

## К расчёту поля локального источника в упругом изотропном слое.

Галаненко В. Б., Галаненко Д. В.,

*НПФ «Ультракон-Сервис», г. Киев., dv@galvb.kiev.ua*

### 1. ВВЕДЕНИЕ.

При исследовании акустической эмиссии в упругом слое наблюдаемые сигналы имеют весьма сложную структуру вследствие особенностей передачи импульсов волноводными модами Лэмба. Для того, чтобы облегчить интерпретацию наблюдаемых временных зависимостей, был предпринят ряд теоретических исследований (например, [1–4]). В расчётах использовалось как лучевое [1,2], так и модовое [3,4] представление поля упругих волн. Вслед за работой [5], источник сигналов акустической эмиссии моделировался сосредоточенной силой (в частности, поперечной к слою [3]), либо комбинацией различно ориентированных сосредоточенных сил [2]. Наиболее полная теория возбуждения слоя объёмными силами (при модовом описании) представлена в [4]. Можно, однако, представить и другие модели источника эмиссии, как-то: в виде спонтанного изменения плотности (источник дилатации) или спонтанного вращения (источник ротации). Данная работа посвящена рассмотрению сигналов, соответствующих таким источникам (включая и динамические источники). Уравнение Ламэ (по смыслу его вывода) не предполагает учёта иных сторонних воздействий, кроме сторонних сил, распределённых в объёме среды. Источники дилатации и ротации можно ввести, если, следуя [6], заменить уравнение Ламэ эквивалентной системой дифференциальных уравнений относительно компонент четырёхмерного вектора, составленного из горизонтального и вертикального смещений частиц среды, дивергенции и ротации. Такое описание пригодно при рассмотрении двумерного движения типа Р и SV волн в произвольной системе ортогональных координат [7]. Требование двумерного характера движения сужает возможности данного подхода на рассмотрение только лишь таких источников, которые генерируют осесимметричное поле упругих волн в слое: вертикальные или радиальная силы, сторонние дивергенция или ротация, равномерно распределённые на поверхности вертикального цилиндра конечного радиуса и высоты (предельным переходом эти источники переводятся в точечные). Предметом работы является вычисление спектральных и временных характеристик сигналов, инициированных в упругом слое воздействиями в виде коротких импульсов. Расчёт

временной зависимости сигнала на выходе пьезоэлектрического приёмника производится в два этапа. На первом рассчитывается спектр сигнала в виде суммы вкладов распространяющихся (для фиксированного частотного диапазона) цилиндрических волн Лэмба:

$$S(\omega, r, z_0) = \sum_m S_0(\omega) K_{m0}(\omega) K_m(\omega, r, z_0) \quad (1)$$

Здесь:  $S_0(\omega)$  - спектр сигнала на источнике эмиссии,  $K_{m0}(\omega)$  - частотная характеристика преобразователя при приёме  $m$ -той волны (с учётом конечных размеров апертуры),  $K_m(\omega, r, z_0)$  - коэффициент передачи для  $m$ -той волны от источника с координатами  $r = 0, z = z_0$  в точку с координатами  $r, z = H$ , где  $H$  - половина толщины слоя. На втором этапе рассчитывается временная структура сигнала с помощью преобразования Фурье от выражения (1).

## 2. ВЫВОД РАСЧЁТНЫХ СООТНОШЕНИЙ.

Для расчёта одной из гармонических компонент поля сигнала введём четырёхмерный вектор  $\mathbf{p} = \{u, c, w, d\}$ , где  $u, w$  - радиальная и вертикальная (поперечная) компоненты вектора смещения,  $c$  - ненулевая компонента ротации,  $d$  - дивергенция. Можно показать, что  $\mathbf{p}(z, r)$  подчиняется следующему дифференциальному уравнению с матричными коэффициентами:

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} + \mathbf{B} \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} = \mathbf{f} \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(z - z_0) \quad (2)$$

где:  $\mathbf{A} = \{0, 0, -1, 0; 0, 0, 0, \xi^{-2}; 1, 0, 0, 0; 0, -\xi^2, 0, 0\}$ ;

$\mathbf{B} = \{1/r, 0, 0, 1; 0, -1/r, k_s^2, 0; 0, -1, 0, 0; -k_l^2, 0, 0, 0\}$ ,  $\mathbf{f} = \{d_0, f_z, c_0/r_0, -\xi^2 f_r/r_0\}$ . Здесь  $k_s, k_l$  - волновые числа сдвиговых и продольных волн,  $\xi = c_s/c_l$  - отношение скоростей этих волн. В приведенных выражениях для матриц запятые являются разделителями элементов внутри строк, а точки с запятой – разделителями строк. Правая часть уравнения (2) описывает источник, в котором сторонние силы, сторонние дивергенция и ротация распределены на кольце радиуса  $r_0$  с соответствующими плотностями. Уравнение (2) следует дополнить условиями свободной границы при  $z = \pm H$  и условиями погашаемости при  $r \rightarrow \infty$ .

