

Четверта міжнародна науково-практична конференція

КОМП'ЮТЕРНА ГІДРОМЕХАНІКА

**Інститут гідромеханіки
Національної Академії Наук України**

30 вересня -1 жовтня 2014р.

ЗМІСТ

Владыкина Н.Н. , Семко А.Н., Казак О.В. (ДонНУ, Донецк) Расчет магнитогидродинамических процессов в металлургической печи с двумя подовыми электродами.....	3
Воропаев Г.А., Загуменный Я.В. (ИГМ НАНУ, Киев) Численное моделирование взаимодействия локальных возмущений пограничного слоя с деформирующейся поверхностью.....	5
Воскобойник А.А., Воскобойник В.А., Довгий С.А., Мальцев В.Г., Черний Д.И. (ИГМ НАНУ, Ін-т телекомунікацій НАНУ, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ) Компьютерное и экспериментальное моделирование вязких слоистых и почти слоистых течений.....	7
Воскобойник В.А., Воскобойник А.А., Воскобойник А.В. (ИГМ НАНУ, Киев) Физическое моделирование течения внутри пары овальных лунок на плоской поверхности.....	9
Горбань І.І. (ІГМ НАНУ, Київ) Чисельне моделювання взаємодії солітонної хвилі з нерівним дном.....	11
Дешко А. Е. (ИГМ НАНУ и ГКАУ, Днепропетровск) Численное моделирование турбулентных неравновесных течений в каналах и струях на основе упрощенных уравнений Навье-Стокса.....	13
Димитриева Н. Ф. (ИГМ НАНУ, Киев) Дискретное представление расчетной области с использованием открытых сеточных генераторов.....	15
Зибольд А.Ф. (Донецк) Разгон проводящей жидкости в цилиндре конечной длины под действием вращающегося магнитного поля.....	17
Зілінка В.В., Шквар Є.О. (НАУ, Київ) Оцінювання ефективності технології розпаралелювання обчислень при моделюванні турбулентного просторового обтікання крила скінченного розмаху.....	19
Лукьянов П.В. (ИГМ НАНУ, Киев) Конечно-разностные модели компактных субмезомасштабных вихревых течений.....	21
Movchan V.T., Shkvar Ye.O. (NAU, Kyiv) Multilevel mathematical models of shear flows turbulence.....	23
Онанко А.П., Андрущенко В.О., Продайвода Г.Т., Онанко Ю.А. (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ) Автоматизована система обробки і аналізу анізотропії акустичних швидкостей пружних хвиль та вплив ультразвуку, опромінення, зміни дефектної наноструктури на релаксаційні процеси.....	25
Онанко А.П., Андрущенко В.О., Продайвода Г.Т., Онанко Ю.А. (КНУ імені Тараса Шевченка, Київ) Вплив ультразвуку та автоматизована система аналізу акустичної анізотропії.....	27
Приходько А.А., Полевой О.Б., Липатов И.И. (ДНУ, Днепропетровск; ЦАГИ, Москва) Управление автоколебаниями скачков уплотнения на симметричном аэродинамическом профиле при трансзвуковом обтекании при малых углах атаки.....	29
Редчиц Д.А. (Институт транспортных систем и технологий НАН Украины) Компьютерное моделирование гидромеханики слабоионизированной плазмы.....	31
Розумнюк Н.В. (ИГМ НАНУ, Киев) Численное моделирование течения в паре лунок на плоской поверхности.....	33
Сохацький А.В. (Академія митної служби України, Дніпропетровськ) Сучасні методи розрахунку аеродинамічних характеристик літальних апаратів.....	34
Тимошенко В.И. (ИГМ НАНУ и НКАУ, Днепропетровск) Численное моделирование прогрева и воспламенения сухих и водонасыщенных угольных частиц в газодисперсном потоке.....	36
Шалденко А.В., Гуржий А.А. (НТУУ “КПИ”, Киев) Тепловые процессы при ламинарном течении жидкости в каналах с различной геометрией ограничивающих поверхностей.....	38
Потетюнко Э.Н. (ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия) Волны на поверхности жидкости, вызванные вибрацией пластин, лежащей на её поверхности.....	40

РАСЧЕТ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОЙ ПЕЧИ С ДВУМЯ ПОДОВЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Н.Н. Владыкина, А.Н. Семко, О.В. Казак ДонНУ, Донецк

В работе моделируются магнитогидродинамические процессы, протекающие в рудовосстановительной печи с двумя подовыми электродами. Приводится физическая и математическая постановка задачи, а методика и алгоритм численного моделирования задачи при помощи пакета Comsol.

Численное моделирование имеет широкое применение в металлургии, в частности, моделирование процессов, протекающих в дуговых сталеплавильных печах [1]. Проведение экспериментов в металлургии дорогостоящее и чрезвычайно сложное мероприятие. Наиболее простым и эффективным способом оценки процессов в печи является компьютерное моделирование. Проведение серии расчетов и анализ результатов позволяет оптимизировать и наладить работу дуговых сталеплавильных печей. Сталеплавильные печи постоянно нуждаются в модернизации, а, следовательно, и улучшении качества выпускаемого продукта, снижении затрат на выплавку металла и улучшении качества условий труда.

В условиях высоких и нестабильных цен на металлолом и чугун, применяемые в сталеплавильном производстве, актуальной становится задача использования металлургического сырья, полученного не только из рудных материалов, но и из техногенных отходов (окалина, пыли и шламы), в качестве частичной замены традиционных видов шихты. Накопленные ранее и воспроизводимые на металлургических предприятиях техногенные отходы делают актуальной разработку новых энергоэффективных, экологически безопасных технологий их переработки. Фирмой «РОУД» проведены лабораторные исследования процесса переработки железосодержащих отходов в электродуговой печи [2], в котором первую стадию твердофазного предварительного восстановления отходы проходят в камере печи со сводом для отходящих газов плавки, которые попутно подогревают шихту, а вторую, жидкофазную стадию – в ванне печи для получения чугуна.

Моделирование явлений в этой установке позволит детально изучить физические процессы в объеме расплава металла, а также улучшить работу печи и предложить методы снижения износа огнеупорного слоя между электродами.

Данная установка может быть представлена как плоская модель. Процессы, протекающие в установке нестационарные, однако они протекают достаточно медленно, и в хорошем приближении могут быть представлены как стационарные. Будем считать, что в ванне установки находится жидкая сталь. Физические характеристики среды (проводимость, коэффициенты вязкости, теплопроводности и т. д.) предполагаются однородными и изотропными и не зависят от температуры и давления. Также в данной модели не учитываются химические реакции в расплаве, при прохождении через него электрического тока, и сама среда считается немагнитной. Параметры геометрии приведены в миллиметрах на рис. 1.

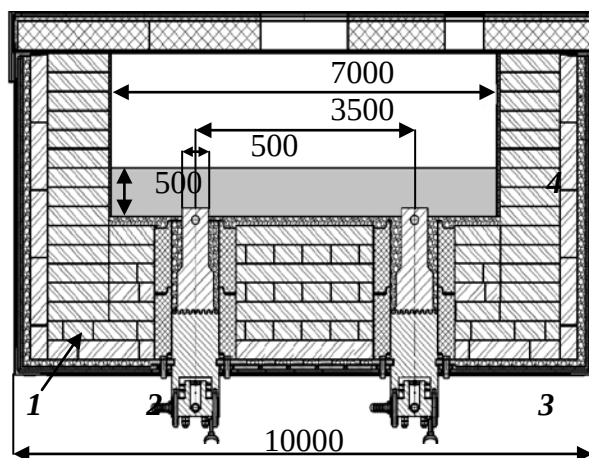


Рис. 1. Электропечь с подовыми электродами
1 – корпус печи, 2, 3 – подовые электроды,
4 – ванна расплава металла.

Для получения численных характеристик процессов в расплаве, таких как: распределение плотности тока, силы Лоренца, джоулева тепла, использовалось численное моделирование в пакете прикладных программ COMSOL Multiphysics, AC/DC Module, предназначенный для моделирования задач электромагнитных явлений постоянного тока. Режим In-Plane Electric and Induction Currents, Potential. Геометрия полностью покрывается расчетной сеткой. Целесообразно неравномерно разбивать расчетную область: сетка в промежутке между электродами должна состоять из более мелких элементов, чем в пределах электродов или у границ областей. Именно в данной области наблюдаются наибольшие градиенты электромагнитных параметров, а следовательно, и интенсивность протекающих процессов.

Параметры жидкой стали в ванне печи: плотность $\rho = 7,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, удельная электропроводность $\sigma = 9 \cdot 10^5 \text{ (См/м)}$, температура стали $t = 1600 \text{ }^\circ\text{C}$. Электроды 2 и 3 медные, удельная электропроводность которых $\sigma = 58,1 \cdot 10^6 \text{ (См/м)}$ [3].

Граничные условия:

- для электрического поля: $E_{\tau_1} = E_{\tau_2}, D_{n_1} = D_{n_2}$;
- для магнитного поля: $B_{n_1} = B_{n_2}, B_{\tau_1} = B_{\tau_2}$.
- значения потенциалов на электродах: $0 \dots 8 \text{ В}$.

При принятых физических допущениях, задача математически описывается следующими уравнениями для скалярного электрического и векторного магнитного потенциалов

$$-\nabla(-\sigma \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) + \sigma \nabla V - \vec{J}^e) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \times (\mu_0^{-1} \mu_r^{-1} \nabla \times \vec{A}) - \sigma \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) + \sigma \nabla V = \vec{J}^e. \quad (2)$$

Разработан и опробован в лабораторных условиях жидкофазный углеродотермический плавно-восстановительный процесс в электрической печи с подовыми электродами. Процесс не критичен к выбору шихтовых железосодержащих материалов: окалина, пыли и шламы доменного и сталеплавильного производства.

Использование подовых электродов позволяет существенно снизить инвестиционные затраты на оборудование, повысить энергоэффективность и экологическую безопасность процесса.

На примере рудовосстановительной электропечи с подовыми электродами получены распределения электромагнитных полей, плотности тока и силы Лоренца в плоской двумерной постановке для жидкой стали. Хорошее совпадение результатов расчетов разными методами с аналитическими приближениями и экспериментальными данными свидетельствует о надежности методов и достоверности результатов. Полученные результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kazak O. Modelling Vortex Fields in Metal Smelting Furnaces / Kazak O., Semko O. // Int. Journal of Multiphysics 2010. - Volume 4 • Number 4. - P. 351 - 358.
2. Патент 97745 Украина, C22B4/00. Способ выплавки металлов и агрегат для выплавки металлов / П.И. Тищенко, М. Павличевич, О.А. Троянский и др. ПП «Фирма РОУД». №201013890; заявлено 22.11.2010; опубл. 12.12.2011. Бюл. №23.- 6с.
3. Таблицы физических величин. Справочник. // Под ред. И. К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Г.А. Воропаев, Я.В. Загуменный

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Проблема снижения аэродинамического сопротивления тел при движении в жидкой и воздушной средах остается актуальной при возрастающей интенсивности перевозок и их скорости. Среди существующих методов затягивания перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный важная роль отводится методам управления, построенным на генерации возмущений подобных собственным возмущениям пограничного слоя, в том числе, с использованием деформирующихся поверхностей [1].

Исследования структуры возмущенного пограничного слоя на колеблющейся поверхности, как правило, проводятся в квазигармонической постановке, что не позволяет адекватно учитывать локальность и нерегулярность взаимодействия возмущений пограничного слоя и деформирующейся поверхности [2]. В настоящей работе предложено решение нестационарных уравнений Навье-Стокса, позволяющее проследить во времени и пространстве возникновение и развитие возмущений скорости и давления в сдвиговом слое на деформирующейся поверхности конечной длины при взаимодействии с импульсным источником [3]. На некотором расстоянии от ударного входа на обтекаемой поверхности располагается вставка конечной длины, на которой задаются осцилляции по закону бегущей волны путем вариации компонентами вектора скорости (рис.1).

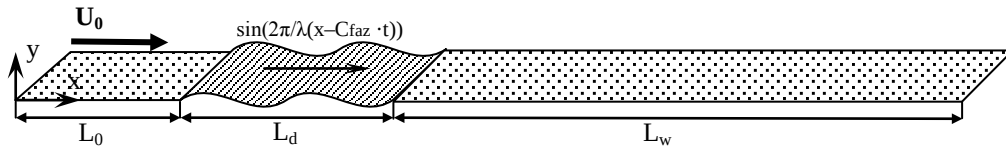
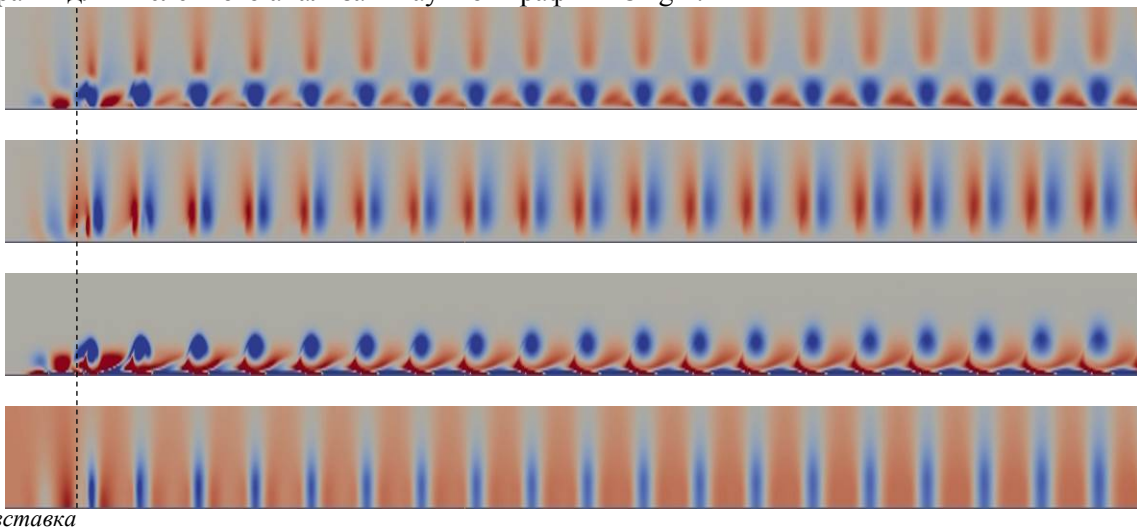


Рис.1. Система координат и схема задачи.

Решение поставленной задачи строится численно методами конечных разностей и конечных объемов с использованием программ собственной разработки и открытого инструментария вычислительной гидромеханики – пакета OpenFOAM с использованием объектно-ориентированного языка программирования C++. Для вычисления объемных интегралов по контрольному объему использовалась общая процедура Гаусса, интерполяция конвективных членов проводилась на основе TVD схем повышенного порядка точности, а для дискретизации производной по времени использовалась неявная трехточечная несимметричная схема второго порядка с разностями назад. Расчеты задачи проводились в параллельном режиме на базе высокопроизводительных вычислительных кластерных систем для широкого диапазона определяющих параметров задачи – скорости набегающего потока, длины и фазовой скорости бегущей волны по поверхности осциллирующей вставки. Обработка и визуализация результатов расчетов выполнялась с использованием графического интерфейса ParaView и пакета прикладных программ для численного анализа и научной графики Origin.



вставка

Рис.2. Структура полей различных физических переменных (продольная и нормальная компоненты скорости, завихренность, давление) при обтекании деформирующейся вставки длиной L_d :

$$Re=7 \cdot 10^4, U_0=0.1 \text{ м/с}, L_d=0.08 \text{ м}, C_f/U_0=0.45, \lambda/\lambda_{T\text{Smin}} \approx 1.$$

Структура возмущенного поля течения в сдвиговом слое при источнике возмущений на обтекаемой поверхности определяется параметрами поверхностной волны и отношением скорости среднего потока к фазовой скорости бегущей волны вдоль обтекаемой поверхности (рис.2). С ростом длины поверхностной волны происходит увеличение наполняемости сдвигового слоя возмущениями, генерированными колебаниями обтекаемой поверхности, и уменьшение скорости затухания возмущений вне сдвигового слоя (рис.3). При определенном сочетании параметров потока и осциллирующей поверхности могут быть получены слабо затухающие вниз по потоку колебания, которые и ответственны за неувеличение сопротивления трения.

Воздействие локального пульсационного источника в сдвиговом слое на неподвижной поверхности приводит к увеличению скорости затухания возмущений вниз по потоку с ростом частоты воздействия источника вплоть до значения частоты порядка $0.1U_0/\delta$ [4]. Путем варьирования волновыми и амплитудными характеристиками обтекаемой поверхности возможно управлять возмущенным полем течения, инициированным действием произвольного локального источника в сдвиговом слое.

