

УДК 534.26

ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКОЇ АКУСТИЧНОЇ ХВИЛІ НА НАПІВНЕСКІНЧЕННОМУ М'ЯКОМУ КОНУСІ ЗІ ЗРІЗАНОЮ ВЕРШИНОЮ

Д. Б. КУРИЛЯК, В. О. ЛИСЕЧКО*

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України

вул. Наукова, 5, 79060, Львів, Україна

*E-mail: vtlysechko@gmail.com

Отримано 26.12.2014

Отримано розв'язок задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на напівнескінченному м'якому конусі зі зрізаною вершиною при його осьовому опроміненні. Задачу розв'язано відносно скалярного потенціалу швидкості дифрагованого поля методом часткових областей. З використанням умови спряження полів отримано суматорні рівняння, які за допомогою методу аналітичної регуляризації зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду. Отримана система допускає розв'язок із заданою точністю методом редукції. Досліджено характеристики поля при різних значеннях геометричних параметрів і частоти. Достовірність числових даних підтверджується їхнім співставленням з результатами, отриманими іншими авторами для деяких часткових випадків.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: акустична хвиля, зрізаний конус, діаграма спрямованості, потужність випромінювання, аналітична регуляризація

Получено решение задачи дифракции плоской акустической волны на полубесконечном мягком усеченном конусе при его осевом облучении. Задача решена относительно скалярного потенциала скорости дифрагированного поля методом частичных областей. С использованием условия сопряжения полей получены сумматорные уравнения, которые с помощью метода аналитической регуляризации сведены к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода. Полученная система допускает решение с заданной точностью методом редукции. Исследованы характеристики поля при различных значениях геометрических параметров и частоты. Достоверность численных данных подтверждается сопоставлением с результатами, полученными другими авторами для некоторых частных случаев.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: акустическая волна, усеченный конус, диаграмма направленности, мощность излучения, аналитическая регуляризация

The paper deals with solving the problem on diffraction of a plane acoustic wave by a truncated semi-infinite soft cone in its axial irradiation. The problem is solved in terms of the velocity potential of a diffracted field by the method of partial domains. Using the field matching technique, the summation equations are reduced to the infinite system of linear algebraic equations of the second kind by means of analytical regularization procedure. The obtained system allows the solution with a desired accuracy using the reduction method. Field characteristics are studied at different geometrical parameters and frequencies. The reliability of numerical data is confirmed by their comparison with the results obtained by other authors for some particular cases.

KEY WORDS: acoustic wave, truncated cone, scattering pattern, radiation power, analytical regularization procedure

ВСТУП

Вивчення просторового розподілу дифрагованих на зрізаному конусі акустичних полів у широкому частотному діапазоні важливе для діагностування параметрів зрізу вершини конічного розсіювача. Ці дані також виявляються корисними при здійсненні контролю потоків рідин через отвори. Наприклад, для кругового отвору у площині таку можливість експериментально встановлено в роботі [1]. При цьому знаходження розподілу розсіяних полів із застосуванням теоретичних методів зводиться до розв'язання задачі дифракції плоскої хвилі на круглій апертурі, яка характеризується радіусом зрізу і кутом розхилу конуса.

Дифракція хвиль на напівнескінченних конусах

зі різними типами граничних умов досліджувалась багатьма авторами (див., наприклад, бібліографію у статті [2]). В електромагнітному випадку розв'язок задачі дифракції на напівнескінченних конусах зі зрізаною вершиною отримано у працях [3, 4], а для акустичного – ця задача досліджена в частковому випадку для круглої апертури у необмеженій м'якій або жорсткій площині, коли її радіус не перевищує 1.523 довжини хвилі [5, 6]. Використання принципу Бабіне [5] дозволило звести вихідну постановку до задачі розсіювання на круглому жорсткому (м'якому) диску. Для визначення ж дифрагованого поля в дослідженні [7] використано наближення Кірхгофа. У публікаціях [8–10] для розв'язання задачі дифракції на круглій апертурі використано варіаційний метод, а у [11] вона про-

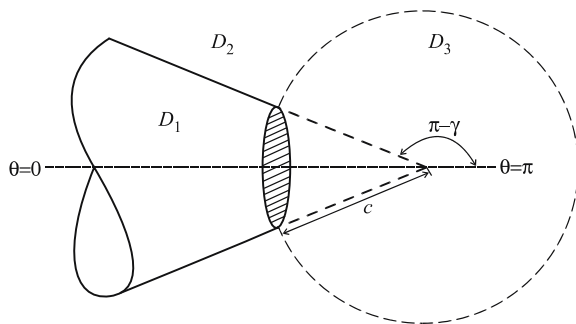


Рис. 1. Геометрія задачі

аналізована на основі методу геометричної теорії дифракції. Відповідні експериментальні результати наведені у [12].

