

**ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН
В ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ УПРУГИХ ТЕЛАХ
С ЕСТЕСТВЕННОЙ И НАВЕДЕННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ**
А.В. Белоконов*, О.А. Белоконов*, А.И. Болгова, А.В. Наседкин***

(* Россия, Ростовский госуниверситет)

(** Россия, Южно-Российский государственный технический университет)

В докладе дан обзор проведенных за последние годы исследований авторов в области динамических задач теории упругости с осциллирующими и подвижными источниками волн для изотропных и анизотропных сред.

Для задач о распространении волн в полуограниченных анизотропных упругих средах с подвижными осциллирующими источниками волн изучены свойства плоских волн и их характеристических поверхностей. Получены интегральные представления фундаментальных решений, а также формулы, описывающие кинематику и энергетику фундаментальных решений в дальнем поле.

Изучены спектральные задачи на сечении для неоднородной упругой полосы при подвижных осциллирующих источниках. Осуществлен переход от классической постановки задачи к обобщенной. Для численного решения обобщенной квадратичной спектральной задачи использован метод конечных элементов.

Для задач об установившихся колебаниях упругой анизотропной неоднородной полуплоскости разработана методика построения разрезов в комплексной плоскости параметра преобразования Фурье. Проведен анализ кинематики и энергетики волновых полей в анизотропной полуплоскости, полосе и составной полуплоскости при различных типах нагрузки. Изучены аналогичные задачи для изотропных сред в трехмерной постановке.

Введение. Динамические задачи теории упругости для анизотропных полуограниченных сред представляют существенный научный интерес и имеют важные практические приложения.

При исследовании установившихся режимов в таких задачах возможны три типа поведения во времени источников волн: осцилляция источника по закону $\exp(i\omega t)$, движение с постоянной скоростью, и одновременно осцилляция и движение. В задачах последнего вида даже для изотропных сред в подвижной системе координат возникает специфическая (наведенная) анизотропия. Такая анизотропия имеет как общие свойства с обычной анизотропией, так и ряд существенных отличий. Это обуславливает интерес к развитию методов исследований, пригодных для изучения задач, как с обычной, так и с наведенной анизотропией, а также к выявлению особенностей этих задач.

Далее будем использовать следующую терминологию. В случае движения источника с постоянной скоростью \mathbf{w} и одновременной его осцилляции с частотой ω будем говорить, что рассматривается задача B . В частном случае $\mathbf{w}=\mathbf{0}$, получаем классические гармонические задачи с осциллирующими источниками, которые будем называть задачами A .

Ранее авторами были проведены довольно обширные исследования задач B и A . Сформулированы принципы соответствия между задачами с осциллирующими и подвижными источниками [1, 2], исследованы принципы предельного поглощения [2, 12], предельной амплитуды [20], энергетические принципы излучения для подвижного и неподвижного наблюдателей [11, 12, 19], а также взаимосвязь между различными принципами. Изучались конкретные задачи B для изотропных сред, как, например: задачи

для полосы [9], трехмерного слоя [8, 10] и др. В указанных задачах найдена и проанализирована кинематика и энергетика волновых полей при различных режимах движения источников волн. Установлено наличие областей в изотропном трехмерном слое с различным числом распространяющихся волн [10], точек пересечения дисперсионных кривых для упругой изотропной жестко заземленной по основанию полосы [9] и получены многие другие важные результаты [8].

Ниже кратко описываются результаты последних лет, относящиеся в основном к исследованию задач B и A для анизотропных сред.

Плоские волны и фундаментальные решения. Энергетический анализ волновых полей в задачах B . Предположим для определенности, что источник колебаний движется вдоль оси ξ_1 неподвижной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. В задачах B предполагается, что в подвижной системе координат

$$x_1 = \xi_1 - wt, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3 \quad (1)$$

для вектора перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ существует режим установившихся колебаний

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t), \quad (2)$$

Уравнения движения теории упругости в подвижной системе координат (1) будут иметь вид (\mathbf{c} – тензор упругих модулей)

$$\rho(\partial_t - w\partial_1)^2 \mathbf{u} - \nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (3)$$

причем по принципу предельного поглощения в качестве решения (2) нужно понимать предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x})$ ε -задачи (2), (3) с частотой $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Как показал библиографический поиск, до недавнего времени фундаментальные решения (ФР) задач B , т.е. решения (2), (3) при $\mathbf{f} = f\delta(\mathbf{x})\mathbf{l} \exp(i\omega t)$ (\mathbf{l} – единичный вектор направления действия источника), не были построены ни для трехмерных, ни для двумерных задач.

