания точек среды описываются уравнениями Ляме (1). Напряжения, возникающие в полупространстве под действием некоторой неизвестной нагрузки $q_2(x)$, определяются граничным условием:

$$\tau_n |_{z=0} = q_2(x). \quad (6)$$

Таким образом, получена краевая задача (1), (6) относительно неизвестных смещений $u_2(x, z)$.

Решение задачи находится, с использованием известного представления волнового поля через его матрицу Грина:

$$u_2(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, z) Q_2(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (7)$$

здесь $K(\alpha, z)$ - матрица Грина упругого полупространства,

2. Задача (б). Построение решения через скачок смещений на трещине.

В задаче (б) находятся неизвестные перемещения $u_1 = \{u_{1,x'}, u_{1,z'}\}$ точек упругого пространства, содержащего внутри себя трещину. Для решения этой задачи вводится система координат $X'OY'$, связанная с поверхностью трещины. А именно, трещина лежит полностью на оси X' , а центр системы координат совпадает с серединой отрезка трещины.

Колебания точек упругой среды описываются уравнениями Ляме (1). Берега трещины предполагаются свободными от напряжений:

$$\tau_n |_{(x', z') \in \Omega} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, получена задача (1), (8) относительно неизвестного вектора перемещений точек упругого пространства $u_1(x', z')$.

Для решения этой задачи также как и для решения задачи (а), будет использоваться представление волнового поля через матрицу Грина упругого полупространства $K(\alpha, z)$.

Введем в рассмотрение понятие скачка смещений на трещине $v(x')$:

$$v(x') = (u_1^+(x', z') - u_1^-(x', z')) |_{z'=0}, \quad (9)$$

где $u_1^+(x', z')$ и $u_1^-(x', z')$ - перемещения частиц пространства соответственно выше и ниже трещины. Для нахождения скачка смещений строится решение задачи в преобразованиях Фурье для полупространства выше трещины и ниже трещины соответственно:

$$U_1^+(\alpha, z') = K^+(\alpha, z') Q(\alpha), \quad z' > 0, \quad (10)$$

$$U_1^-(\alpha, z') = K^-(\alpha, z') Q(\alpha), \quad z' < 0, \quad (11)$$

здесь $Q(\alpha)$ - преобразование Фурье от некоторой нагрузки на границе полупространств $z' = 0$.

Используя (9), выражается скачок смещений на трещине через $Q(\alpha)$ и находим его преобразование Фурье: $V(\alpha) = (U_1^+(\alpha, z') - U_1^-(\alpha, z'))|_{z'=0} = (K^+(\alpha, z') - K^-(\alpha, z'))Q(\alpha)$.

Обозначим $L(\alpha) = [K^+(\alpha, z') - K^-(\alpha, z')]^{-1}$.

Решение через скачок смещений на трещине в преобразованиях Фурье:

$$U_1^\pm(\alpha, z') = K^\pm(\alpha, z')L(\alpha)V(\alpha). \quad (12)$$

Для нахождения решения задачи (б) берется обратное преобразование Фурье от (12):

$$u_1^\pm(x', z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^\pm(\alpha, z')L(\alpha)V(\alpha)e^{-i\alpha x'} d\alpha. \quad (13)$$

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Из условия равенства нулю напряжения на трещине выводится интегральное уравнение:

$$(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2)(x', z')|_{z'=0} = 0, \quad x' \in [-a, a].$$

Здесь $\tau_1(x', z')|_{z'=0} = q_1(x')$, $q_1(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} L(\alpha)V(\alpha)e^{-i\alpha x'} d\alpha$,

$$\tau_{0,2}(x', z') = \frac{C(\theta)}{2\pi} \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^2 T_m(\alpha)K_m^-(\alpha)e^{\sigma_m(x' \sin\theta + z_0) - i\alpha x' \cos\theta} Q_{0,2}(\alpha) d\alpha. \quad \text{Получается система}$$

интегральных уравнений вида:

$$Lv + Mv = f(x'), \quad x' \in [-a, a] \quad (14)$$

4. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

Интегральные уравнения решаются методом Галеркина путем разложения неизвестного скачка смещений по ортогональным полиномам. В качестве таких полиномов выбраны полиномы Чебышева с весом. Решение уравнения ищется в виде:

$$v_l = \sum_l c_l p_l, \quad (15)$$

где c_l - решение системы уравнений:

$$\sum_k a_{lk} c_k = f_l, \quad l=1, \dots, N, \quad (16)$$

здесь p_k - полиномы Чебышева с весом. Координатные функции: $p_k = U_k(x)\sqrt{a^2 - x^2}$, здесь $U_k(x)$ - полиномы Чебышева второго рода, проекторы: $\varphi_l = P_l(x)$ - полиномы Лежандра.

5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОХОЖДЕНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Общая формула для расчета энергии выглядит так:

$$E = \int_S e_n ds. \quad (17)$$

Где e_n - вектор плотности потока энергии, переносимой в среде упругими волнами. В случае установившихся гармонических колебаний осредненное за период $2\pi/\omega$ значение компонент

вектора e_n определяется выражением: $e_n = -\frac{w}{2} \text{Im}(u, \tau)$.