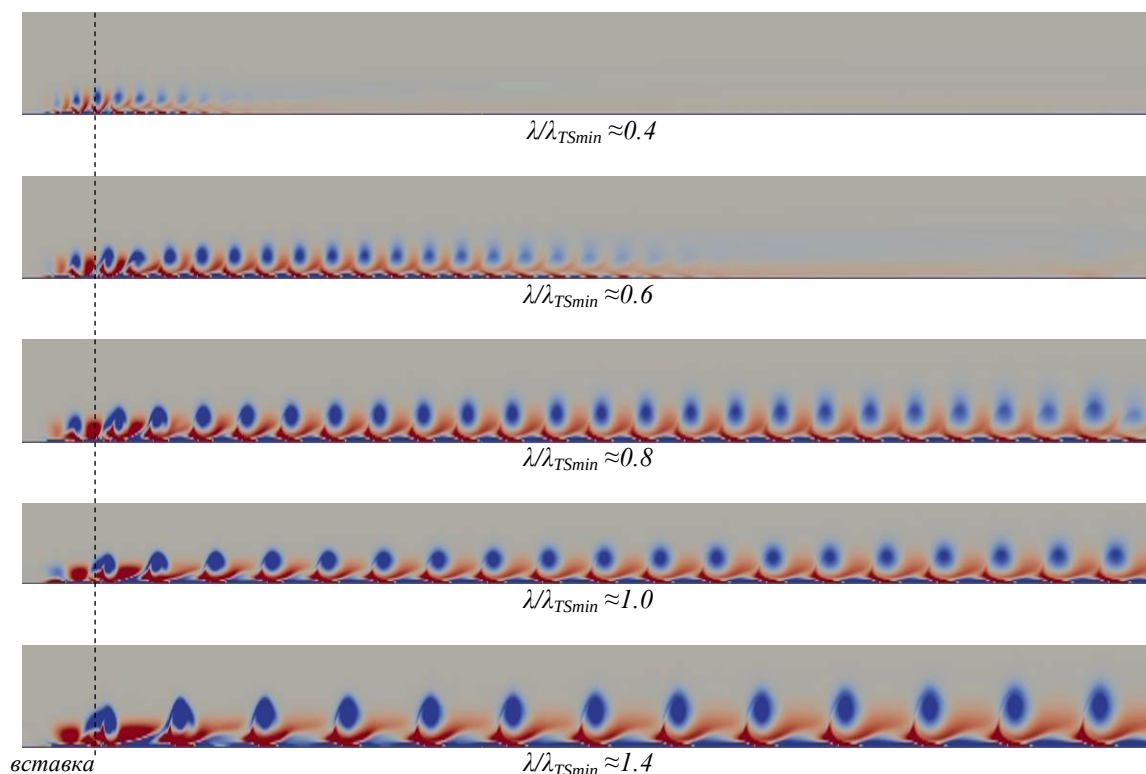


Рис.3. Картины поля завихренности при обтекании пластины для различных длин волны, бегущей по поверхности вставки длиной L_d : $Re=7 \cdot 10^4$, $Re_\delta=7.2 \cdot 10^{-3}$, $U_0=0.1$ м/с, $L_d=0.08$ м, $C_f/U_0=0.45$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Kramer. Boundary layer stabilization by distributed damping. Amer. Soc. Nav. Eng., 1960, 72, С. 25–33.
2. Г.А. Воропаев. Структура вынужденных возмущений в ламинарном пограничном слое при источнике возмущений на обтекаемой поверхности // Прикл. гидромеханика, 2007, 9(81), № 2–3, С. 52–68.
3. G. Voropaev, Ia. Zagumennyi. Wave and vortex structure of transitional boundary layer over deformable surface // Physica Scripta, 2010, T142, paper 014010. doi:10.1088/0031-8949/2010/T142/014010.
4. Г.А. Воропаев, Я.В. Загуменный. Численное моделирование взаимодействия локальных возмущений пограничного слоя с деформирующейся поверхностью // Вестник Донецкого Университета, Сер. А: Естественные науки, 2009, 1, С. 154–165.

Компьютерное и экспериментальное моделирование вязких слоистых и почти слоистых течений

А.А.Воскобойник^{*}, В.А.Воскобойник^{*}, С.А.Довгий^{**}, В.Г.Мальцев^{**}, Д.И.Черний^{***}

^{*}Institute of Hydromechanics, NAS, Kiev, Ukraine

^{**}Institute of Telecommunication & Global Information Space, NAS, Kiev, Ukraine

^{***}Kiev National Taras Shevchenko University, Ukraine

Рассматриваются слоистые и почти слоистые течения, вязкой несжимаемой жидкости между плоскими границами (Рис.1.),

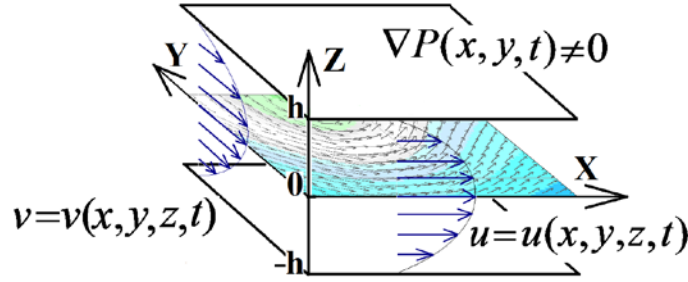


Рис.1.

которые описываются уравнениями Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{F} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{V} \quad (1)$$

$$\nabla \vec{V} = 0, \quad (2)$$

В силу нелинейности данных уравнений получение аналитического решения, определяющего зависимость давления от скорости возможно только в отдельных частных случаях [1].

Так, при рассмотрении вязких слоистых нестационарных течений параллельных плоскости OXY , компонента скорости w вдоль оси OZ (перпендикулярная слою) полагается равной нулю $w(x, y, z, t) \equiv 0$, сделано предположение о консервативности поля внешних сил и, что при любых значениях поперечной координаты, в любой момент времени существует непрерывно дифференцируемая функция $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ такая, что для компонент скорости слоя справедливо потенциальное представление

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z, t). \quad (3)$$

При сделанных предположениях, уравнения Навье-Стокса интегрируются и получается выражение, похожее на интеграл Коши-Лагранжа с диссипативным слагаемым

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} - U(x, y, z) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = q(z, t), \quad (4)$$

где правая часть является зависящей только от времени при любом фиксированном значении поперечной координаты и определяется из входных данных задачи.

Полученный интеграл позволяет сформулировать задачи о вязких слоистых течениях между плоскими подвижными границами, с учетом нестационарности и вклада конвективных слагаемых:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, z, t) = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(x, y, z, t) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z, t) \right)^2 \right) + q(z, t) - \frac{P(x, y, t)}{\rho}, \quad (5)$$

при заданных условиях прилипания на, в общем-то, подвижных границах, при $z = \pm h$:

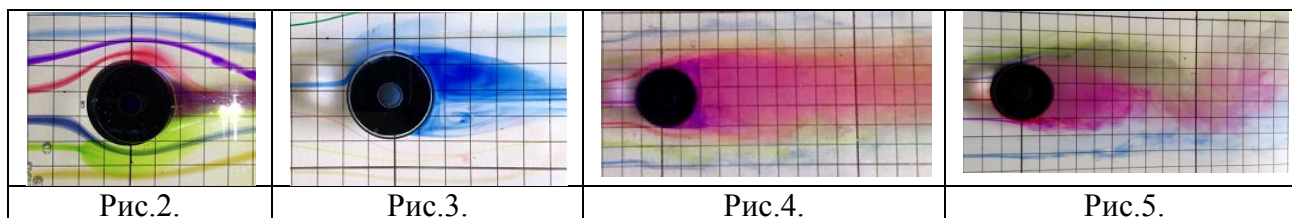
$$\nabla_{xy}\varphi|_{z=\pm h} = (u(x, y, \pm h), v(x, y, \pm h), 0), \quad (6)$$

и начальных условиях:

$$\vec{V}(x, y, z, t_0) = \vec{V}_0(x, y, z). \quad (7)$$

Частные решения задач, в предельных случаях (с классическими начальными и краевыми условиями), приводят к классическим решениям течения Пуазейля, течения Куэтта, течения Хил-Шоу, а также, к слоистым циркуляционным течениям.

Размерный анализ вязкого, почти слоистого течения, сделанный в предположении малости (или равенства нулю) поперечной слою компоненты скорости подтвердил справедливость сделанных предположений относительно векторного поля скоростей и возможности упрощения уравнений. Результаты исследований на лабораторной установке обтекания препятствия установленного в слое толщиной 15мм подтверждают допустимость предположения о сохранении «потенциальности» обтекания, как для каждого из слоев течения, так и для осредненного по толщине слоя течения, в достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса $10 < Re < 3000$ (Рис.2.-Рис.5.).



Результаты исследований позволяют расширить применение потенциальных моделей течений идеальной жидкости на некоторые виды вязких слоистых течений.

При разработке математического аппарата компьютерных моделирующих систем для исследования отдельных вязких, почти слоистых течений (какими могут считаться течения в мелководных акваториях) возможно применение моделей, основанных на методе дискретных особенностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика.- М.,Л.:ОГИЗ ГИТТЛ, 1947.-928 с.
2. Hele-Shaw H.S. Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream motion under certain experimental conditions. // Trans.Inst. Nav. Arch. XI, 25(1898).
3. F.Riegels, Zur Kritik des Hele-Shaw-Versuches, Zeitschr.// Angew.Math u.Mech. 18,1938,95-106.
4. Stanislav A. Dovgiy, Dmytro I. Cherniy A Circulation Flow in Sea Strait Simulation// Тези науково-практичної конференції «Комп'ютерна гідромеханіка», м. Київ, 30 вересня - 01 жовтня 2008р., Інститут гідромеханіки НАН України, с.20-21.
5. Cherniy D.I., Dovgiy S.A. The vortex model of circulation flow in sea channel // "150 Year of Vortex Dynamics", IUTAM Symposium, Lyngby & Copenhagen, Denmark Technical University, Oktober 12-16, 2008.
6. Черний Д.И. Интеграл типа Коши-Лагранжа для нестационарных течений типа Hele-Shaw.// Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2009).- Часть 1, Харьков-Херсон, 2009, с. 185-187.
7. Cherniy D., Dovgiy S., Meleshko V. The Vortex Model of a Viscid Wall's Layer // IUTAM Symposium on "Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function", Abstract Book, March 10(Sun)-14(Thu), 2013, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine, Fukuoka, Japan, p.p. 126-127.

ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВНУТРИ ПАРЫ ОВАЛЬНЫХ ЛУНОК НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Воскобойник В.А., Воскобойник А.А., Воскобойник А.В.

Институт гидромеханики НАН Украины, г. Киев, Украина

В представленном докладе приведены результаты физического моделирования механизма формирования и развития когерентных вихревых структур внутри пары овальных лунок, расположенных на гидравлически гладкой плоской поверхности. Эксперименты проводились в гидродинамическом лотке со свободной поверхностью воды. Пара овальных лунок, каждая из которых имела вид двух сферических сегментов, объединенных цилиндрической вставкой, диаметром 25 мм, длиной 50 мм и углублением 5,5 мм, были сделаны на пластине, которая устанавливалась вдоль продольной оси лотка. Лунки с острыми кромками располагались под углом 30 градусов к направлению потока. Передние сферические части лунок находились на расстоянии 25 мм друг от друга, а их кормовые сферические части на расстоянии 5 мм. В ходе экспериментов проводилась визуализация течения посредством подачи красителей через миниатюрные трубочки, а также нанесением водорастворимого контрастного покрытия на обтекаемые поверхности. Материалы визуализации регистрировались при помощи скоростных видеокамер и цифровых фотоаппаратов. Обработка и анализ картин визуализации проводились на специально созданной графической компьютерной станции с использованием соответствующего программного обеспечения. В ходе покадровой, ускоренной или замедленной обработки видеоматериалов определялись места зарождения крупномасштабных (соизмеримых с размерами лунок) и мелкомасштабных вихревых структур. Оценивалось направление переноса и вращения когерентных вихревых структур, скорость их конвекции, частоты и места выбросов наружу из лунок.

Для проведения измерения поля скорости и давления использовались специально разработанные и созданные миниатюрные пьезокерамические и пьезорезистивные датчики пульсаций пристеночного и динамического давлений. Датчики пристеночного давления устанавливались заподлицо с обтекаемой поверхностью лунок и пластины. Малые размеры чувствительной поверхности датчиков позволили регистрировать без корректировки псевдозвуковые пульсации пристеночного давления, источниками которых являются вихревые структуры, имеющие пространственные масштабы более 2,5 мм. Этот предел масштабов обусловлен особенностью пространственного фильтрации пульсаций давления, масштаб которых меньше двух диаметров чувствительной поверхности датчиков пульсаций давления. Для исследований пространственно-временных характеристик, в том числе и взаимных, поля пульсаций поверхностного давления внутри системы овальных лунок и в их ближнем следе использовались 12 датчиков пульсаций пристеночного давления. Поле пульсаций скорости исследовалось с помощью специально разработанных и созданных датчиков пульсаций динамического давления или скоростного напора на базе пьезокерамических датчиков давления. Датчики пульсаций динамического давления в виде трубки Пито вводились в область измерений, используя хорошо обтекаемые ножи и координатные устройства. Координатные устройства позволяли перемещать датчики с точностью до 10 мкм в исследуемые области вихревого течения и в пограничный слой над обтекаемыми поверхностями. В экспериментальных исследованиях одновременно использовалась пара датчиков пульсаций динамического давления, расположенных друг над другом на расстоянии 3,5 мм. Обработка и анализ результатов физического моделирования осуществлялись на специализированных двухканальных анализаторах спектров фирмы “Брюль и Кьер” (Дания), а также на персональных компьютерах. Электрические сигналы датчиков оцифровывались с помощью аналогово-цифровых преобразователей фирмы “L-Card” и регистрировались на персональных компьютерах.

Используя специализированные пакеты прикладных программ для обработки и анализа экспериментальных данных типа “MatLab”, “LabView”, “OriginLab”, полученные результаты обрабатывались и анализировались на компьютерах. В ходе обработки и анализа данных применялся аппарат теории вероятности и математической статистики.

В результате визуальных исследований зафиксированы картины вихревого течения, которое формируется внутри системы овальных лунок, определены характерные особенности вихреобразования для разных режимов течения. Установлено, что для малых скоростей потока, соответствующих ламинарному режиму течения, внутри овальных лунок наблюдается формирование мало интенсивных продольных жгутов, которые скручиваясь совершали низкочастотные колебания вдоль продольных и поперечных осей лунок. Для турбулентного режима течения внутри овальных лунок формируются медленно вращающиеся веретенообразные вихри, которые с увеличением скорости прижимаются к передним сферическим частям лунок. Эти веретенообразные вихри, достигая масштабов лунок, выбрасываются наружу из овальных лунок, нарушая структуру пограничного слоя. Внутри лунок происходит низкочастотное колебательное движение во взаимно перпендикулярных плоскостях относительно осей лунок, частота которых растет с увеличением скорости течения. Для исследуемого разделения между овальными лунками, как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения не наблюдалось взаимодействия между вихревыми структурами, генерируемыми внутри каждой из лунок.

Показано, что интенсивность пульсаций продольной скорости имеет максимальные значения вблизи обтекаемой поверхности, а также на границе сдвигового слоя в отверстии овальных лунок. Интенсивность пульсаций пристеночного давления наибольшая в области взаимодействия вихревых структур сдвигового слоя и крупномасштабных вихревых систем, которые выбрасываются наружу из лунок, с кормовой стенкой овальных лунок. Наименьшая интенсивность пульсаций пристеночного давления имеет место на дне каждой из овальных лунок в их передних по потоку сферических частях.

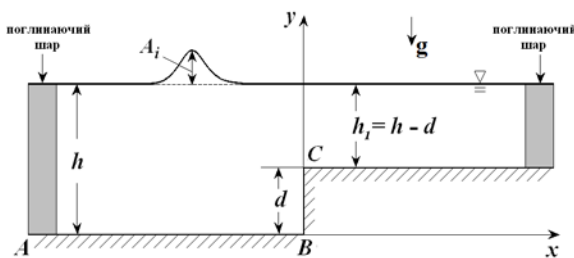
Установлено, что в зависимости от режимов обтекания в спектральных характеристиках поля пульсаций пристеночного давления, измеренного на обтекаемой поверхности, появляются характерные особенности в виде дискретных пиков. Эти пики наблюдаются на частотах, отвечающих низкочастотным колебаниям вихревого течения внутри овальных лунок, на частотах вращения квазиустойчивых крупномасштабных вихрей, генерируемых внутри лунок, и на частотах выбросов когерентных вихревых систем наружу из лунок. Корреляционный и взаимный спектральный анализы пульсаций скорости и давления показали, что в срединном сечении системы овальных лунок (в их ближнем следе) не наблюдается взаимодействия вихревых структур, которые выбрасываются наружу из лунок. При удалении до двух диаметров лунок в ближнем следе каждой из лунок также наблюдаются характерные тональные подъемы в спектральных зависимостях в тех же частотных диапазонах, которые имели место внутри овальных лунок. На удалении, превышающем три диаметра лунки, в срединном сечении системы лунок, а также в следе каждой из них интенсивность пульсаций скорости и пристеночного давления уменьшается на характерных тональных подъемах в спектрах и пограничный слой постепенно восстанавливается.

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ СОЛІТОННОЇ ХВИЛІ З НЕРІВНИМ ДНОМ

Горбань І.М. (Інститут гідромеханіки НАНУ)

Вивчення взаємодії морських хвиль, зокрема, солітону, із зануреними об'єктами (інженерними спорудами або природними нерівностями дна) є класичною задачею морської гідродинаміки. В більшості досліджень розглядалися трансформації вільної поверхні, викликані різкими змінами глибини води. Зворотнім процесом цієї взаємодії є відривні процеси, які генеруються хвилею над нерівним дном, внаслідок чого утворюються вихори великого масштабу. Ці вихори, з одного боку, сприяють зменшенню енергії хвилі, а з іншого – розмиваючи дно, загрожують безпеці інженерних споруд. Отже, вивчення відривних процесів навколо нерівностей дна є важливим, як з точки зору покращення оцінок еволюції набігаючих хвиль, так і для передбачення потенційних загроз стійкості занурених конструкцій.

В цій роботі проведено чисельне моделювання в'язкої взаємодії солітонної хвилі з підводним уступом. Воно включає вивчення трансформацій вільної поверхні і характеристик вихрової течії, яка генерується хвилею. Розроблена чисельна схема поєднує метод граничних інтегральних рівнянь для описання деформацій поверхні; конформне відображення області течії на півплощину, що забезпечує виконання умови непротікання на неплоскому твердому дні; вихровий алгоритм для розв'язання рівнянь динаміки рідини. Схема течії і важливі параметри задачі показані на рис. 1. Вільна поверхня моделюється



вихровим шаром, який параметризується лагранжевими елементами. Тоді кінематична умова на ній виражається рівнянням руху вихорів. Динамічна умова розглядається в припущенні, що в'язкістю на вільній поверхні нехтується, це зводить її до вимоги неперервності тиску при переході

1. Схема течії.