ФР в R^3 были получены в [24, 26]. Опираясь на установленные свойства плоских волн и используя технику многомерного интегрального преобразования Фурье, в [24] были найдены ФР в виде суммы квазистатической \mathbf{v}_s и динамической \mathbf{v}_d составляющих ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_d$). Статическую составляющую удалось свести к интегралу по конечному отрезку, а динамическую \mathbf{v}_d – к сумме двумерных интегралов по полусфере

$$\mathbf{v}_d = \sum_{j=1}^3 \mathbf{v}_{dj}, \quad \mathbf{v}_{dj} = \frac{i\omega f}{8\pi^2 \rho} \sum_k' (-1)^{k+1} \mathbf{V}_j^{(k)}, \quad (4)$$

$$\mathbf{V}_j^{(k)} = \iint_{\substack{|\mathbf{n}|=1 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \geq 0}} \frac{\mathbf{P}_j(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{l} H[(-1)^k c_{pj}^A(\mathbf{n}) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}]}{c_{pj}^A(\mathbf{n}) (c_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n}))^2} \exp[-i\omega \mathbf{L}_j^{B(k)}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{x}] dS$$

где H – функция Хевисайда; $\mathbf{P}_j(\mathbf{n}) = \mathbf{p}_j(\mathbf{n})\mathbf{p}_j^*(\mathbf{n})$; $\mathbf{p}_j(\mathbf{n})$ – векторы поляризации плоских волн; $c_{pj}^A(\mathbf{n})$ – фазовые скорости плоских волн в задаче A ; \mathbf{n} – вектор единичной волновой нормали; $c_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n})$ и $\mathbf{L}_j^{B(k)}(\mathbf{n})$ – фазовая скорость и вектор рефракции плоских волн в задаче B ; Σ_k' означает наличие или отсутствие суммирования по k в зависимости от режима движения. Соответственно, верхний индекс (k) определяет значения для быстрой ($k = 0$) или для медленной ($k = 1$) волны при транс- или сверхсейсмических режимах движения.

Для динамических составляющих многомерным методом стационарной фазы построены асимптотики дальних полей $\omega R \rightarrow \infty$, $R = |\mathbf{x}|$ для простых стационарных точек:

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 (\Sigma_k') \sum_{m=1}^{N_j^{(k)}} \mathbf{v}_{jm}^{(k)}; \quad \mathbf{v}_{jm}^{(k)} \approx \frac{(-1)^{k+1} \text{if } \mathbf{P}_j(\mathbf{n}_{jm}^{(k)}) \cdot \mathbf{l} c_{pjm}^{B(k)}}{4\pi\rho R |c_{gjm}^{B(k)}| c_{pjm}^A \sqrt{k_{pjm}^{(k)}}} \exp \left[-i \left(\frac{\omega R}{|c_{gjm}^{B(k)}|} + \frac{\pi}{4} \sigma_{jm}^{B(k)} \right) \right], \quad (5)$$

где $c_{pjm}^{B(k)} = c_{pj}^B(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$; $c_{pjm}^A = c_{pj}^A(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$; $|\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}| = |\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})|$ – модуль вектора групповой скорости в задаче B ; $\sigma_{jm}^{B(k)} = \text{sign } k_{1jm}^{(k)} + \text{sign } k_{2jm}^{(k)}$ – сигнатура; $k_{pjm}^{(k)}$, $k_{1jm}^{(k)}$, $k_{2jm}^{(k)}$ – соответственно полная и главные кривизны поверхности рефракции $L_j^{B(k)}$ в стационарных точках $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$; $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$ – стационарные точки, определяемые из условий

$$\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} |\mathbf{y} \cdot \mathbf{L}_j^{B(k)}| = \mathbf{y}; \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{L}_j^{B(k)} \geq 0; \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} / |\mathbf{x}| \quad (6)$$

на поверхности рефракции $L_j^{B(k)}$; $N_j^{(k)}$ – количество стационарных точек.

Для фиксированного направления \mathbf{x} число стационарных точек и, следовательно, число распространяющихся волн в дальней зоне определяется согласно (6) как число точек пересечения волновых поверхностей $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$ с направлением \mathbf{x} .

В задачах B возможны ситуации, когда в различных зонах распространяется существенно различное число волн. Так, на рис. 1 и 2 показаны случаи существования от 0 до 12 распространяющихся волн. Между тем для задач A наиболее типичными являются лишь зоны с тремя и с пятью распространяющимися волнами.