Розыскивая решение уравнения (2) в виде интегрального преобразования Фурье-Бесселя с ядром  $J_{\nu_k}(\gamma r)$  (где  $\nu_k = 1$  для радиального смещения и ротации и  $\nu_k = 0$  для вертикального смещения и дивергенции,  $\gamma$  - спектральный параметр), учитывая свойства чётности (или нечётности) компонентов вектора  $\mathbf{P}(\gamma, z)$ , являющегося Фурье-образом вектора  $\mathbf{p}(r, z)$ , и применяя известные соотношения обхода для функций Ханкеля, можно представить решение задачи в следующей интегральной форме:

$$p_k(r, z) = 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} P_k(\gamma, z) H_{\nu_k}^{(1)}(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (3)$$

где  $P_k(\gamma, z)$  - компоненты вектора  $\mathbf{P}(\gamma, z) = \mathbf{G}(\gamma, z, z_0) \mathbf{F}$ , где  $\mathbf{F} = \{d_0 J_0(\gamma r_0), f_z J_0(\gamma r_0), c_0 J_1(\gamma r_0)/r_0, f_r J_1(\gamma r_0)/r_0\}$  - преобразованная по Фурье-Бесселю правая часть уравнения (2),  $\mathbf{G}(\gamma, z, z_0)$  - матрица Грина поперечного сечения слоя, т.-е. решение системы уравнений:

$$\mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} + (\mathbf{B}_1 - \gamma \mathbf{I}) \mathbf{G} = \mathbf{I} \delta(z - z_0) \quad (4)$$

где  $\mathbf{A}_1 = \{0, 0, -1, 0; 0, 0, 0, \xi^{-2}; -1, 0, 0, 0; 0, \xi^2, 0, 0\}$ ,

$\mathbf{B}_1 = \{0, 0, 0, 1; 0, 0, k_s^2, 0; 0, 1, 0, 0; k_l^2, 0, 0, 0\}$ ,  $\mathbf{I}$  - единичная матрица. Граничные условия для системы (4) имеют вид:  $\mathbf{S} \mathbf{G} = 0$ , где

$$\mathbf{S} = \left\{ (-2\gamma \xi^2, 0, 0, 1) \Big|_{z=H}; (0, 1, -2\gamma, 0) \Big|_{z=H}; (-2\gamma \xi^2, 0, 0, 1) \Big|_{z=-H}; (0, 1, -2\gamma, 0) \Big|_{z=-H} \right\}.$$

Нетрудно найти выражение матрицы Грина поперечного сечения через общее решение  $\mathbf{Z}(z)$  уравнения (4):

$$\mathbf{G}(z, z_0, \gamma) = \frac{1}{2} \mathbf{Z}(z) (\mathbf{S} \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{E} \mp \mathbf{I}) (\mathbf{S} \mathbf{Z}) (\mathbf{A}_1 \mathbf{Z}(z_0))^{-1} \quad (5)$$

где  $\mathbf{E} = \{1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0; 0, 0, -1, 0; 0, 0, 0, -1\}$ .

Представим матрицу, обратную к  $\mathbf{S} \mathbf{Z}$  в виде дроби:  $(\mathbf{S} \mathbf{Z})^{-1} = \mathbf{M}(\gamma) / D(\gamma)$ , где матрица  $\mathbf{M}(\gamma)$  составлена из алгебраических дополнений к элементам матрицы  $\mathbf{S} \mathbf{Z}$ , а  $D(\gamma) = \det(\mathbf{S} \mathbf{Z})$ . При значениях  $\gamma$ , равных волновым числам волн Лэмба (симметричных и антисимметричных), определитель  $D(\gamma)$  обращается в нуль. Исследуя асимптотику матрицы Грина при  $|\gamma| \rightarrow \infty$ , можно показать, что условия, требуемые для