через границю. Щоб виключити відбиття

хвилі на бічних границях області, там вводяться поглинаючі шари, які абсорбують збурення поверхні. Умова непротікання на дні виконується конформним відображенням області течії на півплощину. Рівняння динаміки рідини розв'язуються вихровим методом [1]. Початкова форма вільної поверхні розраховується на основі ітераційного алгоритму [2]. Оскільки в'язкими процесами на рідкій границі нехтується, для її моделювання можуть бути використані рівняння ідеальної рідини. Застосування інтегралу Коші-Лагранжа до знаходження інтенсивності вихрових елементів, які моделюють вільну поверхню, докладно описане в [3].

Для класифікації взаємодії солітону з підводним уступом застосовується кількісний критерій, запропонований в [4]: $K_{int} = A_i / (h - d)$. На рис. 2 представлено розраховану динаміку вільної поверхні при різних K_{int} , коли висота падаючого солітону $A_i = 0.2$. Момент $t = 0$ відповідає тут проходженню вершини хвилі над уступом. Загальним для усіх випадків є те, що амплітуда падаючого солітону спочатку локально збільшується, а потім – зменшується, що пов'язано з втратами енергії на його розділення, коли утворюються відбита і прохідна хвилі. Далі процес трансформації прохідної хвилі залежить від висоти нерівності. При $K_{int} = 0.3$ вона лише слабо викривляється, але й тут спостерігається утворення вторинної хвилі. При $K_{int} = 0.4$ головна прохідна хвиля поділяється на субгармоніки, а її амплітуда істотно збільшується. Коли $K_{int} = 0.8$, амплітуда прохідного солітону досягає максимального значення, спостерігаються інтенсивні вторинні хвилі і

дисперсійний ланцюжок хвиль. Розрахунки показують, що при подальшому збільшенні висоти уступу солітон буде обвалюватися ще перед нерівністю.

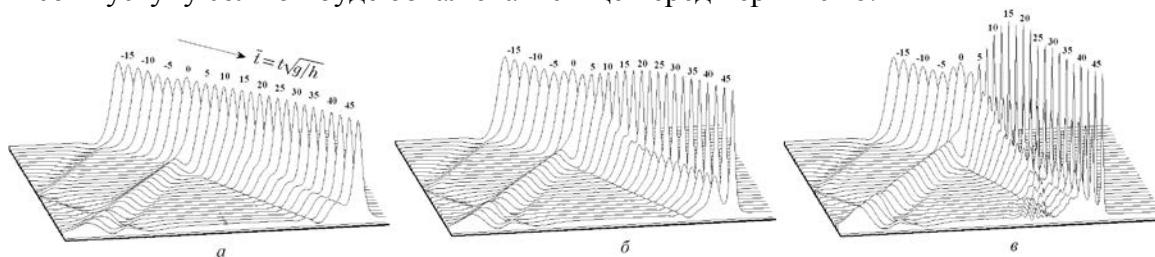


Рис. 2. Еволюція вільної поверхні при проходженні солітонної хвилі з початковою амплітудою $A_i = 0.2$ над підводним уступом: $a - K_{\text{int}} = 0.3$, $b - K_{\text{int}} = 0.4$, $c - K_{\text{int}} = 0.8$.

Переміщення нелінійної солітонної хвилі генерує потік частинок рідини, який відривається в гострій крайці. На рис. 3 показана еволюція вихрової течії в околі сходинки при $A_i = 0.2$, $d = 0.5$ ($K_{\text{int}} = 0.4$) від утворення циркуляційної зони до генерації вторинного вихора і їх затухання. Взаємодія цих двох структур визначає динаміку рідини і турбулентні процеси в області.

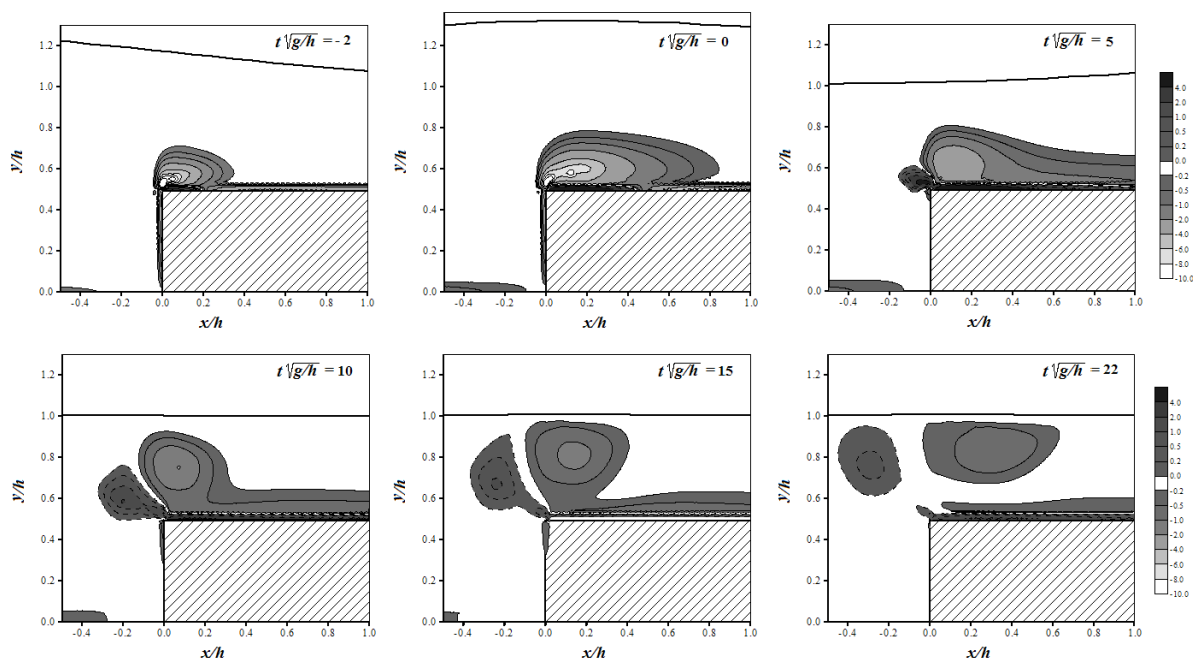


Рис. 3. Картини завихреності при проходженні солітону з амплітудою $A_i = 0.2$ над підводним уступом висотою $d = 0.5$.

1. Горбань В.О., Горбань І.М. Вихрова структура потоку при обтікання квадратної призми: числова модель та алгоритми управління // Прикладна гідромеханіка. – Т. 7. – № 2. – 2005. – С. 8–26.
2. Tanaka M. The stability of solitary waves// J. Phys.Fluid. – 29. №3. – 1986. – Р. 650–655.
3. Белоцерковский С.М., Дворак А.В. Общие свойства нелинейных задач гидродинамики с жидкими границами. // Труды ВВИА им. Жуковского. – Вып. 1311. – 1993. – С. 125–132.
4. Котельнікова А.С., Нікішов В.І., Сребнюк С.М. Взаємодія поверхневих поодиноких хвиль з підводними перешкодами // Доповіді НАНУ. – № 7. – 2012. – С. 54–59.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛАХ И СТРУЯХ НА ОСНОВЕ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Дешко А. Е., ИТМ НАНУ и ГКАУ, г. Днепропетровск

Эффективным методом исследования струйных неравновесных течений является численное моделирование. Анализ имеющихся литературных источников показывает, что создание универсальных методов и алгоритмов расчета струйных течений химически-реагирующих газов, основанных на численном решении полной системы уравнений Навье–Стокса, не всегда обосновано. Это связано, с одной стороны, с большими вычислительными затратами, возникающими при моделировании турбулентных неравновесных течений с учетом конечных скоростей химических реакций, с другой стороны, со многими неопределенностями в моделях турбулентности и кинетических параметрах горения. Поэтому целесообразно использование упрощенных математических моделей, разработка соответствующего программного обеспечения и проведение численного моделирования, которое максимально учитывает особенности рассматриваемых струйных течений реагирующих смесей газов при разумных затратах вычислительных ресурсов.

Основной целью настоящей работы является проведение численных исследований вязких неравновесных течений в каналах и струях с учетом влияния турбулентности и конечных скоростей химических реакций на основе упрощенных моделей Навье–Стокса – стационарных уравнений «узкого канала» и вязкого слоя с использованием экономичных маршевых методов. Указанные модели дают возможность проводить расчет турбулентных неравновесных струйных течений в протяженных плоских и осесимметричных каналах с небольшим искривлением линий тока при больших и умеренных числах Рейнольдса. Особенностью модели «узкого канала» является то, что она позволяет моделировать как дозвуковые, так и сверхзвуковые струйные течения при условии постоянства статического давления в поперечном направлении. Последнее обстоятельство значительно сужает диапазон применимости данной модели при расчете сверхзвуковых течений. Модель вязкого слоя адекватно описывает вязкие сверхзвуковые течения с небольшими дозвуковыми зонами и с учетом влияния поперечного градиента давления на характеристики рассматриваемого течения. При наличии в сверхзвуковом потоке небольших дозвуковых зон используется регуляризирующий метод, основанный на сохранении только части производной от давления в маршевом направлении в областях дозвукового течения. При моделировании сверхзвуковых течений с обширными дозвуковыми зонами используются глобальные итерации по давлению.

Исследовано истечение и горение неравновесных струй, содержащих углеводородное топливо (водород, метан, пропан, бутан) в спутный поток воздуха с учетом конечных скоростей химических реакций. При численном моделировании химической кинетики рассмотрены различные кинетические модели горения водорода в кислороде воздуха и показано, что в зависимости от начальных условий и требуемых параметров на выходе, могут быть использованы рациональные кинетические модели – от брутто-реакций и моделей включающих 8 – 9 реакций до более сложных. Кинетика горения метана в кислороде воздуха описывается в рамках детальной схемы, включающей 55 химических реакций, и при помощи глобальной модели, описываемой одной брутто-формулой. Предварительное тестирование рассмотренных кинетических схем выполнено в рамках среднеобъемной модели путем сравнения с равновесной температурой. При моделировании двумерного стационарного неравновесного течения в канале механизм окисления горения водорода в воздухе описывается схемой из 9 химических реакций, кинетика горения углеводородного топлива (метана, пропана, бутана) в спутном потоке воздуха в канале моделируется в рамках глобальной модели.

В рамках модели «узкого канала» для дозвукового неравновесного течения углеводородного топлива в осесимметричном канале проведены исследования влияния турбулентных пульсаций концентраций топлива и окислителя на параметры течения на участке воспламенения и горения. Исследовано влияние начальной турбулентности потоков, температурного режима, массового соотношения окислителя и горючего и положения сечения поджига на интенсивность и протяженность области горения. Установлено, что при варьировании входных газодинамических параметров наибольшее влияние на уменьшение длины области смешения оказывает повышение начальной турбулентности потоков. Турбулентные пульсации концентраций компонент оказывают существенное влияние на параметры воспламенения в случае моделирования перемешанных потоков окислителя и горючего, особенно при осуществлении воспламенения при помощи поджига. Выбор оптимальной температуры окислителя при самовоспламенении и рационального расположения сечения поджига позволяет уменьшить протяженность области горения.

С использованием стационарных уравнений вязкого слоя проведено численное моделирование неравновесного истечения холодной сверхзвуковой воздушно-водородной струи в спутный сверхзвуковой поток горячего воздуха в осесимметричном канале. Тестирование алгоритма расчета и выбор кинетической модели горения выполнены на основе сравнения распределения давления на стенке канала с экспериментальными данными в камере сгорания ГПВРД. При подаче центральной водородной струи в спутный поток воздуха при параметрах потока соответствующих режиму работы камеры сгорания ГПВРД осуществляется режим горения близкий к диффузионному. Для интенсификации процесса горения предложено добавлять воздух в водородную струю. Исследовано влияние массового состава и статической температуры струи на развитие и протяженность области горения. Проведенные параметрические расчеты позволили установить, что добавление воздуха в водородную струю приводит к значительному сокращению области горения, улучшению тяговых характеристик двигателя и увеличению полноты сгорания топлива. Показано, что осуществлять подачу топливной струи следует при невысокой температуре торможения; для улучшения параметров смешения и горения необходимо обеспечить перепад скоростей в топливной струе и спутном потоке.

В результате выполненных исследований для заданных газодинамических и геометрических условий на входе установлено, что рациональный выбор параметров истечения воздушно-водородной струи и, в частности, задание ее массового состава с большим избытком горючего, позволяет организовать режим горения, оптимальный с точки зрения максимального тепловыделения, полноты сгорания топлива и уменьшения длины области его выгорания.

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОТКРЫТЫХ СЕТОЧНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

*Димитриева Н. Ф.
Институт гидромеханики НАН Украины, г. Киев*

Изучаются течения непрерывно стратифицированных жидкостей с учетом эффектов вязкости и диффузии. Помещение непроницаемого препятствия в стратифицированную среду приводит к нарушению фонового диффузионного потока стратифицирующей примеси, что приводит к формированию сложной многоуровневой вихревой системы. В качестве препятствия рассматривается клин с прямыми и искривленными гранями. Научный интерес представляет влияние на динамику и структуру течений радиуса и знака кривизны (выпуклость и вогнутость).

Для математического описания поставленной задачи используется система уравнений механики несжимаемой жидкости, включающая уравнение неразрывности, баланса импульса, температуры и концентрации с замыкающим уравнением состояния. Условия адекватного разрешения мелкомасштабных элементов течения, связанных с эффектами стратификации и диффузии, накладывает существенные ограничения на минимальный шаг по пространству вблизи препятствия. В то же время расчетная область должна быть достаточно большой, чтобы учесть крупномасштабные структурные элементы течения, как вихри и внутренние волны. Это приводит к увеличению количества узлов расчетной сетки, что существенно замедляет скорость численных расчетов и вынуждает программиста прибегать к помощи высокопроизводительных вычислительных систем.

Дискретизация расчетной области осуществлялась с использованием стандартных утилит blockMesh, snappyHexMesh на базе открытого пакета OpenFOAM, а также в открытой интегрируемой платформе SALOME. Простота геометрии позволяет построить блочно-структурированную гексаэдральную расчетную сетку с совмещением линий на границах блоков. Процедура построения была параметризирована, что позволило существенно сократить время перестройки сетки при изменении геометрических параметров расчетной области и препятствия. Алгоритм разбиения предполагает сгущение ячеек в направлении препятствия, как показано на рис. 1, а). Но у такого подхода есть недостаток: измельчение сетки в одной области влечет слишком мелкую сетку в других областях решения и бесполезную трату вычислительных ресурсов. Кроме того, длинные узкие ячейки могут плохо влиять на сходимость.

При построении расчетной сетки, фрагмент которой представлен на рис. 1, б), дополнительно использовались стандартные утилиты topoSet и refineMesh, позволяющие на основе геометрических либо параметрических признаков выделять подобласти расчетной сетки и измельчать их в соответствии с заданными масштабами и выбранными направлениями. При таком подходе гораздо лучше разрешаются диффузионные микромасштабы вблизи непроницаемых границ препятствий при относительно небольшом общем количестве узлов. Вместе с тем уменьшение пространственного разбиения, даже на небольшом участке расчетной области, требует соответственного уменьшения шага по времени, что увеличивает время расчета. Существенным недостатком поэтапного разбиения расчетной сетки является резкое изменение размера ячейки на границе заданной области, что может отразиться на результатах вычислений.

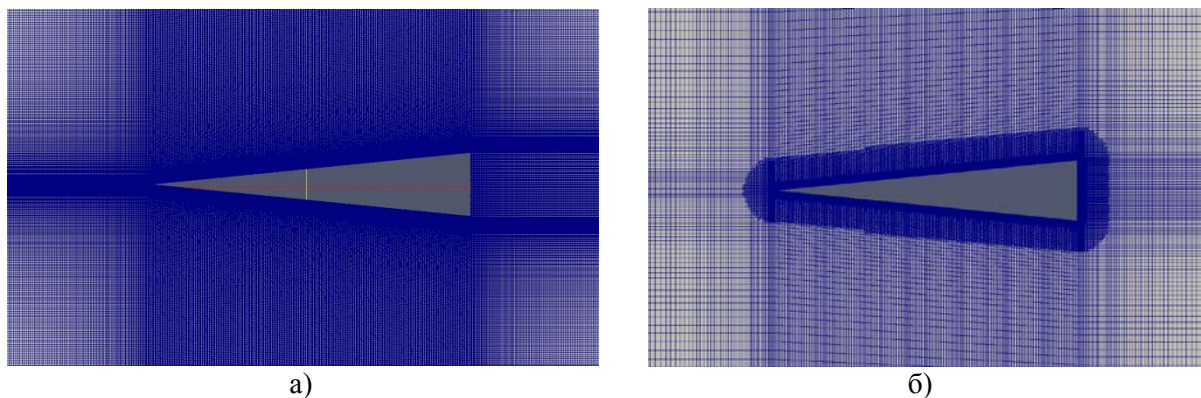


Рис. 1. Расчетная сетка

В полной нелинейной постановке решение строится численно с использованием метода конечных объемов, реализованного в оригинальных решателях открытого пакета OpenFOAM на базе объектно-ориентированного языка программирования C++. Расчеты проводились в параллельном режиме с использованием метода декомпозиции расчетной области. Визуализация результатов расчетов выполнялась с использованием графического интерфейса ParaView и пакета программ для численного анализа и научной графики Origin.