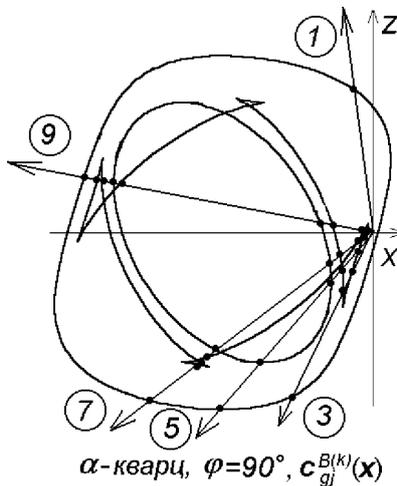


Рис. 1.

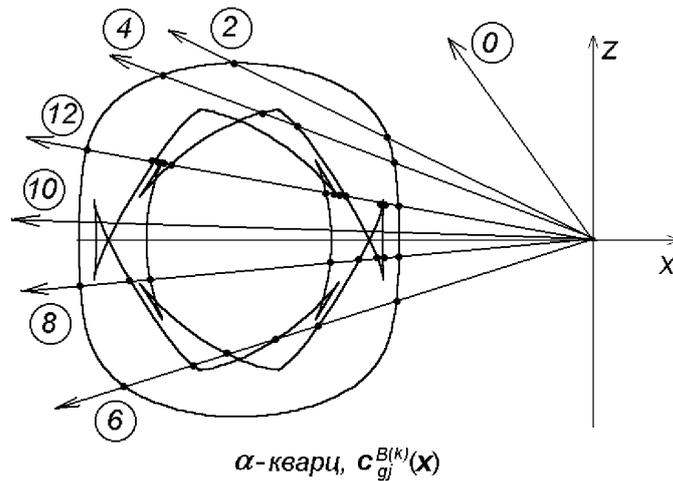


Рис. 2.

Итак, в задаче B движение источника может приводить к существенным изменениям в волновых полях: нарушению начальной симметрии, изменению числа волн в различных зонах пространства, распространению при сверхсейсмических режимах движения быстрых и медленных волн в зонах, ограниченных коническими поверхностями, и др.

С использованием общих результатов [11, 19] в [24] были получены простые формулы для осредненных по периоду колебаний векторов потоков энергий сферических волн для подвижного и неподвижного наблюдателей. В [26, 27] были построены ФР задачи B в R^2 и также дан их энергетический анализ в дальнем поле. Можно отметить значительное сходство итоговых формул, описывающих кинематику и энергетику дальних полей для двумерных и трехмерных задач.

Картины распределения потоков энергии в задачах B оказываются весьма сложными. Даже для случая изотропных сред здесь могут существовать зоны с различным числом распространяющихся волн и направления с резкими максимумами значений

потоков енергії. Эти ситуації були ретельно проаналізовані в [6, 7, 16, 17] для випадку тривимірного шару при дозвуковому русі, де було проведено чисельне дослідження розподілу потоку енергії для трьох видів навантаження: зосередженої сили, рівномірно розподіленої і синусоїдальної навантажень, діючих в рухомій системі координат в прямокутній області на верхній поверхні шару. Продемонстровано можливість управління потоком енергії в залежності від вибору навантаження і величини швидкості її русі.

Задачі В для еластичних воловодів. Задачі В і А для еластичних воловодів розглядалися в [18, 21-23, 25]. Незважаючи на те, що в задачах В порушуються багато властивостей симетрії спектра, існуючі в задачах А, задачі В для еластичних воловодів вдається дослідити за схемами, близькими до застосовуваних звичайно для задач А.

В [21, 23] після переходу до загальної постановки спектральної задачі на сеченні S воловода отримано квадратична задача на власні значення для хвильових чисел α і власних вектор-функцій $\mathbf{V} \in V$

$$\alpha^2 \tilde{k}_2(\mathbf{W}, \mathbf{V}) + \alpha \tilde{k}_1(\mathbf{W}, \mathbf{V}) + \tilde{k}_0(\mathbf{W}, \mathbf{V}) = 0, \quad \forall \mathbf{W} \in V \quad (7)$$

нормальних хвиль виду

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}(\mathbf{x}_\eta) \exp[i(\omega t - \alpha x_1)], \quad \mathbf{x}_\eta \in S$$

При цьому в задачах В має місце властивість ермитовості форм \tilde{k}_j

$$\overline{\tilde{k}_j(\mathbf{W}, \mathbf{V})} = \tilde{k}_j(\mathbf{V}, \mathbf{W}),$$

но в залежності від режиму русі можуть втрачатися властивості позитивності форми \tilde{k}_2 і деякі інші властивості.