Используя (17) считается поток энергии через горизонтальную плоскость xz таким образом:

$$E_0 = -\frac{\omega}{2} \int_{-\infty}^0 (u_0, T_n u_0) dz, \quad (18)$$

Энергия волн, прошедших через боковую поверхность (вправо):

$$E_1 = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^0 ((u_0(x_1, z) + y_2(x_1, z)), T_n(u_0(x_1, z) + y_2(x_1, z))) dz, \quad (19)$$

где $y_2(x, z) = i \sum_{m=1}^2 K_m^-(\zeta) Q_2(\zeta) V(\zeta) e^{-\sigma_m |z_0|} e^{-i\zeta x}$, $K_m^-(\zeta)$ - матрица Грина, $V(\zeta) = \sum_{k=1}^N c_k \Phi_k(\zeta)$, c_k - решение системы (16), $x_1 \rightarrow \infty$.

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе представлены численные результаты для поставленной задачи о распространении упругих волн в полуплоскости, содержащей приповерхностную трещину.

Все вычисления проводились для величины коэффициента Пуассона $\nu = 1/3$. Вычислялся коэффициент прохождения волн в зависимости от частоты для набегающей рэлеевской волны.

Результаты вычислений сопоставлены с результатами работы [4].

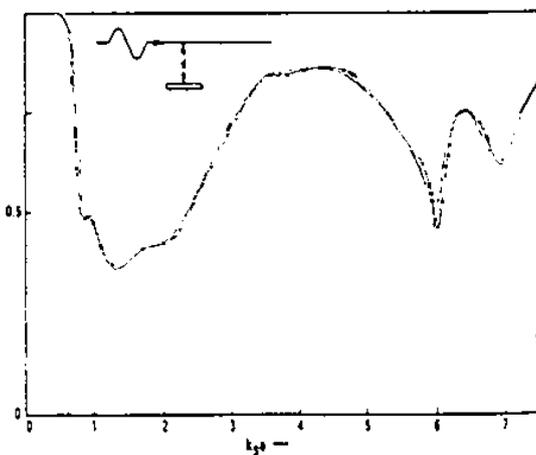


Рис. 1

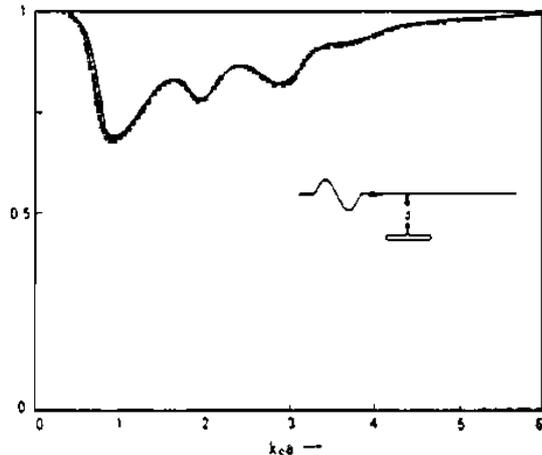


Рис.2

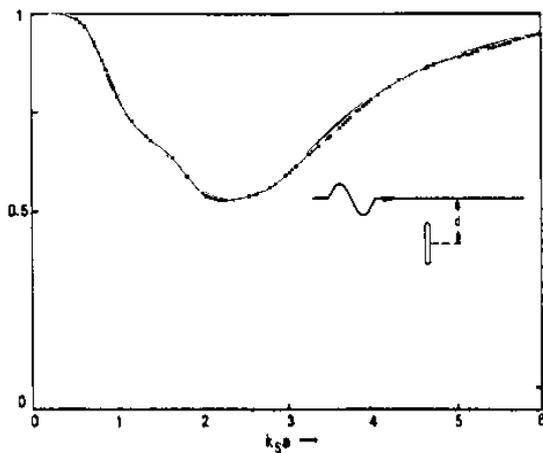


Рис.3

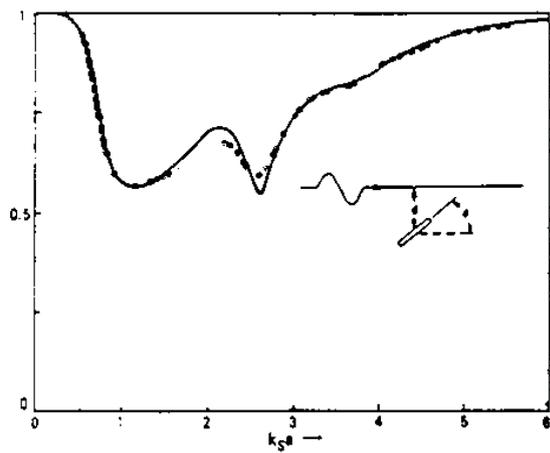


Рис.4

На рисунках 1-4 изображены графики коэффициента прохождения энергии в зависимости от частоты для различных вариантов расположения трещины: ее угла наклона и координат центра трещины. Сплошная линия изображает результаты описанного в этой работе метода, а пунктирная – результаты работы метода [4].

На рисунку 1 $d/a = 1$, где d - расстояние от поверхности до центра трещины, a - радиус трещины, на рисунках 2-4 $d/a = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамовиц М. Стиган И.*, Справочник по специальным функциям. М.; Наука, 1979.
2. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.*, Динамика неоднородных линейно – упругих сред. М.; Наука, 1989.
3. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В.*, Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Кубан. гос. ун-т. – Краснодар, 1990.
4. *J.H.M.T. van der Hijden, F.L. Neerhoff*, Diffraction of elastic waves by a sub-surface crack (in-plane motion). J. Acoust. Soc. America. 1984. 75(6). P. 1694-1705.