Предложенная методика численного моделирования течения непрерывно стратифицированных жидкостей около непроницаемого клиновидного препятствия показала хорошую работоспособность в диапазоне изменения физических параметров, приближенном к реальным свойствам жидкостей в природных системах. Результаты вычислений выявили области дефицита давления вблизи острой кромки, которые объясняют возникновение пропульсивной силы, приводящей к самодвижению клина вдоль горизонта нейтральной плавучести в устойчиво стратифицированной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Димитриева Н.Ф., Загуменный Я.В., Чашечкин Ю.Д. Расчет и визуализация волновых процессов в неоднородных средах // Сборник трудов акустического симпозиума «КОНСОНАНС-2013». – Киев: ИГМ НАНУ. – С.101-107.
2. Dimitrieva N., Zagumennyi I. Parallel computations of stratified flows using continuum mechanics web-laboratory // Proc. 3^d intern. conf. Conference "High Performance Computing", Kyiv, October 7-11, 2013. Kyiv: NTUU "KPI". – 2013. – P. 107-113.
3. Dimitrieva N. F., Zagumennyi Ia.V. Calculations of admixture transport around a horizontal plate in a continuously stratified fluid // Selected Papers Int. Conf. "Fluxes and Structures in Fluids" (Saint-Petersburg, June 25-28, 2013). Moscow: 2014. P. 61-68.
4. Загуменный Я.В., Чашечкин Ю.Д. Индуцированное диффузией течение на клине // Доклады НАН Украины, 3:31-39, 2013.

РАЗГОН ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. Ф. Зибольд
Донецк

Рассматривается нестационарное осесимметричное трехмерное течение вязкой несжимаемой электропроводной жидкости в цилиндре конечной длины, возникающее под действием соосно вращающегося магнитного поля произвольной поворотной симметрии. Задача описывается системой двух безразмерных уравнений относительно азимутальной скорости v_φ и φ -компоненты векторного потенциала скорости ψ_φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} - L v_\varphi + \frac{\text{Re}_\omega}{h} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_\varphi) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) \right] &= Ha_\delta^2 r^{2p-1} (1 - v_\varphi/r), \\ \frac{\text{Re}_\omega}{h} \left[\frac{\partial (L \psi_\varphi)}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial (r \psi_\varphi)}{\partial r} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L \psi_\varphi}{r} \right) \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z} + 2 \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right] &= \\ = L^2 \psi_\varphi - Ha_\delta^2 r^{2p-2} \left[2 \Delta \psi_\varphi + \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial z^2} + 4(p-1) \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r \psi_\varphi)}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} v_\varphi(0, z, t) < \infty, \quad v_\varphi(r, z, t)|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial v_\varphi(r, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad v_\varphi(r, z, 0) = 0, \\ \psi_\varphi(0, z) < \infty, \quad \psi_\varphi(r, z)|_\Gamma = \frac{\partial \psi_\varphi(r, z)}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $T_0 = 1/\omega$ – масштаб времени, $v_0 = \omega R_0/p$ – масштаб скорости, $Ha_\delta = Ha/\sqrt{2}$ – число Гартмана, образованное по действующему значению индукции, $\text{Re}_\omega = \omega R_0^2/p\nu$ – число Рейнольдса, определенное по относительной скорости движения границы области в магнитном поле, ψ_φ – φ -компонента векторного потенциала скорости $\mathbf{v} = \text{rot } \boldsymbol{\psi}$, $h = Z_0/R_0$, p – число пар полюсов (порядок поворотной симметрии) вращающегося магнитного поля, Γ – внутренняя поверхность сосуда,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad L = \Delta - \frac{1}{r^2}.$$

Анализ второго уравнения системы (1) показывает, что причиной возникновения трехмерного течения является пространственное изменение азимутальной скорости. В связи с этим зависимость азимутальной скорости от времени определяется из первого уравнения системы (1), а эволюция во времени возникающих меридиональных вихревых структур определяется через изменение азимутальной скорости.

Система уравнений (1) с граничными условиями (2) решается методом итераций с использованием метода Галеркина на каждом шаге итерации. На i -м шаге итерации из первого уравнения системы (1) по известному значению ψ_{i-1} определяется значение

азимутальной скорости v_i . Затем уже известные значения ψ_{i-1} и v_i подставляются во второе уравнение системы, из которого находится значение ψ_i . Итерация начинается со значения $\psi_0 = 0$. Используемая вычислительная схема метода имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} - Lv_i + Ha_\delta^2 r^{2p-2} v_i + \frac{Re_\omega}{h} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_{i-1}) \frac{\partial v_i}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_i) \right] &= Ha_\delta^2 r^{2p-1}, \\ L^2 \psi_i - Ha_\delta^2 r^{2p-2} \left[2 \Delta \psi_i + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} + 4(p-1) \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r \psi_i)}{\partial r} \right] - \\ - \frac{Re_\omega}{h} \left[\frac{\partial (L \psi_{i-1})}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial (r \psi_i)}{\partial r} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L \psi_i}{r} \right) \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial z} \right] &= 2 \frac{v_i}{r} \frac{\partial v_i}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Возможны и другие схемы итераций, однако прямой численный эксперимент показал, что использованная выше схема итерации обладает наилучшей сходимостью по параметрам. Используя процедуру метода Фурье, значения v_φ и ψ_φ определяем разложением в ряды, удовлетворяющим краевым условиям (2):

$$v_\varphi(r, z) = \sum_{m,n} C_{mn} J_1(\beta_m r) \cos \gamma_n z e^{-(\beta_m^2 + \gamma_n^2)t}, \quad (4)$$

$$\psi_\varphi(r, z) = \sum_{m,n} D_{mn} \left[J_1(\lambda_m r) + A_m I_1(\lambda_m r) \right] \cdot (\sin \alpha_n z + B_n sh \alpha_n z), \quad (5)$$

где β_m – корни уравнения $J_1(\beta_m) = 0$, γ_n – корни уравнения $\cos \gamma_n = 0$, т.е. $\gamma_n = (n-1/2)\pi$, λ_m – корни уравнения $J_1(\lambda_m) I_1'(\lambda_m) - J_1'(\lambda_m) I_1(\lambda_m) = 0$, α_n – корни уравнения $\sin \alpha_n ch \alpha_n - \cos \alpha_n sh \alpha_n = 0$, $A_m = -J_1(\lambda_m)/I_1(\lambda_m)$, $B_n = -\sin \alpha_n / sh \alpha_n$.

Численный эксперимент позволил изучить возникающие при этом пространственные структуры течения и проследить их эволюцию во времени. Решение получено как для малых, так и для больших чисел Гартмана при которых итерационный процесс еще сходится. В асимптотике по времени гидродинамические структуры по виду приближаются к гидродинамическим структурам, полученным при решении стационарной задачи [1-3].

Выполненное исследование способствует лучшему пониманию гидродинамических процессов, происходящих в цилиндрическом сосуде под действием вращающегося магнитного поля, действующего ограниченное время (например, при обработке металла в установках непрерывного действия).

1. Zibold A. F. Evolution of the hydrodynamical structure arising in the cylinder of the limited length under action of the rotating magnetic field // Proc. of the 7th International PAMIR Conference on Fundamental and Applied MHD. Vol. 1. – Presqu'île de Giens, France, 2008. – P. 467-472.

2. Зибольд А. Ф. Гидродинамические структуры, порождаемые вращающимся магнитным полем в цилиндре конечной длины // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – Т. 13 (85), № 2. – С. 17-27.

3. Zibold A. F. Hydrodynamic structures generated by the rotating magnetic field in the cylindrical vessel // Fluid Dynamics Research. – 2014. (в печати).

ОЦІНЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ТЕХНОЛОГІЇ РОЗПАРЕЛЕЛЮВАННЯ ОБЧИСЛЕНЬ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ТУРБУЛЕНТНОГО ПРОСТОРОВОГО ОБТІКАННЯ КРИЛА СКІНЧЕНОГО РОЗМАХУ

В.В. Зілінка, Є.О. Шквар (НАУ, Київ)

Сучасні вимоги до проектування та оптимізації сучасної авіаційної техніки потребують розробки нових методологічних рішень та впровадження новітніх технологій аеродинамічного проектування, основу яких складають методи математичного моделювання. Однією із задач, актуальних як з наукової точки зору, так і в практичному сенсі є моделювання характеристик відривних течій, які формуються при обтіканні крила скінченого розмаху на закритичних кутах атаки. Оскільки методи прямого чисельного обрахунку даного типу задач потребують значних витрат комп'ютерних ресурсів, постає питання верифікації та обґрунтованого вибору математичних моделей для опису процесів турбулентного відривного обтікання. Просторовість обтікання та складна динаміка процесів турбулентного вихроутворення обумовлюють складність даної задачі та її вимогливість до обчислювальних потужностей, тому використання технології паралельних обчислень є вкрай нагальним шляхом підвищення ефективності обчислень, що обумовлює й актуальність проблеми ефективного застосування методів розпаралелювання.

Метою даної роботи є дослідження динаміки зменшення часу обрахунку обтікання крила скінченого розмаху по мірі збільшення кількості доступних обчислювальних ядер на високопродуктивному комп'ютері кластерної архітектури та визначення впливу розміру скінченно-об'ємної сітки, якою покрито розрахункову область відсіку крила, на коефіцієнти опору C_{xa} та підйімальної сили C_{ya} . У ролі вхідних даних для сформульованої задачі обрано геометрію однієї консолі крила скінченого розмаху із видовженням 5 та хордою 300мм., яка утворена на базі профілю P-2-14 із закінцівкою типу ЦАГІ (рис. 1).

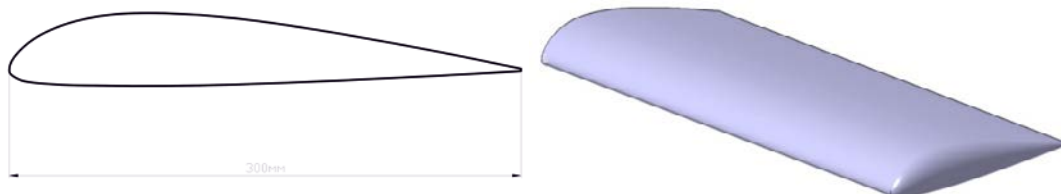


Рис. 1 – Профіль P-2-14 та консоль крила на базі цього профілю

Розрахункова область описана півсферою діаметром 10м. Вищевказану модель описано 4-ма варіантами скінченно-об'ємної структурованої гексагональної сітки, які відрізняються кількістю комірок, а саме: 0.74, 1.7, 3.3 та 13.6 млн. Середнє значення параметра y^+ – відстані від обтічної поверхні, збезрозміреної за масштабом довжини закону стінки, по поверхні консолі крила приймалося рівним 1 для всіх чотирьох варіантів скінченно-об'ємних сіток. Спочатку була створена сітка за кількістю 3.3млн. комірок, а потім на її основі шляхом інтерполяції було побудовано всі інші варіанти сіток. Межові умови задавалися наступним чином: на поверхні, яка лежить в площині, що розділяє крило на ліву й праву консолі, задавалася умова симетрії; на межах області розрахунку – умова дії постійного тиску $P=101325$ Па та вхідного рівномірного незбуреного потоку газу зі швидкістю $V_x=40$ м/с зі ступенем турбулентності 1%; на обтічній поверхні консолі крила – умови непроникності та відсутності ковзання. Задача розв'язувалась у програмному модулі Fluent розрахункового комплексу ANSYS. Обчислення проводилися із використанням SST моделі турбулентної в'язкості. Коефіцієнти опору та підйімальної сили обчислювалися для ряду значень кута атаки з кроком в два градуси. Кількість потрібних для отримання розв'язку ітерацій на малих (докритичних) кутах атаки складала близько 800, а зі збільшенням кута атаки ця кількість неухильно зростала, досягнувши 1800 ітерацій для кута атаки 20 градусів. Ітерації тривали до досягнення нев'язками усіх розрахункових

параметрів наперед заданої граничної величини 10^{-4} . Результати розрахунків для чотирьох варіантів скінченно-об'ємних сіток показані на рис.2-а. Дослідження ефективності розпаралелювання здійснювалися шляхом проведення розрахунків зі змінною кількістю застосованих ядер: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 та 84. Після запуску кожного із варіантів розрахункової сітки для різної кількості ядер фіксувався час обрахунку перших 50-ти ітерацій для великої кількості ядер (8, 16, 32, 64 та 84) та перших 10-ти ітерацій для малої кількості ядер (1, 2 та 4). Після чого обчислювався час виконання однієї ітерації та оцінювалося прискорення як частка часу, необхідного для виконання однієї ітерації заданою кількістю ядер до часу її ж виконання лише одним ядром. Отримані залежності для 4-ох різних за кількістю комірок скінченно-об'ємних сіток представлені на рис.2-б.

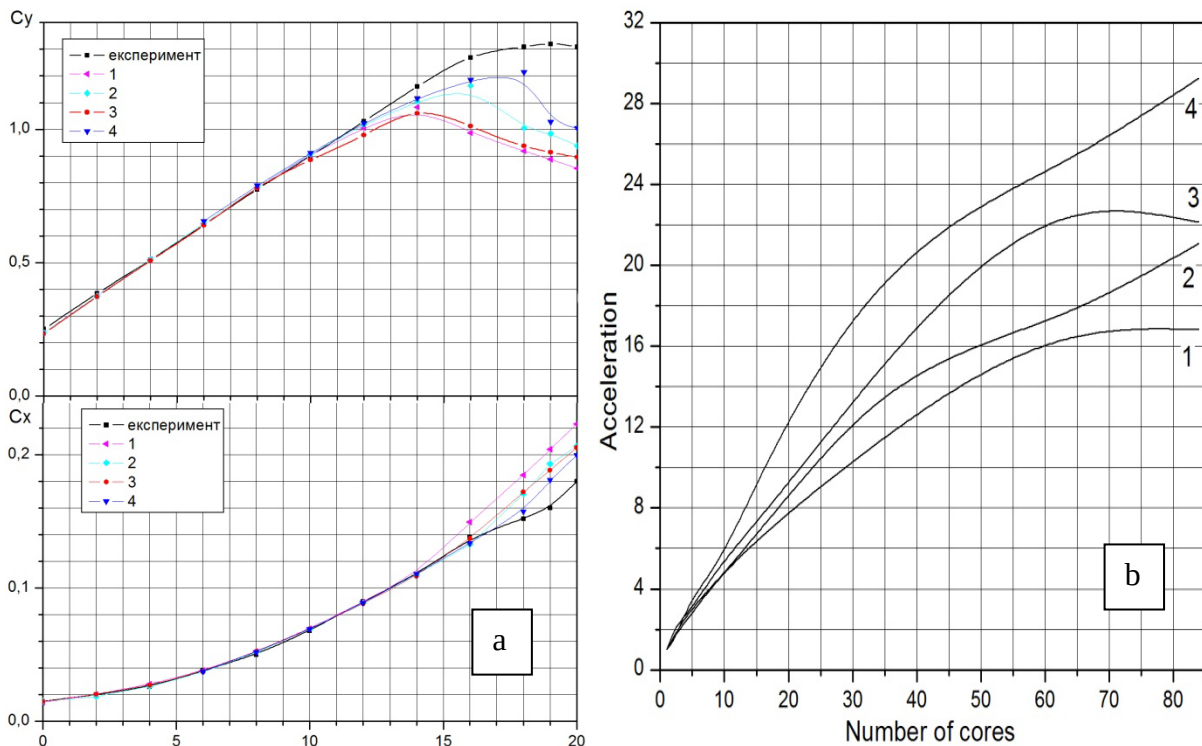


Рис. 2. Результати розрахунків аеродинамічних коефіцієнтів $C_{y\alpha}$, $C_{x\alpha}$ та прискорення обчислень у залежності від кількості комірок сітки та числа задіяних процесорних ядер.

Точки – дані експериментів, лінії – результати розрахунків на сітках:

1 – 0.74 млн., 2 – 1.7 млн., 3 – 3.3 млн., 4 – 13.6 млн.

Отримані результати розрахунків свідчать про неухильне покращення узгодження розрахункових результатів та відповідних експериментальних даних по мірі збільшення роздільної здатності сітки на завідривних кутах атаки. Результати паралельних обчислень демонструють наявність близької до лінійної залежності прискорення обчислень задачі моделювання обтікання консолі крила при описаному вище способі формалізації від кількості задіяних процесорних ядер при їхньому збільшенні до 30-50. Кутовий коефіцієнт цієї залежності збільшується по мірі зростання розміру сітки, тобто більш вимоглива до обчислювальних ресурсів задача забезпечує й кращі можливості до розпаралелювання. У цілому отримані дані свідчать про можливість прискорення обчислень даної актуальної промислової задачі при використанні до 84 процесорних ядер у 17 – 29 разів залежно від застосованої сітки.

П.В. Лукьянов
ИГМ НАНУ

В докладе приводятся результаты моделирования, полученные на основе конечно-разностного подхода решения уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, учитывающем неоднородность морской воды.

Используемые схемы имеют второй порядок точности по времени и по пространственным переменным. Инерционные, конвективные и вязкие слагаемые аппроксимируются стандартными подходами. Непосредственное решение конечно-разностных уравнений производится по методу дробных шагов [1].

Математическая модель нестационарного процесса содержит, кроме уравнений и граничных условий, начальные условия. От наиболее точного задания начальных распределений полей течения зависит скорость выхода на численное решение задачи.

Для мезомасштабной динамики (горизонтальный размер $O(1)$ км -- $O(10)$ км) в прибрежной мелководной (вертикальный масштаб $O(10)$ м -- $O(100)$ м) области важную роль играет ветровое воздействие на морскую поверхность. Поэтому правильное моделирование приповерхностного дрейфового течения – особо важно.

Далее приводятся результаты численного решения двух задач.

1. *Моделирование взаимодействия компактного вихря с нестационарным однородным дрейфовым течением.*
2. *Взаимодействие субмезомасштабных морских и атмосферных вихрей.*

Первая задача соответствует крупномасштабному атмосферному вихрю, который аппроксимируется однородным ветровым воздействием. Что касается этой задачи, то среди прочих результатов следует особо отметить то, что при формировании дрейфового течения максимум дрейфовой скорости находится не на поверхности [2], а внутри -- на относительно небольшой глубине (порядка 0,1 в безразмерных величинах, см. рис. 1) [3].