Через удвоєння розмірності $\mathbf{V}, \mathbf{G} \in V$; $\mathbf{G} = \alpha \mathbf{V}$; $\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{W}, \mathbf{Y}]^*$, $\mathbf{g} = [\mathbf{V}, \mathbf{G}]^* \in V \times V$, квадратична задача (7) зводиться до лінійної задачі з ермитовими, але не позитивно визначеними, білінійними квадратичними формами h і b :

$$\alpha h(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{g}) = b(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{g}).$$

Для чисельного визначення хвильових чисел і форм нормальних коливань пропонується використовувати МКЕ в класическій лагранжевій формулюванні. В [18, 21, 23] можливості МКЕ були проілюстровані на прикладі розрахунку спектральних характеристик одношарової і двохшарової еластичних смуг, жорстко закріплених по основанню. Аналізувалися можливості МКЕ в знаходженні дійсних і комплексних коренів, а також двократних дійсних коренів при лінійних, квадратичних і кубічних лагранжевих кінцевих елементах (КЕ). Відзначено хороша точність визначення хвильових чисел при використанні квадратичних КЕ.

Для рішення задач В о вимушених коливаннях еластичних воловодів в [25] була намечена схема методу однорідних рішень. Метод [25] використовує нормальні хвилі і співвідношення ортогональності між ними і по формі мало відрізняється від відповідного для задач А. Відзначимо, однак, що використовувані в [25] співвідношення ортогональності для задач В були записані не в формах співвідношень J -ортогональності для розширених векторів переміщень-напружень, звичайно використовуваних при рішеннях задач А.

Метод контурного інтегрування в задачах В і А для анізотропних серед. В роботах [3, 4, 15] було правильно обґрунтовано і застосовано метод контурного інтегрування для побудови точних рішень задач А о коливаннях анізотропної напівплощини. В цих роботах була розроблена методика побудови розрізів в комплексній площині, які необхідно проводити для отримання точного рішення задачі для анізотропної

полуплоскости, как в области действия нагрузки, так и вне ее. Получены достаточно простые формулы для потока мощности, закачиваемого в полуплоскость, и для потока мощности, уходящего на бесконечность, проведен анализ кинематики и энергетики волновых полей в анизотропной полуплоскости. Развитая методология в [13, 14] была распространена на аналогичные задачи для упругой анизотропной полосы, сцепленной с анизотропной полуплоскостью. Для этих задач было проведено исследование потоков энергии, переносимых в полосе и в полуплоскости в зависимости от вида действующих нагрузок, дан сравнительный анализ потоков энергии от различных типов волн в полосе и в полуплоскости. Проанализированы также соотношения потоков энергии в полосе и полуплоскости при их жестком и скользящем соединении. Наконец, в [5] для неоднородной задачи Лява было показано, что при нагрузках специального вида возможно существование обратных волн в полуплоскости в области под нагрузкой.

Работа выполнена в рамках гранта НШ-2113.2003.1 по поддержке ведущих научных школ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоконов А.В. К теории динамических задач с подвижными возмущениями для неоднородной упругой полосы // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 5. С. 1079-1082.
2. Белоконов А.В. Колебания упругой неоднородной полосы, вызванные движущимися нагрузками // ПММ. 1982. Т. 46, № 2. С. 296-302.
3. Белоконов А.В., Белоконов О.А. Гармонические колебания в анизотропной полуплоскости // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 1999. № 4. С.16-18.
4. Белоконов А.В., Белоконов О.А. Метод контурного интегрирования в задачах о гармонических колебаниях анизотропной полуплоскости // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С.24-27.
5. Белоконов А.В., Белоконов О.А. О существовании обратных волн в неоднородной задаче Лява / Пробл. мех. деформир. твердого тела. Межвуз. сб. Санкт-Петербург, СПбГУ, 2002. С.51-57.
6. Белоконов А.В., Болгова А.И. Волновые поля в трехмерном волноводе при действии на него подвижных пульсирующих нагрузок // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды V Межд. конф., г.Ростов-на-Дону, 12-14 окт. 1999г. Т. 2. / Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2000. С.20-25.
7. Белоконов А.В., Болгова А.И. О распространении волн в изотропном трехмерном слое // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VIII Межд. конф. Ростов-на-Дону, 14-18 окт. 2002. / Ростов-на-Дону: Изд-во «Новая книга», 2003.
8. Белоконов А.В., Ворович И.И. О некоторых закономерностях образования волновых полей в анизотропном слое при пульсирующей движущейся нагрузке // Мех. и научн.-техн. прогресс. Т. 3. М., 1988. С. 215-222.
9. Белоконов А.В., Наседкин А.В. Распространение волн в изотропной жестко заземленной упругой полосе от движущихся осциллирующих нагрузок // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 9. С. 90-97.
10. Белоконов А.В., Наседкин А.В. Волны в неоднородном по толщине слое, вызванные движущимися нагрузками // ПММ. 1987. Т. 51, № 2. С. 305-313.
11. Белоконов А.В., Наседкин А.В. Энергетика волн, генерируемых подвижными источниками // Акустический журнал. 1993. Т. 39, Вып. 3. С.421-427.
12. Белоконов А.В., Наседкин А.В. Взаимодействие движущихся штампов с упругими и вязкоупругими телами / Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С.331-348.

