

## **О реконструкции двумерного распределения остаточных напряжений по результатам акустических измерений при трёхосном напряжённо-деформированном состоянии.**

**Галаненко В. Б., Галаненко Д. В.**

*НПФ «Ультракон-Сервис», г. Киев., dv@galvb.kiev.ua*

### **ВВЕДЕНИЕ**

Один из возможных методов неразрушающего контроля напряжённого состояния изделий основан на явлении акустоупругости. Обширную библиографию, изложение основных идей, теоретические основы акустического метода определения начальных напряжений можно найти в работах [1-4]. В тех случаях, когда начальные напряжения созданы сторонними воздействиями, не выводящими материал за пределы гиперупругости, уравнения распространения волн вытекают из уравнений нелинейной теории упругости. В случае, когда речь идёт об остаточных напряжениях, в теоретические построения вводятся соображения теории пластичности [5-7]. Основные уравнения упомянутых теорий локальны и потому равно пригодны для описания распространения волн в среде с однородным и неоднородным распределением начальных напряжений. Однако большая часть исследований выполнена в предположении о том, что начальные напряжения не зависят от координат. Это относится и к технологиям акустического сканирования двумерного распределения напряжений на поверхности тонкого слоя [8, 9]. В то же время практические задачи контроля остаточных напряжений доставляют немало важных примеров, когда распределение напряжений в области прозвучивания существенно неоднородно. В этих случаях, как указывается в [1, 10], задача контроля остаточных напряжений родственна задачам реконструктивной томографии. С этой точки зрения она рассматривается применительно к изотропным конструкционным материалам в [11].

Цель настоящей работы заключается в теоретическом исследовании задачи определения пространственного распределения остаточных напряжений в первоначально однородном анизотропном конструкционном материале

### **СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ВРЕМЕНИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИГНАЛОВ.**

Во многих случаях можно полагать, что материал детали доступен для проведения акустических измерений в таких трёх состояниях. Первое – это состояние материала

заготовки, второе – состояние материала детали после завершения процесса изготовления и третье – состояние материала детали после процесса разгрузки от остаточных напряжений. Акустические свойства материала в каждом из трёх состояний, определяемые предысторией деформирования, различны. Будем предполагать, что материал заготовки (состояние 1) является однородным и анизотропным. Состояние 2 возникает в результате деформаций, сопровождающих процесс изготовления детали. Возникающие при этом остаточные напряжения и деформации зависят от координат. Таким образом, материал в состоянии 2 является неоднородным и анизотропным. Это же можно сказать и о состоянии 3. Действительно, предположим, следуя [1], что процесс разгрузки детали лежит в пределах нелинейной упругости. Тогда вместе с остаточными напряжениями аннулируется связанная с ними часть остаточных деформаций («упругие» остаточные деформации). Оставшаяся часть («пластические» остаточные деформации) зависит от координат.

В каждом из трёх состояний материал ведёт себя как линейно-упругий по отношению к малым деформациям, возникающим при распространении ультразвука малой амплитуды. Уравнения, описывающие распространение волн, одинаковы для всех состояний и различаются лишь коэффициентами. Действительно, рассматривая каждое из состояний как естественное, а состояние малых колебаний как финальное, приходим (см. [1]) в каждом случае к уравнению такого вида:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( Q_{ijkl}^{(r)} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \rho_r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} : \{x_1, x_2, x_3\}$  - координаты, относящиеся к соответствующему состоянию, индекс  $r$  отмечает номер состояния ( $r = 1, 2, 3$ ),  $\mathbf{u} : \{u_1, u_2, u_3\}$  - динамическое смещение от соответствующего положения равновесия. Тензор упругостей  $Q_{ijkl}^{(1)}$  не зависит от координат, а тензоры  $Q_{ijkl}^{(r)}$  ( $r = 2, 3$ ) отличаются от него малыми добавками  $\Delta Q_{ijkl}^{(r)}(\mathbf{x})$ .