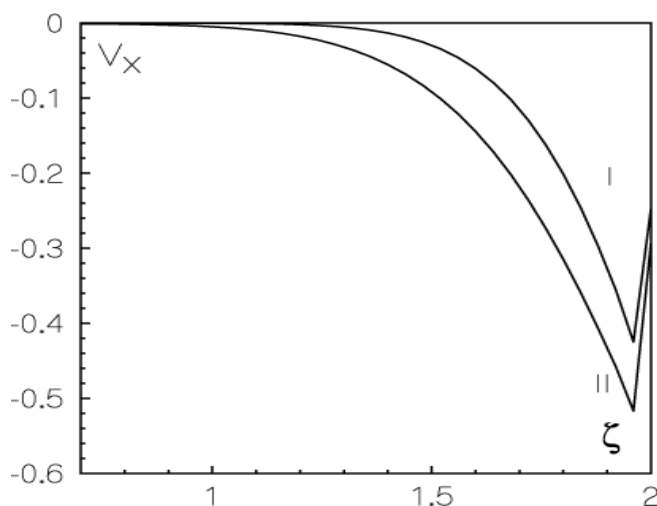


Рис. 1. Вертикальное распределение горизонтальных компонент скорости в моменты безразмерного времени $t = 0.5$ (кривая I) и $t = 1$ (кривая II)

В целом, вертикальный обмен в основном происходит над склоном, где формируется область вторичной завихренности, сопоставимая по мощности с исходным вихрем.

Вторая задача уже учитывает неоднородность ветрового воздействия. Субмезомасштабные атмосферные вихри, как правило, формируются в районе горных перевалов, затее движутся в сторону моря и взаимодействуют с водной поверхностью. В качестве примера были взяты данные типичные для Северо-восточного (Кавказского) побережья Черного моря. На

задаваемый в начальный момент времени мезомасштабный водный вихрь начинает, со временем, действовать проходящий субмехомасштабный атмосферный циклон или антициклон.

Основным выводом ко второй задаче есть то, что при наблюдаемых типичных скоростях ветра в атмосферном циклоне (5 м/с) и скоростях жидкости в водном вихре (порядка 20 см/с) взаимодействие носит (условно) слабый характер: верхняя часть вихря незначительно перемещается за счет генерируемого ветром дрейфового течения.

Сказанное наглядно демонстрирует рис. 2. Однако при этом проникновение влияния ветра может достигать глубины 50м.

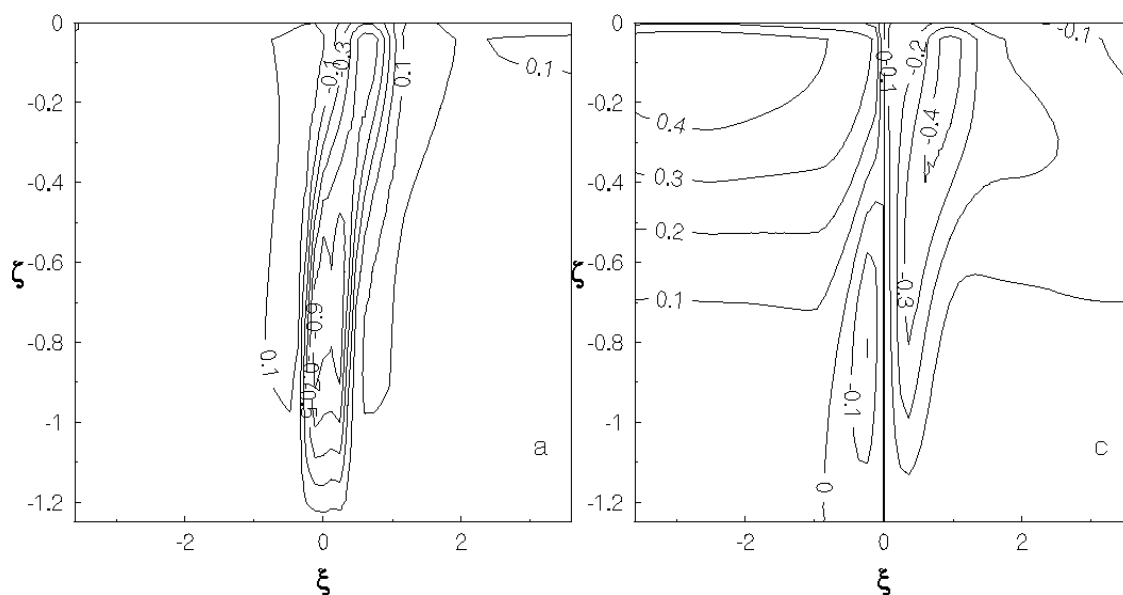


Рис. 2. Вертикальное распределение завихренности а и азимутальной скорости б в момент безразмерного времени $t=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск. Наука. – Сибирское отделение. 1967. – 197 с.
2. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. Т.1 -- М.: - Мир- 1984, 400 с.
3. Лукьянов П.В. Моделирование взаимодействия компактного вихря с нестационарным дрейфовым течением. // Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика. №194, 2011. – с. 32—43.
4. Лукьянов П.В. Динамика компактного вихря шельфовой зоны под воздействием неоднородного нестационарного ветра в районе северо-восточного побережья Чорного моря.// Екологічний вестник наукових центрів Чорноморського економічного содружества. Т. 1 №4, 2013. – с. 90—97.

MULTILEVEL MATHEMATICAL MODELS OF SHEAR FLOWS TURBULENCE

V.T. Movchan, Ye.O. Shkvar (NAU, Kyiv)

The following basic universal model form of turbulent viscosity coefficient ν_t , proposed by V. Movchan [1]:

$$\nu_t = \nu_{tout} \tanh \frac{\nu_{tin}}{\nu_{tout}}, \quad (1)$$

and different possibilities of description of ν_{tout} , ν_{tin} (values of ν_t in external and internal regions respectively) are the subjects of this research. According to traditional classification, the model of turbulence has algebraic or differential type depending on the applied methods of mathematical description of governing turbulence parameters. Structure of (1) allows to construct algebraic, differential and hybrid turbulence model by means of different forms of ν_{tout} and ν_{tin} presentation. The simplest **basic algebraic form** of ν_t can be effectively constructed as the following slightly modified form of (1):

$$\nu_t = \gamma \nu_{tout} \tanh \frac{\nu_{tin}}{\nu_{tout}},$$

where γ – intermittency factor. Internal region has the following structure of its mathematical description: $\nu_{tin} = l D_m$, $l = \kappa y \sqrt{\tau^+} \nu_*$,

$$D_m = \tanh \frac{\sinh^2 [\kappa_0 y^+ (1 + \kappa_3 |y^+ - 30|) \sqrt{\tau^+}] \tanh [\sinh^2 (\kappa_2 y^+ \sqrt{\tau^+})]}{\kappa y^+ \sqrt{\tau^+}}.$$

Linearization of the argument of the function $\sinh^2 [\kappa_0 y^+ (1 + \kappa_3 |y^+ - 30|) \sqrt{\tau^+}]$ transforms the damping factor D_m to the following simplified form:

$$D_m = \tanh \frac{\sinh^2 (\kappa_1 y^+ \sqrt{\tau^+}) \tanh [\sinh^2 (\kappa_2 y^+ \sqrt{\tau^+})]}{\kappa y^+ \sqrt{\tau^+}}$$

that allows to obtain the approximate-analytical solutions for velocity profile within viscous and buffer sublayers of boundary layer.

External region can in frames of algebraic level of modeling be presented by the formula $\nu_{tout} = \chi U_H \delta^*$, $\chi = 0.0168$.

Here and above $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa, \chi$ – model coefficients; $y^+ = y \nu_* / \nu$ – normal to wall coordinate y , dimensionless according to the wall law; ν – kinematic viscosity coefficient; $\nu_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ – shear velocity; $\tau^+ = \tau / \tau_w$ – dimensionless shear stress by its value on a wall τ_w ,

that depends on pressure gradient parameter $p^+ = \frac{\nu}{\rho \nu_*^3} \frac{dp}{dx}$ as follows: $\tau^+ = 1 + p^+ y^+$ for $p^+ \geq 0$

and $\tau^+ = (1 - p^+ y^+)^{-1}$ for $p^+ < 0$; p – averaged pressure; ρ – density; U_H – velocity on the external free boundary of a wall shear flow; δ^* – displacement thickness, using as a linear scale in external region of boundary layer.

Modeling of near-wall effects of control. In case of necessity to account the influences of micro-riffling and/or polymeric additives we apply the fact that these effects, despite on their different physical mechanism, have similar effect of velocity profile shifting in semilogarithmic coordinates. Effective results have been found by Ye. Shkvar on the base of implementation and generalization of I. Rotta approach for roughness accounting. This approach requires modifying the normal coordinate y^+ into y_1^+ in the following way: $y_1^+ = 0$ for $s \leq 0$ and $y_1^+ = s$ for $s > 0$, where

$s = y^+ + \Delta y_{rough}^+ - \Delta y_{pol}^+$; Δy_{rough}^+ – generalized parameter, accounting both irregular and regular roughness influence; Δy_{pol}^+ – additional parameter that similarly to previous one describes the influence of polymeric additives injecting in near-wall region of a water boundary layer.

Modified algebraic model of turbulent viscosity. This modification effectively combines the described above set of dependencies for internal region ν_{tin} together with well-known and popular in turbomachinery Baldwin-Lomax approach for external region ν_{tout} , namely:

$$\begin{aligned} \nu_{tout} &= \chi C_{cp} F_{wake}; C_{cp} = 1.6; F_{wake} = \min(y_{max} F_{max}; C_{wk} y_{max} \Delta U^2 / F_{max}); \\ C_{wk} &= 0.25; \Delta U = |U_{max}| - |U_{min}|; \gamma = F_{Kleb} = \left[1 + 5.5(C_{Kleb} y / y_{max})^6\right]^1; C_{Kleb} = 0.3; \\ F(y) &= y \left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right| D_m; F_{max} = \max[F(y)]; y_{max} = y(F_{max}). \end{aligned}$$

Hybrid algebraic – one-parametric differential model of turbulence. This is the next step of turbulence models elaboration, joining both algebraic and differential approaches for internal and external regions respectively. The turbulent viscosity coefficient is presented as a function of kinetic energy of turbulence k : $\nu_{tout} = \chi_k \Delta \sqrt{k}$, where $\Delta = U_H \delta^* / \nu_*$. This approach requires solving the corresponding transport partial differential equation for determination of k , that makes it more universal and exact for wider range of modeled types of boundary layers.

Hybrid algebraic – two-parametric differential model of turbulence. Here we demonstrate one more modification of basic turbulent viscosity mathematical description (1) for external region – two-parametric $k - \varepsilon$ approach: $\nu_{tout} = C_\mu k^2 / \varepsilon$, $C_\mu = 0.09$, where ε – dissipation rate of k . Simplification and adopting of the constructed model for internal region allows to determine the profiles $k(y)$, $\varepsilon(y)$ and Reynolds stresses $\tau(y)$. For viscous and buffer sublayers these distributions in dimensionless form have the following structures:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= k / (v_*^2 \tau^+) = \tanh(\kappa_1 y^+ \sqrt{\tau^+}) \sqrt{\tanh[\sinh^2(\kappa_2 y^+ \sqrt{\tau^+})]} / C_0; \\ C_0 &= 0.16 [1 + \tanh(0.13 y^+ \sqrt{\tau^+})]; k^+ = y \sqrt{k} / \nu; \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{\varepsilon \nu}{v_*^4 \tau^{+2}} = \frac{\tanh^2(\kappa_{11} \sqrt{k^+})}{\cosh^2(\kappa_{11} \sqrt{k^+})} \tanh[\sinh^2(\kappa_{22} \sqrt{k^+})] + D_\varepsilon; \\ D_\varepsilon &= 0.0316 \bar{k} D_0 / k^+; D_0 = 1 - \tanh[0.5 \sqrt{k^+} (\sqrt{k^+} - 4.3)]; \\ \bar{\tau} &= -\overline{u'v'} / (v_*^2 \tau^+) = \tanh^2(\kappa_{11} \sqrt{k^+}) \tanh[\sinh^2(\kappa_{21} \sqrt{k^+})]. \end{aligned}$$

In logarithmic zone the corresponding dependencies have simpler structures:

$$\bar{k} \cong 1/C_0; \bar{\varepsilon} = 1/(\kappa_{01} k^+); \bar{\tau} \cong 1,$$

where κ_{01} , κ_{11} , κ_{21} , κ_{22} – model coefficients.

The proposed multilevel family of approaches for semiempirical turbulence modeling demonstrated the correctness of the applied hypotheses and flexibility for wide range of wall shear flows types.

References

1. Mathematical models of near-wall turbulence / M.S. Kulik, V.T. Movchan, Ye.O. Shkvar // – Kyiv: NAU, 2012. – 356 p.

АВТОМАТИЗОВАНА СИСТЕМА ОБРОБКИ І АНАЛІЗУ АНІЗОТРОПІЇ АКУСТИЧНИХ ШВИДКОСТЕЙ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ ТА ВПЛИВ УЛЬТРАЗВУКУ, ОПРОМІНЕННЯ, ЗМІНИ ДЕФЕКТНОЇ НАНОСТРУКТУРИ НА РЕЛАКСАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ

А.П. ОНАНКО, В.О. АНДРУЩЕНКО, Г.Т. ПРОДАЙВОДА, Ю.А. ОНАНКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
onanko@univ.kiev.ua

ВСТУП

Обробка даних ультразвукових (УЗ) вимірювань анізотропії акустичних швидкостей та поляризаційних характеристик пружних хвиль вимагає великих об'ємів чисельних розрахунків [1,2].

АЛГОРИТМ ОБРОБКИ ДАНИХ АНІЗОТРОПІЇ АКУСТИЧНИХ ШВИДКОСТЕЙ

База даних результатів обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей містить: вичерпну інформацію про всі зразки, що присутні у базі даних, включаючи інформацію про екстремуми (мінімуми та максимуми) стереопроєкцій ізоліній фазових швидкостей квазіповздовжньої хвилі $V_{\parallel}$, різниці між “швидкою” і “повільною” квазіпоперечними хвилями $\Delta V_{\perp} = V_{\perp 1} - V_{\perp 2}$; диференціального коефіцієнта пружної анізотропії A_d , кута відхилення вектора пружних зміщень $\vec{U}$ від напрямку хвильової нормалі $(\vec{U}, \vec{n})$ і діаграм розподілу векторів поляризації $\vec{P}$ квазіповздовжньої $V_{\parallel}$, “швидкої” $V_{\perp 1}$ і “повільної” $V_{\perp 2}$ квазіпоперечних хвиль, а також назви папок, до яких зберігаються звіти з результатами обробки даних УЗ вимірювань анізотропії акустичних швидкостей. Команда “Етап №2” автоматизованої системи (АС) “KERN-DP” запускає послідовне виконання першого та другого етапів розрахунків та обробки даних. Після завершення другого етапу лунає відповідний звуковий сигнал та відкривається вкладка “Етап №2”, що містить результати другого етапу обробки даних УЗ вимірювань анізотропії акустичних швидкостей V . Ілюстрація вікна завершеного другого етапу обробки даних ультразвукових вимірювань анізотропії акустичних швидкостей V зображена на рис. 1.

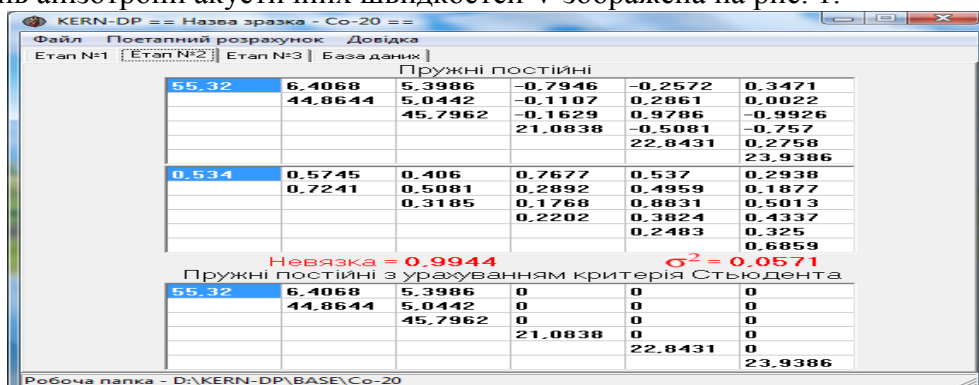


Рис. 1. Ілюстрація вікна завершеного другого етапу обробки даних ультразвукових вимірювань анізотропії швидкостей V .

МЕТОДИКИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Луна-імпульсної методикою установкою УЗВШ-КНУ на частотах $f_1 \approx 1,67$ МГц і $f_2 \approx 5$ МГц та комп'ютеризованої установкою Керн-4 на частотах $f_{\parallel} \approx 1,11$ МГц і $f_{\perp} \approx 0,43$ МГц похибка вимірювання рівнялась $\frac{\Delta V}{V} = 0,5 \div 1,5\%$ в залежності від довжини зразка l_0 [3].

На рис. 2 зображена осцилограми імпульсів повздовжньої поляризації $V_{\parallel}$ поляризації в п'єзокераміці ЦТС-19 ($\text{PbTiO}_3\text{-PbZrO}_3$) – титанаті–цирконаті свинцю.

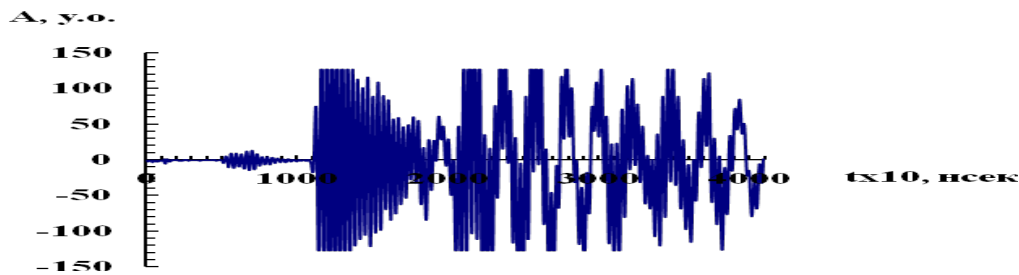


Рис. 2. Осцилограма імпульсів повздожньої поляризації $V_{||}$ в п'єзокераміці ЦТС-19 (PbTiO_3 - PbZrO_3) – титанаті–цирконаті свинцю.