У цій статті розглядаються розсіювальні властивості круглої апертури, отриманої у результаті зрізу вершини напівнескінченного м'якого конуса. Для розв'язання цієї задачі використано метод аналітичної регуляризації, запропонований у публікації [13]. Зауважимо також, що у статті [14] на основі цього підходу досліджено задачу дифракції плоскої хвилі на скінченному м'якому конусі при осьовому опроміненні. Постановка, яка розглядається нижче, є, по суті справи, доповнюючою до задачі, сформульованої у [14].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай у сферичній системі координат (r, θ, φ) задано ідеально м'який напівнескінченний конус зі зрізаною вершиною:

$$Q : \{r \in (c, \infty), \theta = \gamma, \varphi = [0, 2\pi)\}$$

(див. рис. 1). Конус Q опромінюється плоскою монохроматичною хвилею, яка поширюється уздовж осі симетрії конуса в напрямку $\theta=0^\circ$ і характеризується потенціалом швидкості $U_0(r, \theta) = \exp(ikr \cos \theta)$, де $k = \omega/c_0$; ω – кругова частота; c_0 – фазова швидкість. Гармонічну залежність поля від часу $\exp(-i\omega t)$ надалі опускаємо.

Оскільки поле U_0 має осьову симетрію й не залежить від координати φ , то знаходження невідомого потенціалу дифрагованого поля $U = U(r, \theta)$ зводиться до розв'язання змішаної крайової задачі для рівняння Гельмгольца

$$\Delta U(r, \theta) + k^2 U(r, \theta) = 0, \quad (1)$$

де Δ – оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Шуканий потенціал має задовольняти граничну умову Діріхле на бічній поверхні конуса:

$$\left[U(r, \theta) + U^{(i)}(r, \theta) \right] \Big|_{r, \theta \in Q} = 0. \quad (2)$$

Тут $U^{(i)}(r, \theta)$ – відомий потенціал первинного поля, який для зручності прийемо у вигляді потенціалу повного поля плоскої хвилі $U_0(r, \theta)$ у напівнескінченній конічній області.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у класі функцій, які забезпечують виконання умови граничного поглинання на нескінченності й умови обмеженості енергії поля у будь-якому скінченному об'ємі. У нашому випадку остання умова зводиться до забезпечення виконання умови Мейкснера на круговому краю апертури зрізаного конуса.

2. ЗАГАЛЬНИЙ ВИРАЗ ДЛЯ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ

Згідно з методом власних функцій [15], в областях існування звукового тиску повне поле подамо так:

$$U^{(t)}(r, \theta) = \begin{cases} U(r, \theta) + U^{(i)}(r, \theta), & r, \theta \in D_2; \\ U(r, \theta), & r, \theta \in D_1, D_3. \end{cases} \quad (3)$$

Тут

$$D_1 : \{r \in (c, \infty); \theta \in [0, \gamma)\},$$

$$D_2 : \{r \in (c, \infty); \theta \in (\gamma, \pi]\},$$

$$D_3 : \{r \in (0, c); \theta \in [0, \pi]\}.$$

Потенціал швидкості дифрагованого поля шукаємо у вигляді

$$U(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{p=1}^{\infty} y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta) \times \\ \quad \times \frac{K_{\nu_p}(sr)}{K_{\nu_p}(sc)}, & r, \theta \in D_1; \\ \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta) \times \\ \quad \times \frac{K_{\mu_k}(sr)}{K_{\mu_k}(sc)}, & r, \theta \in D_2; \\ \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) \times \\ \quad \times \frac{I_{z_n}(sr)}{I_{z_n}(sc)}, & r, \theta \in D_3, \end{cases} \quad (4)$$

де $y_p^{(1)}, y_k^{(2)}, \bar{x}_n$ – невідомі коефіцієнти розкладу; $P_{\eta-1/2}(\cdot)$ – функція Лежандра; $K_\eta(\cdot)$ – функція Макдональда; $I_\eta(\cdot)$ – модифікована функція Бесселя; $s = -ik$; $z_n = n - 1/2$; ν_p, μ_k – дійсні додатні корені трансцендентних рівнянь

$$P_{\eta-1/2}(\pm \cos \gamma) \Big|_{\eta=\left\{\begin{matrix} \nu_p \\ \mu_k \end{matrix}\right\}} = 0.$$

Невідомі коефіцієнти розкладу у формулі (4) шукаємо у класі послідовностей, який забезпечує рівномірну збіжність рядів, а їх перші похідні допускають особливості типу $\rho^{-1/2}$ при $\rho \rightarrow 0$, де ρ – віддаль до краю конуса в локальній системі координат.