Предполагая, что эти добавки (обусловленные остаточными напряжениями и деформациями) медленно изменяются в масштабе длины волны, и привлекая представления лучевой акустики неоднородных анизотропных сред [12], можно утверждать, что в состояниях 2 и 3 акустические сигналы передаются тремя типами волн по криволинейным траекториям с соответствующими групповыми скоростями. Пренебрегая производными от тензора упругостей и, соответственно, взаимной

трансформацией волн, нетрудно получить уравнение для групповой (лучевой) задержки  $\tau(\mathbf{x})$  каждой из волн в виде:

$$D = \det(Q_{jmlk} p_j p_k - \rho \delta_{ml}) = 0 \quad (1)$$

где  $p_j = \partial\tau / \partial x_j$ . При измерении остаточных напряжений звуковые волны распространяются на достаточно малые расстояния (в отличие от аналогичных задач геоакустики или морской акустики). Потому можно предположить, что малым добавкам к тензору упругостей соответствуют малые изменения задержки и её градиента, и искать решение уравнения (1) в виде:  $\tau(\mathbf{x}) = \tau_0(\mathbf{x}) + \tau'(\mathbf{x})$ ,  $p_j = p_{0j} + p'_j$ , рассматривая  $|\text{grad}\tau'| / |\text{grad}\tau_0|$  и  $\Delta Q_{jmlk} / Q_{jmlk}^{(1)}$  как величины одного порядка малости. Раскладывая левую часть уравнения (1) в ряд Тэйлора и удерживая слагаемые не выше первого порядка малости, приходим к линеаризованному уравнению:

$$\frac{\partial D}{\partial p_{01}} \frac{\partial \tau'}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial p_{02}} \frac{\partial \tau'}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial p_{03}} \frac{\partial \tau'}{\partial x_3} = -\Delta Q_{imlk}^{(r)} \frac{\partial D}{\partial Q_{imlk}^{(1)}} \equiv F(\mathbf{x}, \mathbf{p}_0) \quad (2)$$

Из характеристической системы уравнений [13], соответствующей (1) для состояния 1, находим:  $\partial D_0 / \partial p_{0i} = \partial x_i / \partial l \cdot H = n_i H$ , где  $n_i$  - направляющие косинусы прямой, соединяющей точку излучения и приёма,  $l$  - путь вдоль этой прямой,  $H = |\partial D / \partial \mathbf{p}_0|$ . Тогда уравнение (2) приводится к виду  $\mathbf{n} \cdot \text{grad}(\tau') = -F/H$  или  $\partial\tau' / \partial l = -F/H$ . Его решение имеет вид интеграла вдоль прямой, соединяющей точки излучения и приёма:

$$\tau' = -1/H \int_0^{r(\mathbf{x})} F(n_1 l, n_2 l, n_3 l, \mathbf{p}_0(\mathbf{n})) dl \quad (3)$$

и имеет смысл разности значений времени распространения в неоднородной среде (состояние 2 или состояние 3) и в однородной среде (состояние 1). Исходя из этого, находим разность значений времени распространения в среде с остаточными напряжениями (состояние 2) и в той же среде после разгрузки (состояние 3) как

$$\tau_{23} = \tau_2 - \tau_3 = -1/H \int_0^{r(\mathbf{x})} (\Delta Q_{imlk}^{(3)} - \Delta Q_{imlk}^{(2)}) \partial D / \partial Q_{imlk}^{(1)} dl \quad (4)$$

Так как по предположению на участке разгрузки материал ведёт себя как упругий, то разность  $\Delta Q_{imlk}^{(2)} - \Delta Q_{imlk}^{(3)}$  с помощью соотношений нелинейной упругости может быть выражена через остаточные напряжения. Воспользуемся выражениями, приведенными в

[1], и линеаризуем их относительно начальных напряжений. Тогда, применяя нумерацию Фойгта и вводя вектор  $\boldsymbol{\sigma}$ , составленный из 6 компонент тензора остаточных напряжений, получим:

$$\Delta Q_{imlk}^{(2)} - \Delta Q_{imlk}^{(3)} = R_{imlkn} \sigma_n$$

где  $R_{imlkn}$  выражаются через линейные и квадратичные модули упругости материала.

После подстановки этого выражения в (4), получаем:

$$\tau_{23} = \mathbf{b} \int_0^{r(x)} \boldsymbol{\sigma}(n_1 l, n_2 l, n_3 l) dl \quad (5)$$

где 6 компонент вектора  $\mathbf{b} : \{R_{imlkn} \partial D / \partial Q_{imlk}^{(1)}\}$  зависят от модулей упругости материала и от направляющих косинусов прямолинейной траектории, соединяющей точку излучения и приёма.

### ИЗМЕРЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ.

Рассмотрим частный случай, когда напряжения не зависят от координат и интегралы в формуле (5) заменяются постоянными множителями, пропорциональными длине пути между излучателем и приёмником. Измеряя интервал  $\tau_{23}^{(s)}$  для каждой из трёх волн, которые могут распространяться вдоль данной траектории, получим три уравнения. С их помощью можно вычислить остаточные напряжения лишь в том случае, если направление главных осей тензора остаточных напряжений заранее известно. Тогда 6 компонент вектора  $\boldsymbol{\sigma}$  выражаются через три неизвестных главных значения тензора, составляющие вектор  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , который войдёт в формулу (5) вместе с новыми коэффициентами, содержащимися в векторе  $\hat{\mathbf{b}}$ . Если направление главных осей заранее неизвестно, то недостающие уравнения можно получить, проводя измерения на большем числе неколлинеарных траекторий. Возвращаясь к основной для нас задаче с неоднородными остаточными напряжениями, выделим частный случай, когда главные направления тензора этих напряжений одинаковы во всех точках пространства и заранее известны. Тогда, рассматривая распространение трёх типов волн вдоль одной траектории, получаем замкнутую систему из трёх уравнений относительно интегралов от главных значений

тензора остаточных напряжений:  $\hat{\mathbf{B}} \int_0^{r(x)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(n_1 l, n_2 l, n_3 l) dl = \boldsymbol{\tau}_{23}$ . Обозначая обратную к  $\hat{\mathbf{B}}$

матрицу через  $\hat{\mathbf{C}}$ , получим:

$$\int_0^{r(x)} \hat{\sigma}_i(n_1 l, n_2 l, n_3 l) dl = \hat{C}_{is} \tau_{23}^{(s)}, \quad i, s = 1, 2, 3 \quad (6)$$

В этом частном случае задача реконструктивной тензометрии сводится к трём скалярным задачам вычислительной томографии [14]. Рассмотрим этот частный случай более подробно, предполагая дополнительно, что остаточные напряжения не зависят от координаты  $x_3$ . Будем предполагать, что  $M$  точечных приёмно-излучающих преобразователей расположены по контуру сечения детали плоскостью  $x_3 = const$ . Измерение времени распространения 3-х волн для двух состояний (нагруженного и разгруженного) на каждой из  $P = M_1^2 + 4M_1M_2 + M_2^2$  прямолинейных траекторий доставляет  $P$  интегральных равенств вида (6). Определение элементов матрицы  $\hat{\mathbf{C}}$  достигается калибровкой, для которой, в частности, можно использовать те же самые траектории. При этом материал подвергается однородным сжатиям или растяжениям последовательно вдоль каждой из главных осей тензора остаточных напряжений. Производится измерение времени распространения каждой из трёх волн вдоль каждой из траекторий для двух значений приложенного усилия. По разности интервалов времени можно найти элементы матрицы  $\hat{\mathbf{B}}$  непосредственно и рассчитать  $\hat{\mathbf{C}}$ .

Для отыскания распределений  $\sigma_i(x, y)$  из интегральных равенств, представим их в виде

взвешенной суммы базисных функций:  $\tilde{\sigma}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^N X_n \varphi_n(x_1, x_2)$ . При  $P > N$  ищем

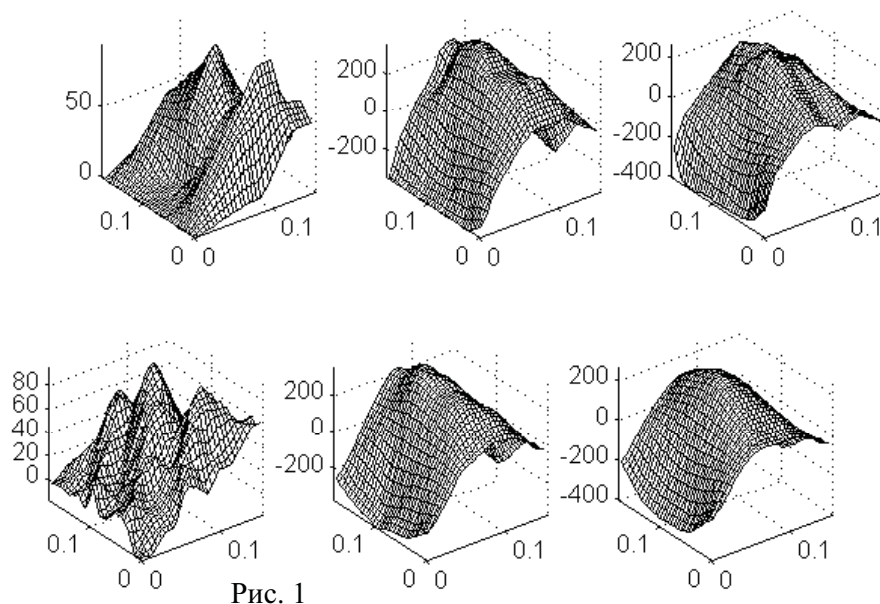
коэффициенты разложения  $X_n$  из условия минимизации среднеквадратичного отклонения этой суммы от истинного распределения при дополнительном условии минимума среднеквадратичного значения градиента, что приводит к системе уравнений относительно коэффициентов  $X_n$ .