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

Температура Дебая θ_D визначалась за формулою[1]:

$$\theta_D = \frac{h}{k_B} \cdot \left(\frac{9N_A \rho}{4\pi A} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{1}{V_{||}^3} + \frac{2}{V_{\perp}^3} \right)^{1/3}, \quad (1)$$

де $k_B = 1,38066 \cdot 10^{-23} \frac{\text{дж}}{\text{К}}$ стала Больцмана, $h = 6,62617 \cdot 10^{-34} \text{дж} \cdot \text{сек}$ стала Планка, $N_A = 6,02209 \cdot 10^{23} \text{моль}^{-1}$ число Авогадро, A – середня молярна маса, ρ – густина, $V_{||}$ – повздожня УЗ швидкість, $V_{\perp}$ – поперечна УЗ швидкість, μ – коефіцієнт Пуассону. Барична залежність модуля пружності $E_{001} = \rho \left(V_{||[001]} \right)^2 \text{SiO}_2$ до та після насичення $\rho_{\text{NaCl}} = 180 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

представлена на рис. 3.

$E_{001}, \text{ГПа}$

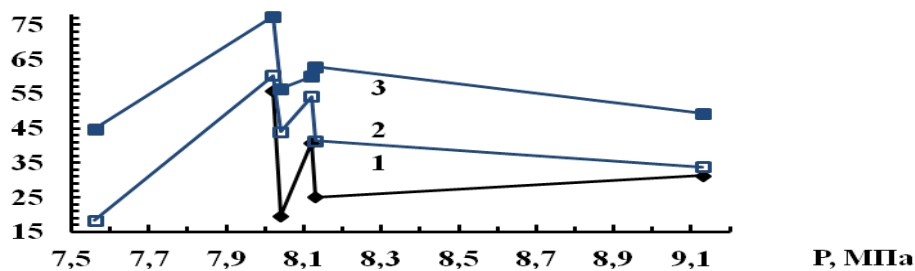


Рис. 3. Барична залежність модуля пружності $E_{001} \text{SiO}_2$: 1 – УЗВШ-КНУ, 2 – Керн-4, 3 – Керн-4 після насичення.

ВИСНОВКИ

1. Розроблено автоматизована система “KERN-DP” - програма і алгоритм, які дозволяють у автоматизованому режимі проводити аналіз параметрів анізотропії пружних хвиль.

2. Квазіповздожні хвилі розповсюджуються із знесенням енергії з кутом знесення енергії $\varphi_{\vec{E}} = (\vec{V}^{(e)}, \vec{n})$ векторів променевих $\vec{V}^{(e)}$ швидкостей пружних хвиль від напрямку хвильової нормалі $\vec{n}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мезон У.П. Физическая акустика. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Т. 1. Часть А. – М.: Мир, 1966. – 592 с.
2. Вовк І.В., Грінченко В.Т. Звук, рожденный потоком. – Київ: Наукова думка, 2010. – 221 с.
3. Onanko A.P., Lyashenko O.V., Lyashenko I.O., Onanko Y.A. Acoustic attenuation in silicon and silicon oxide // J. Acoust. Soc. Am. – 2008. - V. 123, № 5, Pt. 2. - P. 3701.

ВПЛИВ УЛЬТРАЗВУКУ ТА АВТОМАТИЗОВАНА СИСТЕМА АНАЛІЗУ АКУСТИЧНОЇ АНІЗОТРОПІЇ

А.П. ОНАНКО, В.О. АНДРУЩЕНКО, Г.Т. ПРОДАЙВОДА, Ю.А. ОНАНКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
onanko@univ.kiev.ua

АЛГОРИТМ ОБРОБКИ ДАНИХ АКУСТИЧНИХ ШВИДКОСТЕЙ

Розповсюдження ультразвукових (УЗ) пружних хвиль супроводжується розсіюванням і поглинанням [1,2]. Ілюстрація вікна завершеного третього етапу обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей V зображена на рис. 1.

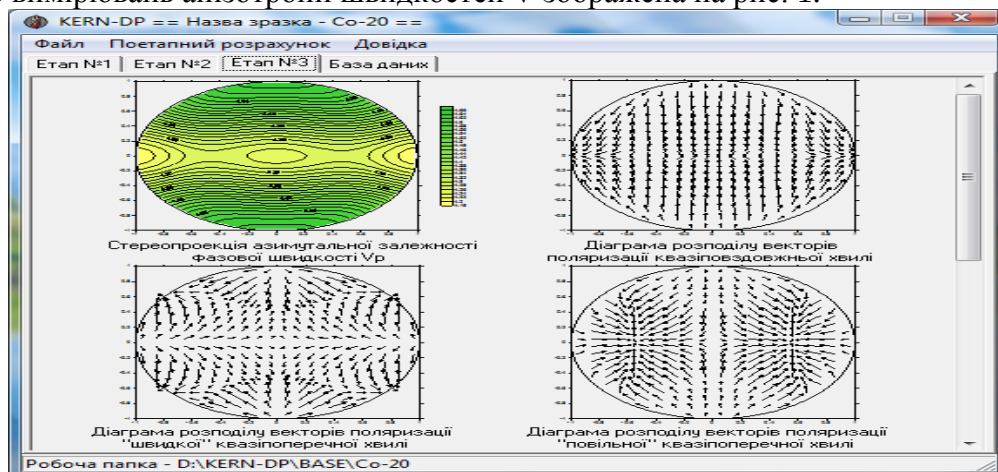


Рис. 1. Ілюстрація верхньої частини вікна завершеного третього етапу обробки даних ультразвукових вимірювань анізотропії швидкостей V .

МЕТОДИКИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Луна-імпульсної методикою установками УЗВШ-КНУ на частотах $f_1 \approx 1,67$ МГц і $f_2 \approx 5$ МГц та комп'ютеризованої Керн-4 на частотах $f_{||} \approx 1,11$ МГц і $f_{\perp} \approx 0,43$ МГц похибка вимірювання рівнялась $\frac{\Delta V}{V} = 0,5 \div 1,5\%$ [3,4]. На рис. 2 зображена осцилограма імпульсів поперечної поляризації $V_{\perp 2}$ в п'єзокераміці ЦТС-19 ($\text{PbTiO}_3\text{-PbZrO}_3$) – титанаті–цирконаті свинцю.

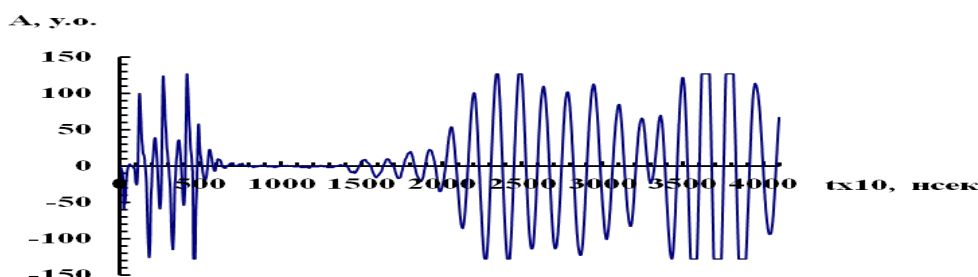


Рис. 2. Осцилограма імпульсів поперечної поляризації $V_{\perp 2}$ в п'єзокераміці ЦТС-19 ($\text{PbTiO}_3\text{-PbZrO}_3$) – титанаті–цирконаті свинцю.

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

Коефіцієнт Пуассону μ визначался [1]:

$$\mu = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{||}} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{V_{||}}{V_{\perp}} \right)^2} \right]. \quad (1)$$

Барична залежність модуля пружності пружної постійної $C_{44} = \rho(v_{\perp 1[001]})^2$ SiO₂ представлена на рис. 3.

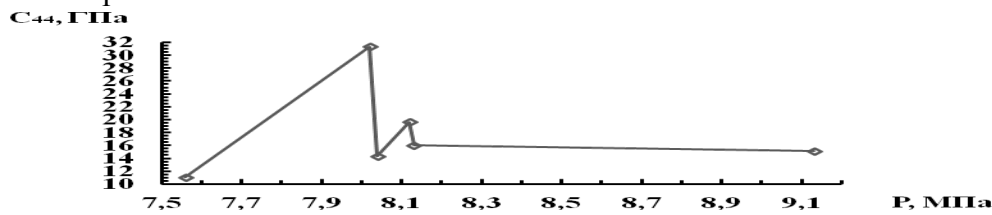


Рис. 3. Барична залежність пружної постійної C_{44} SiO₂.

Таблиця 1.

Коефіцієнт Пуассону μ матеріалів.

Матеріал	$V_{\parallel}$, м/сек	$V_{\perp}$, м/сек	μ
Ti(BT1-0)	6210	3201	0,3191
Д16	6290	3024	0,3497
Al	6260	3080	0,3403
Fe ₄₅	5899	3275	0,2772
Fe	6070	3230	0,3025
Cu	4730	2298	0,3455
Pb	2160	700	0,4413
teflon-4	1360	617	0,3704
teflon-3М	1824	893	0,3424
п'єзокераміка ЦТС-19	4127	1745	0,3911
кварц SiO ₂	5600	3500	0,1795
SiO _{2[100]} (Cy-19)	5122	2740	0,2996

ВИСНОВКИ

1. Кут поляризації - відхилення вектора пружних зміщень $\vec{U}$ від напрямку хвильової нормалі $\vec{n}$ $\varphi_{\vec{p}} = (\vec{U}, \vec{n})$ і інтегральний коефіцієнт пружної анізотропії $\bar{A}_{\mu}$ є найбільш загальними характеристиками анізотропії і свідчать про неоднорідну деформацію.

2. Вектори пружних зміщень $\vec{U}$ і променевих $\vec{V}^{(e)}$ швидкостей пружних хвиль відхиляються від напрямку хвильової нормалі $\vec{n}$ на значні кути $\varphi_{\vec{E}} = (\vec{V}^{(e)}, \vec{n})$ та $\varphi_{\vec{p}} = (\vec{U}, \vec{n})$. $\varphi_{\vec{E}} = (\vec{V}^{(e)}, \vec{n}) > \varphi_{\vec{p}} = (\vec{U}, \vec{n})$ - кута поляризації - відхиленні векторів пружних зміщень $\vec{U}$ від напрямку хвильової нормалі $\vec{n}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. – М.: Сов. энцикл., 1979. – 400 с.
2. Грінченко В.Т., Вовк І.В., Маципура В.Т. Основи акустики. – Київ: Наукова думка, 2007. – 640 с.
3. Вижва С.А., Продайвода Г.Т., Онанко Ю.А. Сейсмоакустична діагностика процесів руйнування в геологічному середовищі // Геоінформатика. – 2011. - № 1. - С. 42-47.
4. Lyashenko O. V., Onanko A. P., Veleschuk V. P. et al. Structural defects relaxation during complex thermal and dynamical mechanic processing of CdTe // Photoelectronics. – 2008. - № 17. – С. 10-13.

**Управление автоколебаниями скачков уплотнения
на симметричном аэродинамическом профиле
при трансзвуковом обтекании при малых углах атаки**

А.А. Приходько, О.Б. Полевой, И.И. Липатов
*Днепропетровский национальный университет,
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины,
ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Россия*

Трансзвуковой диапазон скоростей является базовым при полетах пассажирских самолетов. Симметричные аэродинамические профили, аналогичные NACA 0012, составляют основу при конструировании вертикальных органов управления, которые находятся под нулевым углом атаки в круизном режиме полета. Возникновение автоколебаний скачков уплотнения может привести к бафтингу элементов хвостового оперения, что, в свою очередь, ведет к разрушению органов управления, либо, как минимум, к потере управляемости самолетом.

Численное моделирование автоколебаний скачков уплотнения на профиле NACA 0012 выполнено на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, замкнутых дифференциальной моделью турбулентности [1].

Управление нестационарным трансзвуковым отрывом рассматривается для двух режимов автоколебаний – для односкачкового режима A1, подробно исследованного в работе [1], и для двухскачкового режима A2, представленного в работе [2].

Физической особенностью режима A1 является образование развитой отрывной зоны, которая простирается до задней кромки. «Затенение» следа за профилем приводит к росту давления в следе и смещению скачка уплотнения вместе с точкой отрыва вниз по потоку. Отрывная зона распадается на две – отрыв, вызванный скачком уплотнения и отрыв вблизи задней кромки. В крайнем правом положении скачка уплотнения остается только одна отрывная зона от ударной волны, а течение вблизи задней кромки безотрывное. Пульсации давления происходят в следе вниз и вверх по потоку.

Нижней границей режима A1 по числу Маха M_∞ при фиксированном угле атаки является стационарный односкачковый режим с отрывной зоной, полностью лежащей на профиле. Верхней границей является стационарный односкачковый режим с интенсивной ударной волной (лямбда-ножка) способной «противостоять» повышению давления в следе, вызванного «затенением».

Режим A2 автоколебаний скачков уплотнения также является промежуточным между двумя стационарными режимами. Нижней границей по числу Маха M_∞ является стационарный двухскачковый режим с криволинейными скачками уплотнения, расположенных симметрично над верхней и нижней поверхностью профиля. Точки отрыва и присоединения располагаются на обтекаемой поверхности.

Возникновение автоколебаний скачков уплотнения в режиме A2 с ростом числа Маха M_∞ соответствует сходу точек присоединения с поверхности профиля и образованием единой отрывной зоны. Здесь возникает неустойчивость объединенной отрывной зоны, напоминающая дорожку Кармана за цилиндром. Пульсации давления за профилем происходят в вертикальном направлении, поперек следа.

Верхней границей по числу Маха M_∞ является стационарный режим со скачками уплотнения, имеющими косой скачок вблизи профиля. Веер волн разрежения за участком косого скачка «зажимает» объединенную отрывную зону, не давая развиваться автоколебаниям.

Режим A2 автоколебаний скачков уплотнения находится в узком диапазоне чисел Маха невозмущенного потока $\Delta M_\infty \approx 0.02$, но сопровождается значительной амплитудой колебаний коэффициента подъемной силы $|\Delta C_L|_{\max} \approx 0.16$.

На основе результатов параметрического численного моделирования получена уточненная по отношению к работе [1] «план - карта» режимов обтекания профиля NASA 0012 в диапазоне $0.7 \leq M_\infty \leq 0.9$ и $0^\circ \leq \alpha \leq 5^\circ$. Следует отметить, что зоны режимов автоколебаний A1 и A2 не сопрягаются между собой. Имеются «полосы разделения» по числу Маха от $M_\infty = 0.8$ до $M_\infty = 0.844$; и по углу атаки от $\alpha = 1.9^\circ$ до $\alpha = 2.5^\circ$. Разделение зон автоколебаний A1 и A2 обусловлено различными физическими особенностями, приводящим к возникновению и исчезновению этих режимов.

Управление автоколебаниями скачков уплотнения при обтекании профиля NASA 0012 с помощью теплообмена (подогрев и охлаждение обтекаемой поверхности); а также на основе распределенного отсоса пограничного слоя.

В рамках стационарных трансзвуковых режимов обтекания профиля NASA 0012 было проведено предварительное исследование малоизученного физического эффекта – влияние температуры поверхности на размеры локальных сверхзвуковых зон при наличии скачков уплотнения как на подветренной, так и наветренной сторонах аэродинамического профиля. Охлаждение поверхности профиля приводит к смещению точек отрыва пограничного слоя вниз по потоку, а точек присоединения вверх по потоку, отрывная зона уменьшается. Изменение структуры течения происходит в результате увеличения плотности и уменьшения вязкости газа в пристеночной области. Локальные сверхзвуковые зоны (ЛСЗ) расширяются, что ведет к росту перепада давления на скачках уплотнения. Нагрев поверхности профиля вызывает противоположный эффект.

В случаях нестационарного обтекания профиля при наличии автоколебаний скачка уплотнения в потоке, теплообмен имеет такое же результирующее воздействие на структуру течения, как и для стационарного обтекания.

Охлаждение поверхности профиля в режиме A1 приводит к затягиванию отрыва пограничного слоя, при этом вся область автоколебаний скачка уплотнения расширяется и смещается вниз по потоку, возрастает интенсивность и уменьшаются частоты колебания скачка уплотнения. Для режима A2 автоколебаний было получено уменьшение диапазона существования по числу Маха M_∞ со значительным уменьшением амплитуды колебаний коэффициента подъемной силы.

Показано, что с помощью охлаждения или подогрева поверхности профиля, в исследованном диапазоне параметра теплообмена, автоколебания скачков уплотнения убрать невозможно.

Исследование влияния массообмена на режимы автоколебаний скачков уплотнения было выполнено с помощью распределенного отсоса пограничного слоя на некотором участке обтекаемой поверхности. Изменение структуры течения происходит за счет удаления заторможенных частиц газа в пограничном слое, при этом профиль продольной компоненты скорости наполняется. В итоге импульс газа в продольном направлении увеличивается. Увеличение интенсивности отсоса приводит к устранению либо существенному уменьшению отрывной зоны, и как результат, к полному либо частичному затуханию автоколебаний скачков уплотнения.

Исследования выполнялись при частичной поддержке украинско-российского проекта «Керування відривом потоку у трансзвукових та надзвукових турбулентних течіях» (№ гос. регистрации 0114U002994).