применения леммы Жордана при  $r > r_0$ , выполняются. Следовательно, матрица Грина мероморфна, и интеграл (3) сводится к вычетам, физическим содержанием которых являются цилиндрические волны Лэмба. Остановимся на значении вычета матрицы Грина, предполагая при этом, что корни дисперсионного уравнения для волн Лэмба  $D(\gamma_k) = 0$  – простые (случаи слияния корней не рассматриваются). При обращении определителя в ноль ранг матрицы  $\mathbf{SZ}$  понижается на единицу и, соответственно, столбцы матрицы  $\mathbf{M}(\gamma_k)$  становятся пропорциональными одному из них. Тогда  $\mathbf{M}(\gamma_k) = \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{a}_k$ , где  $\mathbf{m}_k$  – один из столбцов матрицы  $\mathbf{M}(\gamma_k)$ , а  $\mathbf{a}_k$  – вектор-строка коэффициентов пропорциональности. Это позволяет записать вычет выражения (5) в виде:

$$\mathbf{G}_k = \frac{1}{2D'_k} \mathbf{p}_k(z) \mathbf{q}_k(z_0) \quad (6)$$

где  $\mathbf{p}_k(z) = \mathbf{Z}(\gamma_k, z) \mathbf{m}_k$  – собственный вектор (столбец),  $\mathbf{q}_k(z_0) = \mathbf{b}_k (\mathbf{A}_1 \mathbf{Z}(\gamma_k, z_0))^{-1}$  – собственный вектор сопряжённой задачи (строка),  $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k \mathbf{E}(\mathbf{SZ})_k$  (повторяющиеся индексы здесь не означают суммирования). Выполняя соответствующие матричные операции, получаем расчётные формулы для коэффициента передачи  $k$ -той волны.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

При расчётах учитывались лишь распространяющиеся волны Лэмба. В отсутствие поглощения их волновые числа  $\gamma_k$  лежат на вещественной оси  $\text{Re}(\gamma)$  и с понижением частоты (уменьшением волновой толщины слоя  $h = 2H/\lambda_s$ ) движутся к началу координат  $\gamma = 0$  и затем выходят на мнимую ось (за исключением волн наименьших номеров: квазипродольной и изгибной). С помощью специальной программы ведения корней были построены траектории волновых чисел на комплексной плоскости  $\gamma$  при наличии потерь в некотором диапазоне значений параметра  $h$ . Расчёт траекторий обрывался по условию  $\text{Im}(\gamma_k)/\text{Re}(\gamma_k) > 0.1$ , что соответствует достаточно быстрому убыванию амплитуды соответствующей волны.

Абсолютные значения коэффициента передачи  $K_m(\omega, r, z_0)$ , рассчитанные для стального слоя ( $c_l = 5960$  м/с и  $c_s = 3240$  м/с) толщиной 10 мм в диапазоне частот от 60 кГц до 1 МГц для источников разного типа приведены на рис.1 (симметричные волны) и рис.2. (антисимметричные). Поглощение учитывалось умножением скоростей продольных и

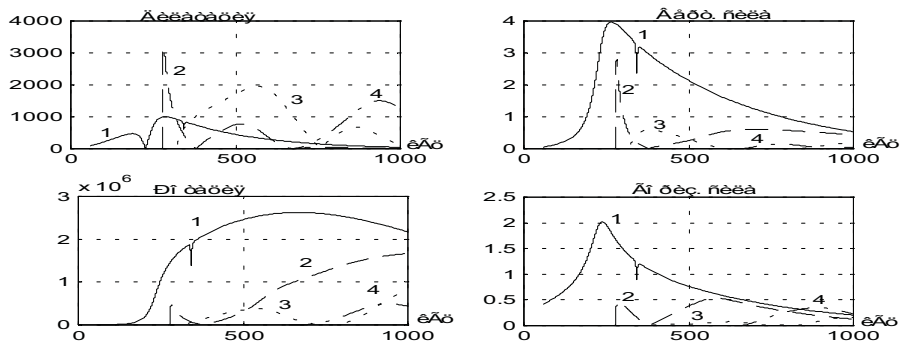


Рис.1.