Такой же подход возможен и в общем случае, когда главные направления тензора остаточных напряжений неизвестны и зависят от координат. Представим каждую из 6

компонент «вектора» напряжений как  $\tilde{\sigma}_i(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^N X_n^{(i)} \varphi_n(x_1, x_2)$ . Вектор

неизвестных коэффициентов  $\mathbf{X}$ , полученный объединением всех  $\mathbf{X}^{(i)}$ , содержит  $6N$  неизвестных величин.

Задача реконструкции некорректна. Представляет практический интерес оценка значений случайных погрешностей, ещё допустимых при измерении временных интервалов. О ней можно судить на основании численного моделирования процесса реконструкции распределения остаточных напряжений в радиальном сечении обода колеса локомотива. В качестве истинного было принято распределение, полученное в работе [15] расчётным путём. Материал колеса рассматривался как изотропный с известными линейными и квадратичными модулями упругости.



На рис. 1 приведены результаты реконструкции (нижний ряд) осевых, радиальных и окружных напряжений (верхний ряд) в обода колеса при относительной погрешности измерения времени распространения сигналов по траекториям, равной  $10^{-5}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. Y.-H. Pao, W. Sachse, H. Fukuoka. Acoustoelasticity and Ultrasonic measurement of residual stresses. In “Physical Acoustics”, ed. by W. P. Mason, R. N. Thurston, Academic Press, N. Y., 1984, pp. 61-143.

2. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. «Наукова думка», Киев, 1986. Т1: Общие вопросы., 373 с. Т2: Закономерности распространения упругих волн., 563 с.
3. А. Н. Гузь, Ф. Г. Махорт. Физические основы ультразвукового неразрушающего метода определения напряжений в твёрдых телах. Прикладная механика, т. 36, 2000, № 9, с. 3 – 33.
4. Бобренко В. М., Куценко А. Н., Руденко А. С. Акустическая тензометрия. «Контроль. Диагностика», т. 34, № 4, 2001, с. 23-39.
5. G. C. Johnson. On applicability of acoustoelasticity to residual stress determination. J. Appl. Mech., 1981, **48**, 791-795.
6. G. C. Johnson. Acoustoelastic theory for elastoplastic materials. Journ. Acoust. Soc. Am., 1981, v. **70**, No. 2, pp. 591-595.
7. Y.-H. Pao, T.-T. Wu, U. Gamer. Acoustoelastic birefringences in plastically deformed solids. Part 1 – Theory. Journ. of Appl. Mechanics, 1991, **58**, No. 3, pp. 11 – 17.
8. G. S. Kino, J. B. Hunter, G. C. Johnson, A. R. Selfridge, D. M. Barnett, G. Herrmann, C. R. Steel. Acoustoelastic Imaging of Stress Fields, J. Appl. Phys, 1979, **50**, 2607-2613.
9. E. Drescher-Krasicka. Scanning acoustic imaging of stress in the interior of solid materials. J. Acoust. Soc. Am., 1993, **94**, No. 1, 453-464.
10. В. Р. Hildebrand, Т. Р. Harrington. Material Evaluation, 1981, **39**, p. 383.
11. Х. К. Абен, А. Э. Пуро. Интегральная акустоупругость – акустическая томография трёхмерного поля напряжений. Акуст. журн., т. 37, 1991, № 6, с. 1061 – 1067.
12. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: «Наука», 1980, 280 с.
13. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. Н. Геометрическая оптика неоднородных сред. «Наука», М., 1980, 304 с.
14. Хермен Г. Восстановление изображения по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М., Мир, 1983, 352 с.
15. Киселёв С. Н., Киселёв А. С. Васильев Н. Г., Саврухин А. В. Контроль напряжённо-деформированного и структурного состояния бандажей локомотивов на базе компьютерного моделирования процессов при технологическом и эксплуатационном воздействии. «Контроль. Диагностика», т. 34, № 4, 2001, 16 – 23.