Литература

1. Пилипенко А.А., Полевой О.Б., Приходько А.А. Численное моделирование влияния числа Маха и угла атаки на режимы трансзвукового турбулентного обтекания аэродинамических профилей // Ученые записки ЦАГИ, 2012, т. 18, № 1. С. 3-31.
2. Приходько А.А., Полевой О.Б. Автоколебания скачков уплотнения на симметричном профиле NASA 0012 при трансзвуковом турбулентном обтекании под нулевым углом атаки // Материалы XIV международной школы-семинара «Модели и методы аэродинамики», МЦНМО, Евпатория, 5-12 июня 2014 г. С. 124-125.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОМЕХАНИКИ СЛАБОИОНИЗИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

Д.А. Редчиц

Институт транспортных систем и технологий НАН Украины

Введение

Применение плазменных актуаторов (ПА) на основе диэлектрического барьерного разряда (ДБР) относится к числу современных и перспективных способов изменения структуры течения. В отличие от классических способов использования ДБР является менее энергозатратным и не требует конструктивных изменений (перфорирования поверхности, установки интерцепторов или дополнительных подвижных элементов).

Исходя из результатов предыдущих исследований по методам математического описания низкотемпературной неравновесной идеальной плазмы, в качестве базового выбран диффузионно-дрейфовый подход для описания пространственно-временной структуры диэлектрического барьерного разряда в воздухе при атмосферном давлении, включая кинетические явления и плазмохимические реакции.

Кинетическая схема плазмы диэлектрического барьерного разряда

В работе рассматриваются электронно-возбужденные и метастабильные (*) состояния молекул азота $N_2^+(A^3\Sigma_u^+)$, $N_2(B^3\Pi_g)$, $N_2^+(a'^1\Sigma_u^-)$, $N_2(C^3\Pi_u)$ и кислорода $O_2^+(a'^1\Delta_g)$, $O_2^+(b'^1\Sigma_g^+)$, атомы кислорода O , электроны e , а также положительные N_2^+ , N_4^+ , O_2^+ , O_4^+ и отрицательные ионы O^- , O_2^- , в общей сложности 14 частиц и 97 плазмохимических реакций, включая поверхностные процессы.

Химические реакции включают процессы диссоциации, ионизации молекул электронным ударом из основного состояния, ступенчатую, ассоциативную и фотоионизацию, возбуждение молекул, ионизацию возбужденных (метастабильных) молекул, прилипание и отлипание электронов, рекомбинацию электронов и положительных ионов, химические превращения нейтральных атомов, молекул и ионов, а также процессы вторичной эмиссии электронов из открытого электрода и диэлектрической поверхности.

Система уравнений динамики частиц плазмы и электродинамики

Нестационарная формулировка. Для моделирования диэлектрического барьерного разряда необходимо совместно решать систему 14 уравнений динамики частиц плазмы с уравнением Пуассона для электрического поля. При решении нестационарной задачи динамики плазмы рассматриваются разнородные уравнения. Для их согласования вводится псевдовремя τ для каждого уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tau_n} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \mathbf{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \mathbf{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right] = \mathbf{S}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\varphi} + \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_r \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon_r \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{e}{\varepsilon_0} (n_+ - n_-), \quad (2)$$

где τ_n и τ_φ – псевдовремя для уравнений динамики частиц плазмы и электрического потенциала, $n_{N_4^+}$, $n_{N_2^+}$, $n_{O_4^+}$, $n_{O_2^+}$, n_{O^-} , $n_{O_2^-}$, n_e – объемная плотность электронов, а также положительных и отрицательных ионов азота и кислорода, $\mathbf{n}$ – вектор искомых переменных для объемной плотности частиц, μ и $\mathbf{D}$ – векторные коэффициенты подвижности и диффузии частиц, $\mathbf{S}$ – вектор источников членов

$$\mathbf{n} = \left[n_{N_4^+}, n_{N_2^+}, n_{N_2(A^3\Sigma_u^+)}, n_{N_2(B^3\Pi_g)}, n_{N_2(a'^1\Sigma_u^-)}, n_{N_2(C^3\Pi_u)}, n_{O_4^+}, n_{O_2^+}, n_{O_2^-}, n_{O^-}, n_O, n_{O_2(a^1\Delta_g)}, n_{O_2(b^1\Sigma_g^+)}, n_e \right]^T$$

$$\boldsymbol{\mu} = \left[\mu_{N_4^+}, \mu_{N_2^+}, 0, 0, 0, 0, \mu_{O_4^+}, \mu_{O_2^+}, -\mu_{O_2^-}, -\mu_{O^-}, 0, 0, 0, -\mu_e \right]^T$$

$$\mathbf{D} = \left[D_{N_4^+}, D_{N_2^+}, 0, 0, 0, 0, D_{O_4^+}, D_{O_2^+}, D_{O_2^-}, D_{O^-}, 0, 0, 0, D_e \right]^T$$

$$\mathbf{S} = \left[S_{N_4^+}, S_{N_2^+}, S_{N_2(A^3\Sigma_u^+)}, S_{N_2(B^3\Pi_g)}, S_{N_2(a'^1\Sigma_u^-)}, S_{N_2(C^3\Pi_u)}, S_{O_4^+}, S_{O_2^+}, S_{O_2^-}, S_{O^-}, S_O, S_{O_2(a^1\Delta_g)}, S_{O_2(b^1\Sigma_g^+)}, S_e \right]^T$$

Здесь под произведением вида $\boldsymbol{\mu n}$ подразумевается вектор $[\mu_1 n_1, \mu_2 n_2, \dots, \mu_\ell n_\ell]^T$.

Начальные и граничные условия для исходной системы уравнений

Уравнение Пуассона для электрического потенциала. В качестве начальных условий задавалось нулевое распределение электрического потенциала в области.

Уравнение (2) решается для электрического потенциала, используя приложенное напряжение к электродам как граничное условие, а также соответствующие значения относительной диэлектрической проницаемости для воздуха и диэлектрика. Переменное напряжение, приложенное к открытому электроду, задается как

$$\varphi(t) = \varphi^{\max} \sin(2\pi\omega t), \quad (3)$$

где ω – частота и $\varphi^{\max}$ – амплитуда колебаний. К изолированному электроду прикладывается нулевой потенциал. На внешних границах ставится условие Неймана.

Уравнения динамики частиц плазмы. В качестве начальных условий задавалась фоновая концентрация ионов и электронов в воздухе ($n_+ = 10^9$ 1/м³, $n_- = 10^9$ 1/м³, $n_e = 10^{10}$ 1/м³). Граничные условия для уравнений динамики заряженных частиц на твердой поверхности приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Граничные условия для уравнений динамики заряженных частиц

$E_{\ell_n} > 0$	$\Gamma_{i+} = -1/4 n_{i+} V_{i+}^{th}, \quad \Gamma_{i-} = -\mu_{i-} E_n n_{i-} - 1/4 n_{i-} V_{i-}^{th}, \quad \Gamma_e = -\mu_e E_n n_e - 1/4 n_e V_e^{th},$
$E_{\ell_n} \leq 0$	$\Gamma_{i+} = \mu_{i+} E_n n_{i+} - 1/4 n_{i+} V_{i+}^{th}, \quad \Gamma_{i-} = -1/4 n_{i-} V_{i-}^{th}, \quad \Gamma_e = -\gamma_{Cu, diel} \Gamma_{i+},$

где $V_{i,e}^{th}$ – тепловая скорость движения частиц, γ_{Cu} – коэффициент ионно-электронной эмиссии из медного анода, который зависит от напряженности электрического поля. На внешних границах ставится условие Неймана $\partial n / \partial \ell_n = 0$.

Заключение

Разработана новая математическая модель диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора в воздухе при атмосферном давлении для описания пространственно-временной структуры, включая нестационарные электродинамические процессы, кинетические явления и плазмохимические реакции.

Предложена новая взаимно согласованная система исходных уравнений, состоящая из уравнения для электрического потенциала и 14 уравнений динамики заряженных частиц плазмы, использующая различный масштаб псевдовремени в отдельных уравнениях.

Разработана численно-аналитическая модификация уравнения Пуассона для электрического потенциала φ в криволинейной системе координат для непосредственного выделения операторов по φ , вместо опосредованного влияния через значения плотности заряженных частиц $n_{\pm}$ в источниковом слагаемом, с использованием противоточной аппроксимации плотности заряженных частиц во вторых производных для электрического потенциала.

Реализован единый неявный численный алгоритм для эффективного решения неоднородной системы исходных уравнений.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ПАРЕ ЛУНОК НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Н.В.Розумнюк

Институт гидромеханики НАН Украины

В настоящем докладе представлены результаты численного моделирования течения внутри симметричной пары лунок в поверхности плоской пластины как элемента регулярной структуризации поверхности с целью влияния на параметры обтекания потоком.

Структурирование поверхности предназначаются для того, чтобы вносить некую регулярность в пристенную турбулентность, навязывать ей вихревые возмущения определенного вида и масштабов. В частности, комбинация двух овальных лунок, расположенных зеркально под некоторым углом относительно вектора потока, генерирует квазиустойчивую пару продольных вихрей ниже по потоку за лунками. Параметры этих вихрей связаны с характером движения внутри лунок, на которое, в свою очередь, зависит от формы и размеров лунок относительно параметров натекающего пограничного слоя перед углублением.

Изучались несколько разновидностей формы пары лунок длиной 5 см, расположенных под углом к направлению потока 30° на минимальном расстоянии между их кромками 5 мм. Поверхность обтекалась потоком воды со скоростями от 0.25 м/с до 1.5 м/с. Относительная глубина лунок изменялась от 0.5 до 0.2 (по отношению к ширине), относительная длина от 2 до 5. Получены зависимости от этих параметров интенсивности завихренности в ядрах вихрей, формирующихся передних частях лунок, и изменение этой величины вдоль длины лунок, а также формы и положения осей этих вихрей (Рис.1, 2). Соответственно варьируется расстояние вниз по потоку за лунками, на котором прослеживается влияние этих вихревых образований на пограничный слой и обтекаемую поверхность. Рассмотрено также влияние сглаживания острой кромки лунки в нижней по потоку части (в районе выхода вихря).

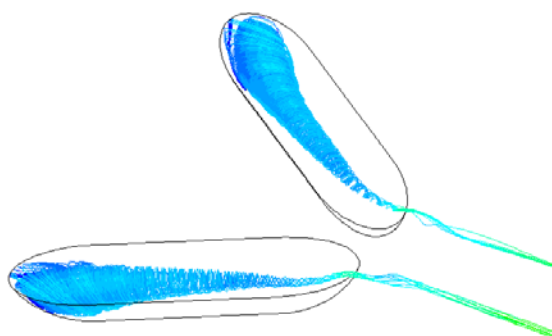


Рис.1

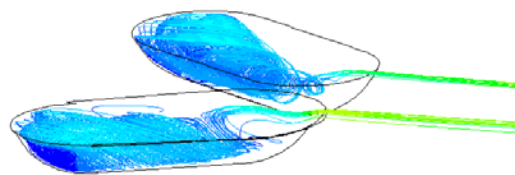


Рис.2

УДК 519.63

СУЧАСНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

**А.В. Сохацький
АМСУ, м. Дніпропетровськ**

Створення перспективних літальних апаратів різноманітного призначення вимагає детальних аеродинамічних досліджень. Застосування математичного моделювання з використанням сучасних обчислювальних технологій у поєднанні з фізичними експериментами – це єдиний шлях розв’язування поставлених задач. У зв’язку з цим існує необхідність створення математичного та програмного забезпечення для розв’язування зв’язаних задач аеродинаміки та динаміки руху перспективних літальних апаратів, які б дозволили виконувати пошук раціональних аеродинамічних компонувань з придатними технічними та динамічними параметрами.

Накопичення даних статистичного характеру в аеродинамічних трубах та багатокomпонентним теоретичним аналізом на обчислювальних машинах допомагає вибрати раціональне аеродинамічне компонування. Проте еволюційний метод розробки аеродинамічних компонувань потребує великих часових затрат. Існує нагальна потреба створення більш ефективної методології формоутворення оптимальних аеродинамічних компонувань літальних апаратів.

Сучасні математичні моделі аеродинаміки розподіляють на наступні рівні

1. Аналітичні наближення та лінеаризовані рівняння.
2. Нелінійні рівняння без урахування дисипативних членів.
3. Нелінійні рівняння з урахуванням дисипативних членів.
4. Повні нестационарні моделі.

Використання моделей 1-го рівня (аналітичні співвідношення, наближення потенціальної течії, панельні методи, метод дискретних вихорів) дозволило розраховувати аеродинамічні характеристики реальних літальних апаратів.

Моделі 2-го рівня дозволяють розраховувати розриви газодинамічних величин, але вони вимагають використання ЕОМ великої продуктивності (більше 10^9 флопс).

Розв’язування задач з урахуванням турбулентних параметрів, реальних властивостей газів вимагають використання моделей 3-4-го рівнів. Складність їх розв’язування, окрім нелінійності, пов’язується ще й з відсутністю відповідних моделей турбулентності.

Складна хвильова динаміка течій навколо літальних апаратів, одночасна наявність поступального, обертального і деформаційного рухів складає значні труднощі їх моделювання та вивчення. Вважається, що на сьогодні найбільш досконалою математичною моделлю в’язкої стисливої течії є рівняння Нав’є-Стокса. Правомірність їх використання підтверджується багаточисельними дослідженнями. Фундаментальною основою їх використання є те, що просторово-часові масштаби турбулентності істотно переважають просторово-часові масштаби молекулярного руху. Найбільш високорівнеми методами є пряме числове моделювання (DNS) та моделювання великих вихорів (LES).

Метод DNS дозволяє моделювати в загальному випадку рух в’язких стисливих газів з урахуванням хімічних реакцій, як ламінарних, так і, турбулентних режимів. Він не потребує додаткових рівнянь. При використанні методу DNS розрізняються усі масштаби турбулентності. Це дозволяє розрахувати амплітудно-частотні та середні характеристики потоку шляхом осереднення за достатньо довгим інтервалом часу. Використання DNS вимагає застосування потужних обчислювальних ресурсів. На сьогодні можливості застосування DNS обмежуються простою геометрією фізичної області та невеликими числами Рейнольдса ($Re=10^3 \div 10^4$)

Метод великих вихорів (LES) займає проміжне становище поміж прямим числовим моделюванням та осередненими рівняннями Нав'є-Стокса. Він базується на двох припущеннях:

1. Поле течії розділяється на рух великих та дрібних вихорів. Великі вихори розраховуються. Дрібномасштабна турбулентність вважається ізотропною і має універсальний характер.

2. Приймається гіпотеза про статичну незалежність великих та дрібних вихорів. Нелінійна взаємодія поміж великими та малими вихорами визначається через великі вихори з використанням підсіткових моделей.

В методі LES розв'язуються відфільтровані по простору рівняння Нав'є-Стокса і розрізняється рух тільки великих вихорів. Їх розміри визначаються межевими умовами. Великомасштабні компоненти турбулентності утворюються із середньої течії шляхом подолання в'язких напружень. Мінливі вихори мають більш універсальну структуру та характеристики, які визначаються швидкістю дисипації кінетичної енергії і в'язкістю. Вони порівняно слабо залежать від геометрії течії і зовнішніх умов. Їх моделюють за допомогою моделей підсіткового масштабу, які побудовані на основі концепції вихорової в'язкості або інших наближень процесу переносу. Для забезпечення розрізнення великих вихорових структур, що лежать за межами інерційного інтервалу, задовольняючого закону «п'яти третіх» потрібно використовувати надто дрібні сітки. Для врахування впливу вихорів, що менші розміру розрахункової комірки використовуються емпіричні співвідношення.

Проте на сьогодні найбільш поширеним підходом для моделювання турбулентних течій залишається напівемпірична теорія турбулентності. Напівемпіричні моделі турбулентності, розроблені для розрахунку стаціонарних і слабо стаціонарних течій. Їх калібрування обмежується вибором емпіричних констант для тонких зсувних шарів.

Поряд з методом LES та RANS використовується і моделювання з обмеженим та комбінованим використанням підсіткових моделей. Це псевдо-або квазіпряме числове моделювання (PDNS, QDNS), монотонне моделювання великих вихорів (Monotonically Integrated Large Eddy Simulation - MILES), неявний LES (Implicit Large Eddy Simulation - ILES). Ці методи мають високу обчислювальну ефективність, проте вони не мають відповідного фізичного обґрунтування.

Досвід застосування методу нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса (Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes – (URANS)) виявив цілий ряд протиріч. Намагання обґрунтувати правомірність URANS непереконливі, оскільки традиційні моделі турбулентності калібруються за осередненими за часом характеристиками течії. Моделювання зовнішнього обтікання з значними відривними зонами, де характерні квазіперіодичні режими течії, методом URANS вдається якісно описати фізичний процес та отримати відповідні фізичному експерименту кількісні параметри течій. В багатьох інших випадках результати розрахунків методом URANS не дають достатньо придатні результати. Залишаються відкритими питання меж його використання.

В доповіді наводяться результати розробки методики, алгоритму та програмного забезпечення для моделювання турбулентних течій на основі використання осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса, замкнених моделлю турбулентності Спаларта-Алмараса в реалізації відокремлених вихорів.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГРЕВА И ВОСПЛАМЕНЕНИЯ СУХИХ И ВОДОНАСЫЩЕННЫХ УГОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В ГАЗОДИСПЕРСНОМ ПОТОКЕ

В.И. Тимошенко,

ИТМ НАНУ и НКАУ, г. Днепропетровск

В докладе обсуждается расчетная схема численного решения задачи о воспламенении и горении сухих и влагонасыщенных частиц угля в горячем газодисперсном потоке с учетом изменения температуры в пределах частицы. Используются кинетические модели гетерогенных реакций на поверхности частиц. В качестве несущего газа рассматривается химически равновесная смесь, состоящая из семи компонентов O_2 , CO , CO_2 , H_2 , H_2O , N_2 . Состав смеси задан массовыми концентрациями ее компонентов. При горении частицы учитываются реакции углерода с кислородом воздуха, парами воды и двуокисью углерода. Набор реакций, которые рассматриваются при проведении исследований, определен исходя из сопоставления величин кинетических констант скоростей химических реакций, протекание которых возможно при горении углерода в смеси воздуха с парами воды. При расчете изменения температуры влагонасыщенной частицы считается, что испарение происходит внутри частицы на некоторой подвижной поверхности, которая делит частицу на две области. В каждой области численно решается нестационарное уравнение теплопроводности со своими граничными условиями. Положение этой поверхности испарения определяется исходя из температуры фазового перехода и баланса тепловых потоков и теплоты фазового перехода. На внешней поверхности частицы граничные условия формулируются, исходя из условий теплообмена с несущим газом при наличии гетерогенных реакций углерода с компонентами газовой смеси..