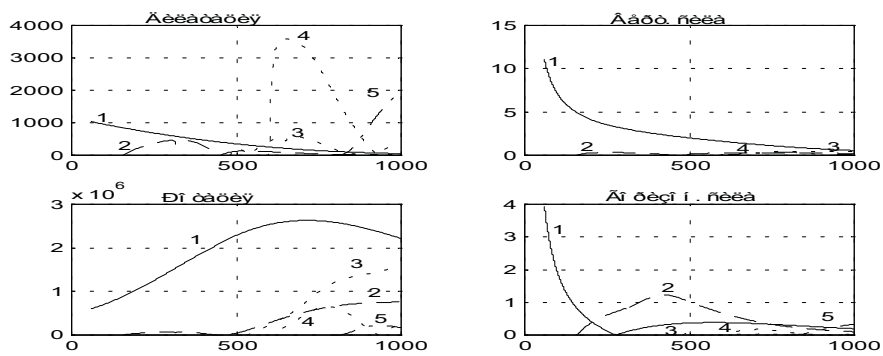


Рис. 2

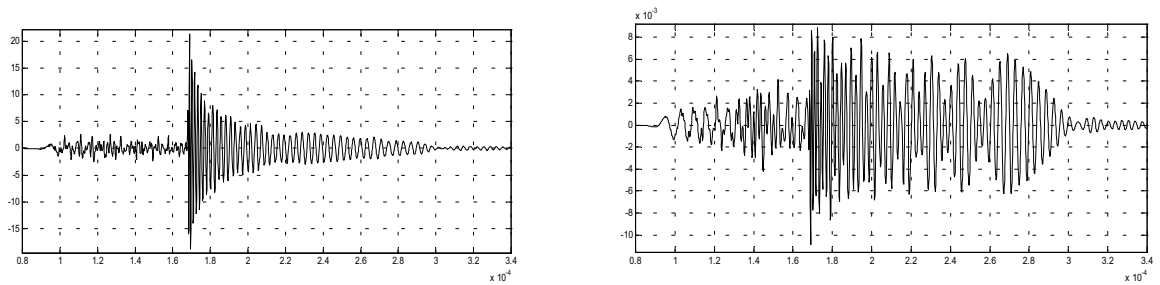


Рис. 3

сдвиговых волн в среде на множитель  $1 - i\delta$ , где было принято  $\delta = 0.001$ ,  $z_0 = H/2$ ,  $r = 0.5$  м. Абсолютные величины коэффициентов передачи для источников разных типов не подлежат сравнению, так как значения  $d_0, f_z, c_0, f_r$  принимались равными единице, а не из соображения выравнивания мощности источников; интерес представляет лишь распределение энергии по частоте и между волнами разных номеров.

На рис. 3 показаны временные зависимости, соответствующие моделям в виде источника дилатации (слева) и сосредоточенной вертикальной силы (справа) на выходе преобразователя акустической эмиссии GT200. Их отличие соответствует неодинаковости спектральных характеристик для этих двух типов источников.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Y.-H. Pao, R. R. Gajevski, A. N. Geranoglu. Acoustic emission and transient waves in an elastic plate. *Journ. Acoust. Soc. Am.* v. **65**, 1979, 1, pp. 96-105.
2. A. N. Geranoglu, Y.-H. Pao. Propagation of elastic pulses and acoustic emission in a plate. *Appl. Mech.*, v. **48**, 1981, p. 125-135.
3. R. L. Weaver, Y.-H. Pao. Spectra of transient waves in elastic plates. *Journ. Acoust. Soc. Am.*, v. **72**, 1982, 6, pp. 1933-1941.
4. Свиридов Ю. Б. О построении динамического тензора Грина для твёрдого слоя. *Акуст. ж.*, т. **21**, 1985, в. 2, с. 246-254.
5. Burridge R., Knopoff L. Body force equivalents for seismic dislocations. *Bull. Seism. Soc. Am.*, v. **54**, 1964, p. 1875-1914.
6. Галаненко В.Б. Обобщение метода поперечных сечений на задачу распространения волн в упругом слое с плавно изменяющимися параметрами. *Акуст. вісн.*, 1998, т. 1, №2, с. 41 – 47.
7. Galanenko V. B.. On coupled modes theory of two-dimensional wave motion in elastic waveguides with slowly varying parameters in curvilinear orthogonal coordinates. *J. Acoust. Soc. Am.*, **103**, No. 4, 1998, 1752-1762.