13. *Белоконь А.В., Ремизов М.Ю.* Гармонические колебания упругой изотропной полосы, жестко связанной с анизотропной полуплоскостью // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды V Межд. конф., г.Ростов-на-Дону, 12-14 окт. 1999г. Т. 2. / Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2000. С.31-37.
14. *Белоконь А.В., Ремизов М.Ю.* Гармонические колебания в системе анизотропные полоса – полуплоскость при жестком и скользящем соединении сред // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2002. № 3. С.120-121.
15. *Белоконь О.А.* Применение метода контурного интегрирования в задачах о распространении волн в анизотропной полуплоскости / Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. к.ф.-м.н. Краснодар: Биос РГУ, 2001. 23с.
16. *Болгова А.И.* Распространение волн в трехмерном изотропном слое // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. 2001. Спецвыпуск. Математическое моделирование. С.36-37.
17. *Болгова А.И.* Распространение волн в трехмерном неоднородном слое от осциллирующей подвижной нагрузки / Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. к.ф.-м.н. Ростов-на-Дону, 2002. 24с.
18. *Виноградов Д.А., Наседкин А.В.* Конечно-элементный расчет спектральных характеристик двухслойной упругой полосы при движущихся осциллирующих нагрузках // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VII Межд. конф. памяти акад. РАН И.И.Воровича. Ростов-на-Дону, 22-25 окт. 2001. Т. 2. / Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2002. С.43-48.
19. *Наседкин А.В.* Общие теоремы о переносе энергии однородными волнами // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, Вып. 5. С.105-112.
20. *Наседкин А.В.* Новая улучшенная формулировка принципа предельной амплитуды // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения. Вып.3. Межвуз. сб. науч. тр. / Ростов н/Д.: ДГТУ, 1998. С.71-75.
21. *Наседкин А.В.* Определение спектральных характеристик упругих волноводов методом конечных элементов // Современные проблемы математического моделирования. Труды VIII Всеросс. шк.-семинара / Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. гос. ун-та, 1999. С.181-188.
22. *Наседкин А.В.* Общая форма соотношений ортогональности однородных решений в волноводах // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С.104-106.
23. *Наседкин А.В.* Конечно-элементный анализ спектральных задач для упругих и электроупругих волноводов с гармоническими подвижными источниками // Известия РАН. МГТ. 2000. № 3. С.40-46.
24. *Наседкин А.В.* Волновое поле движущегося гармонического источника в анизотропной упругой среде // Труды XXVIII Летней Школы «Актуальные проблемы механики», г. С.-Петербург (Репино), 1-10 июня 2000 г. / Под ред. Индейцева Д.А. СПб.: ИПМаш РАН, 2001. Т.2. С.66-79
25. *Наседкин А.В.* К расчету колебаний упругих волноводов при подвижных возмущениях // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VI Межд. конф., г.Ростов-на-Дону, 19-23 июня 2000г. Т. 1. / Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001. С.132-138..
26. *Наседкин А.В.* Волновые поля в анизотропных упругих средах с усложненными свойствами и методы конечно-элементного динамического анализа / Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. д.ф.-м.н. Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 2001. 27с.
27. *Iovane G., Nasedkin A.V., Ciarletta M.* Fundamental solutions in plane problem for anisotropic elastic medium under moving oscillating source // XXXI Summer School-Conf. “Advanced Problems in Mechanics”. June 22 – July 2, 2003, St.Petersburg (Repino), Russia. APM 2003. Book of Abstracts. St.Petersburg, 2003. P. 50.