Для детального анализа влияния неравномерности прогрева частиц на характер их прогрева, воспламенения и горения используется среднеобъемное приближение для газодисперсной смеси. При рассмотрении факельного горения в закрученной турбулентной струе используется двухскоростная, двух температурная модель сплошной среды и дискретно траекторная модель. Течение в струе описывается в приближении «узкого канала». В рамках этих моделей анализируется влияние неравномерного прогрева частиц на время и характер их воспламенения и горения.

При расчете в среднеобъемном приближении считается, что в начальный момент времени в емкости объемом Ω находится химически равновесная смесь. Состав смеси задан массовыми концентрациями ее компонентов. Начальные температура T_0 и давление p_0 смеси заданы. Начальный эффективный диаметр угольных частиц d_0 , а также их плотность и температура $T_{p0} < T_0$ заданы. Температура T_0 достаточна для того, чтобы газ нагрел угольные частицы до воспламенения. Объем емкости и давление в ней заданы и с течением времени не изменяются. Эти условия типичны для многих технологических аппаратов. В частности, при сгорании взвешенных частиц угля (например, в циркулирующем кипящем слое) в топочное пространство заданного объема подается воздух, и отводятся продукты сгорания, при этом давление в топке практически равно атмосферному давлению. Особенности прогрева влагонасыщенной частицы, выясненные в рамках этого приближения сводятся к следующему:

- температура изотермической частицы на стадии испарения влаги остается практически постоянной и равной температуре насыщенных паров. После испарения влаги начинается прогрев высохшей частицы с последующим ее воспламенением.
- учет изменения температуры внутри частицы изменяет характер изменения параметров. Имеет место нагрев поверхности частицы и повышение ее температуры до температуры воспламенения углерода, что влечет за собой более

интенсивное повышение температуры поверхности частицы. Испарение влаги происходит внутри частицы. Температура в центре частицы в течение некоторого времени остается постоянной. После испарения влаги температура в центре частицы резко возрастает и приближается к температуре поверхности.

- при малой теплопроводности материала частицы и при наличии в ее объеме массопереноса и фазовых превращений использование изотермической модели может привести к погрешности в определении времени прогрева частицы и ее воспламенения в газодисперсной смеси. Показано, что при учете изменения температуры внутри влагонасыщенной частицы, расчетное время ее прогрева и воспламенения может быть существенно меньше (в два и более раз), чем в случае рассмотрения частицы постоянной в ее пределах температурой.

При решении задачи определения параметров частиц при течении газодисперсной струи в спутном низкоскоростном потоке горячего воздуха используется двухскоростная и дискретно траекторная модели сплошной среды. На основании результатов численного эксперимента проанализировано влияние закрутки газодисперсной струи на формирование факела горения частиц. Получены типичные распределения параметров в поперечных сечениях газодисперсной струи и исследовано влияние закрутки потока на особенности газодисперсного струйного течения.

Закрутка несущей струи газа приводит к формированию пелены частиц и их смещению в область высокотемпературного спутного потока. При увеличении окружной скорости среднеобъемная плотность частиц в области формирования пелены возрастает, что несколько замедляет повышение их температуры. Это связано с тем, что в зоне горения при избытке углерода уменьшается концентрация кислорода, вследствие чего реакция горения замедляется и уменьшается выделившееся при горении количество тепла в расчете на единицу массы частиц. С другой стороны увеличение количества частиц при увеличении скорости вращения приводит к интенсификации среднеобъемной теплопередачи от частиц к несущему газу, что приводит к увеличению его температуры.

ТЕЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ
С РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ ОГРАНИЧИВАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Шалденко А.В., Гуржий А.А.

Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев 03056, Украина

Summary 2D problem of two-dimensional viscous flow with convective diffusion heat conduction in the channel with complex geometry of boundaries are considered. The problem is solved numerically in terms “stream function – vorticity” with a simple explicit scheme against the flow and the method of successive over-relaxation for an elliptic equation to determine stream function distribution. It is shown that unstable flow may occur in the curved channel for laminar flows. It leads to an increasing of heat flows through the boundaries.

Генерация неустойчивых гидродинамических течений часто приводит к значительному увеличению вторичных потоков. Сегодня известно, что такая неустойчивость может возникать при ламинарных течениях. Поиск хаотических режимов течения в ламинарных течениях позволяет эффективно управлять развитием течения, увеличению теплового потока в теплообменниках в энергетике и к некоторым другим эффектам, которые могут оказаться более экономичными с энергетической точки зрения.

В докладе рассматривается задача о конвективно-диффузионном теплообмене двумерных каналов в различной геометрии ограничивающих поверхностей. Основными уравнениями, описывающими физические процессы в канале, заполненном однородной вязкой, несжимаемой жидкостью, являются уравнения Навье-Стокса, уравнение неразрывности и уравнение конвективно-диффузионной теплопроводности, которые при отсутствии действия внешних сил и источников тепловыделения могут быть записаны в следующем виде [1]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\nu} \Delta \mathbf{U}, \quad \nabla \mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) T = D \Delta T \quad (1)$$

где $\mathbf{U}$ – поле скорости течения, p – поле давления, T – поле температур, ρ – плотность жидкости, ν – кинематическая вязкость жидкости, D – коэффициент теплопроводности среды. Распространение тепла во внешней области, заполненной твердым материалом, описывается уравнением (1,с) при $\mathbf{U}=0$. Необходимо выяснить каким образом геометрия канала влияет на устойчивость течения и связанные с этим тепловые потоки через ограничивающие поверхности.

В дальнейшем задача пронормирована на ширину канала и максимальную скорость течения на входе канала, на разность температур $\Delta T = T_1 - T_0$ поступающей жидкости и твердой среды на бесконечности и на термическую проводимость жидкости в канале.

В канал поступает жидкость с параболическим профилем скорости и температурой T_1 , которая поддерживается с течением времени. С другой стороны, на бесконечности поддерживается постоянная температура T_0 . На границе течения для гидродинамической задачи ставится условие прилипания, а для тепловой задачи – граничное условие третьего рода, связывающее тепловые потоки из жидкости в твердую среду.

Поставленная задача решалась численно [2] в терминах функция “тока - завихренность” с использованием простой явной схемы “против течения” для консервативной формы записи уравнений переноса завихренности и уравнения конвективно-диффузионной теплопроводности в обеих средах с соответствующими граничными и начальными условиями. Эллиптическое уравнение, связывающее распределение функции тока и поля завихренности решалось методом последовательной верхней релаксации.

В качестве тестового режима рассматривается течение вязкой однородной жидкости внутри прямолинейного канала с числом Рейнольдса $Re = 1000$, числом Пекле для жидкой $Pe_{ж} = 5200.0$ и твердой $Pe_{т} = 40.0$ сред. При проведении вычислений принято отношение термических проводимостей сред $\gamma = \lambda_{т} / \lambda_{ж} = 10$.

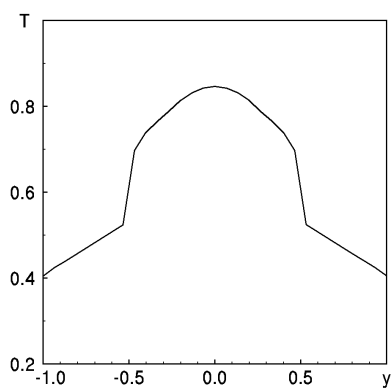


Рис.1. Профиль температур в сечении прямолинейного канала

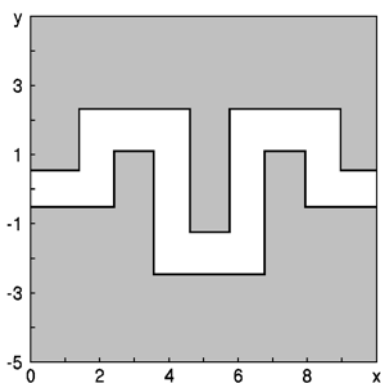


Рис.2. Геометрия криволинейного канала

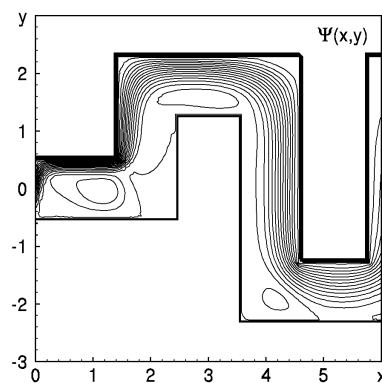


Рис.3. Распределение поля функции тока в канале

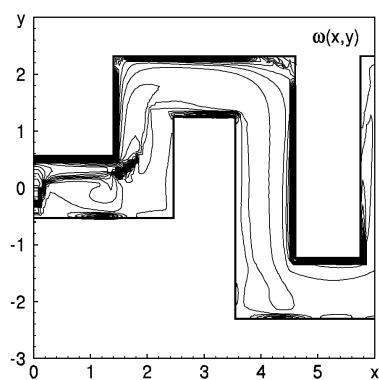


Рис.4. Распределение поля завихренности в канале

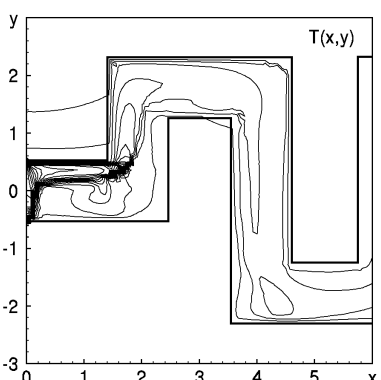


Рис.5. Распределение поля температур в криволинейном канале

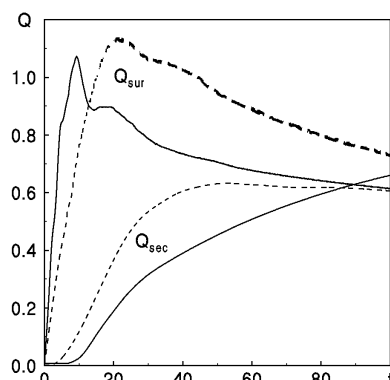


Рис.6. Зависимость безразмерных тепловых потоков через ограничивающие поверхности

На рис.1. показано распределение поля температур в сечении $x = 6.0$ прямолинейного канала при стационарном ламинарном течении (при $Re = 1000$) вязкой жидкости. Течение обладает симметрией, более холодная жидкость примыкает к поверхности. При этом формируется тепловой поток $Q = 0.257$, приходящийся на единицу длины канала. Это распределение температур принято в качестве базовой при анализе эффектов, связанных с формированием неустойчивости течения.

Геометрия криволинейного канала показана на рис.2, в котором формируется ламинарное течение при одинаковых гидродинамических и тепловых параметрах по сравнению со случаем прямолинейного канала. На рис.3. показано распределение поля функции тока в момент времени $t = 10$. Видно, что течение теряет симметрию и в областях, прилегающих к острым краям, возникают нестационарные области завихренности (рис.4), которые формируют поперечное течение в рассматриваемом канале. Смещение горячей жидкости к границам течения приводит к увеличению градиента температур на ограничивающих поверхностях (рис.5) и, как результат, к увеличению теплового потока. Изменения безразмерного теплового потока Q_{sur} через ограничивающую поверхность и Q_{sec} через плоскость $y = 3$ показаны на рис.6. Видно, что тепловой поток стабилизируется при $t \approx 60 \dots 80$ (сплошные линии) и превышает аналогичные характеристики, полученные для прямолинейного канала (штриховые линии).

Литература

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика – М.: Наука, 1986. - 736с.
- [2] Роуч П. Вычислительная гидромеханика – М.: Мир, 1980. – 616с.

Волны на поверхности жидкости, вызванные вибрацией пластин, лежащей на её поверхности

Потетюкко Э. Н.

Южный федеральный университет (ЮФУ)

Ростов-на-Дону, Россия

Математическая постановка задачи

В линейной постановке с учётом исчезающе малых диссипативных сил, пропорциональных скорости частиц жидкости, задача о плоском установившемся периодическом по времени волновом движении жидкости бесконечной глубины, вызванном вертикальными колебаниями пластины, лежащей на верхней поверхности, сводится к следующей краевой [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \mu \bar{U} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad \operatorname{div} \bar{U} = 0, \quad P = p + \rho g z - p_0, \quad \bar{U} = \nabla \Phi, \quad P = -\rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu \Phi \right] \\ -P + \rho g \zeta &= -P_*(x, t), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = U_z, \quad z = 0, \quad |x| > a \\ U_z = V_*(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} W_*(x, t), \quad W_*(x, t) = W(x) e^{i\omega t}, \quad |x| \leq a, \quad z = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\lim_{r=\sqrt{x^2+z^2} \rightarrow \infty} \Phi = 0, \quad \lim_{r=\sqrt{x^2+z^2} \rightarrow \infty} (\nabla \Phi) r = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{F} = 0, \quad \bar{F} = \{\Phi, \zeta, p, P_*\}, \quad \bar{F}\left(x, z, t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \bar{F}(x, z, t)$$

Здесь $\bar{U} = \{U_x, U_z\}$ – вектор скорости частиц жидкости, p – гидродинамическое давление, P – динамическая часть гидродинамического давления, $\rho g(-z)$ – гидростатическая часть гидродинамического давления, ζ – возвышение свободной поверхности, $V_*(x, t) = V_0(x) e^{i\omega t}$ – скорость колебаний точек пластины, $W_*(x, t) = W(x) e^{i\omega t}$ – заданные вертикальные перемещения точек пластины от равновесного состояния, P_* – заданное внешнее динамическое давление на свободной поверхности жидкости, p_0 – внешнее атмосферное давление, которое полагаем равным нулю, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, μ – коэффициент диссипации ($\mu > 0$), $2a$ – ширина пластины, t – время, ω – частота колебаний пластины. Начало координат взято посередине пластины в положении равновесия, ось Ox – направлена горизонтально, ось Oz – вертикально вверх против силы тяжести.

Полагая $P_* = \Pi_*(x) e^{i\omega t}$, решение задачи (1) ищем в виде $\Phi = \varphi e^{i\omega t}$, $\zeta = \eta e^{i\omega t}$

Здесь $\varphi(x, z)$ и $\eta(x)$ – амплитудные функции для потенциала скорости и возвышения свободной поверхности.

Для φ выводим следующую краевую задачу $\Delta \varphi = 0$

$$i\omega\eta = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad -\gamma\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{i\omega}{\rho g} \Pi_*, \quad \gamma = \frac{\omega^2 - i\omega\mu}{g}, \quad z = 0, \quad |x| > a \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = V_0(x) = i\omega W(x), \quad z=0, \quad |x| \leq a, \quad \left\{ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \Pi_* \right\} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \left\{ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty$$

Продолжим граничное условие (2.3) во внутрь интервала $|x| \leq a$, введя в рассмотрение функцию $q_*(x)$:

$$-\gamma \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{i\omega}{\rho g} q_*(x); \quad q_*(x) = \begin{cases} \Pi_*(x), & |x| > a, \\ Q_*(x), & |x| \leq a \end{cases}$$

В данной задаче функция $Q_*(x)$ ($|x| \leq a$) представляет собой амплитудную функцию контактных напряжений под пластиной.

Пусть заданная функция $\Pi_*(x) = 0, \quad |x| > a$.

Построим решение задачи считая на этом этапе функцию $Q_*(x)$ известной. Применим преобразование Фурье по x . Обращая по Фурье, находим:

$$\eta(x) = -\frac{q_*}{\rho g} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma}{\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{q}_*(\xi) e^{-i\xi x}}{|\xi| - \gamma} d\xi, \quad \rho g w(x) + Q_*(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \gamma \int_{-a}^a Q_*(u) K(x-u) du, \quad |x| \leq a \quad (3)$$

Интегральное уравнение (3) решаем асимптотически при малых и больших значениях $\lambda = \frac{\omega^2 a}{g}$.

Выводятся оценки погрешностей построенных асимптотик. По найденным асимптотикам для $Q_*(x)$ определяется вид свободной поверхности

$$\eta(x) = -\frac{q_*}{\rho g} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma}{\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} q_*(u) K(x-u) du, \quad K(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi v}}{|\xi| - \gamma} d\xi, \quad v = x-u, \quad \lambda \rightarrow 0$$

$$\bar{\eta}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma}{\rho g} \int_{-a}^a \bar{Q}(u) \pi \sin(\gamma(x-u)) du, \quad \bar{Q}(ax_1) = -\rho g w(ax_1) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda C_1 \sin(\lambda x_1) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda C_2 \cos(\lambda x_1).$$

$$C_1 = \frac{b_1 - b_2 \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{1 - \lambda^2 \frac{\pi}{2}}, \quad C_2 = \frac{b_2 - b_1 \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{1 - \lambda^2 \frac{\pi}{2}}$$

$$b_1 = -\rho g w(au_1) \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda u_1) \Big|_{u_1=-1}^{u_1=1} + \rho g \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 w'_z(z) \sin(\lambda u_1); \quad z = au_1;$$

$$b_2 = \rho g w(au_1) \frac{1}{\lambda} \cos(\lambda u_1) \Big|_{u_1=-1}^{u_1=1} - \rho g \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 w'_z(z) \cos(\lambda u_1), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Асимптотическая формула для $Q_*(x)$ получена из решения интегрального уравнения для $Q_*(x)$ заменой ядра на его асимптотическое представление при $\lambda \rightarrow \infty$.