Зауважимо, що у відповідності до означення (3), розклад (4) забезпечує виконання граничної умови (2) в області D_1 , а в області D_2 гранична умова виконується тільки для дифрагованого поля. Окрім того, вираз (4) забезпечує виконання умови граничного поглинання на нескінченності, а також умову обмеженості поля в початку сферичної системи координат. Для забезпечення можливості розв'язку дифракційної задачі методом спряження полів знайдемо спочатку подання поля плоскої хвилі в кінчній області. Для цього розв'яжемо допоміжну задачу.

3. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПОЛЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ В КІНЧНІЙ ОБЛАСТІ

Розглянемо ідеально м'який напівнескінченний конус

$$Q_1 : \{r \in (0, \infty), \theta = \gamma, \varphi \in [0, 2\pi)\},$$

опромінований плоскою монохроматичною акустичною хвилею, потенціал якої у сферичній системі виразимо через інтеграл Конторовича – Лебедева:

$$\begin{aligned} \exp(ikr \cos \theta) = \\ = \frac{\sqrt{\pi^3/2}}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{\Gamma} \nu \frac{P_{\nu-1/2}(\cos \theta)}{\cos \pi \nu} I_\nu(sr) d\nu. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут Γ – контур інтегрування в комплексній площині, що проходить паралельно до уявної осі – $\Gamma \subset \Pi : \{|\operatorname{Re} \nu| < 1/2\}$.

Розв'язок рівняння Гельмгольца для кінчної області $\{r \in (0, \infty), \gamma < \theta \leq \pi\}$ також подамо у ви-

гляді інтегралу Конторовича – Лебедева:

$$\begin{aligned} U^{(\infty)}(r, \theta) = \\ = \frac{1}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{\Gamma} \nu F(\nu) P_{\nu-1/2}(-\cos \theta) I_\nu(sr) d\nu, \end{aligned} \quad (6)$$

де $F(\nu) = F(-\nu)$ – невідома трансформанта, регулярна у смузі Π . Взявши до уваги вирази (5), (6) і задовольнивши граничну умову на Q_1 , знайдемо

$$F(\nu) = -\sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \frac{P_{\nu-1/2}(\cos \gamma)}{\cos \pi \nu P_{\nu-1/2}(-\cos \gamma)}. \quad (7)$$

Функція $F(\nu)$ має прості полюси у точках $\nu = \mu_k$ і $\nu = n - 1/2$, де $k, n = \overline{1, \infty}$. Підставимо вираз (7) в інтеграл (6) і замкнемо контур інтегрування Γ у правій півплощині півколом радіуса R . Спрямувавши $R \rightarrow \infty$ й застосувавши лему Жордана, замінимо інтеграл рядами лишків. У результаті отримаємо подання рядами дифрагованого поля при осьовому опроміненні напівнескінченного м'якого конуса Q_1 плоскою хвилею. Відповідно, повне поле запишемо так:

$$\begin{aligned} U^{t(\infty)}(r, \theta) = \sqrt{\frac{2\pi^3}{sr}} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k P_{\mu_k-1/2}(\cos \gamma) P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta)}{\cos \pi \mu_k \partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos \gamma) / \partial \mu} \times \\ \times I_{\mu_k}(sr), \end{aligned}$$

де $U^{t(\infty)}(r, \theta) = U^{(\infty)}(r, \theta) + U_0(r, \theta)$.

Для розв'язання основної задачі прийемо

$$U^{(i)}(r, \theta) = U^{t(\infty)}(r, \theta),$$

що з урахуванням розкладу (4) забезпечить виконання граничної умови (2) в області D_2 .

4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу в формулі (4) використаємо умови спряження повного потенціалу та його нормальної похідної на сфері $\{r = c, \theta \in [0, \pi]\}$, що містить край конуса. У результаті отримаємо суматорні рівняння задачі, які у зв'язку з наявністю особливості градієнта потенціалу при $r \rightarrow c \pm 0$ і $\theta \rightarrow \gamma \pm 0$ слід записати у вигляді

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) = \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta), & \theta \in [0, \gamma); \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta) + \\ + \sqrt{2\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k P_{\mu_k-1/2}(\cos \gamma) P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta)}{\cos \pi \mu_k \partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos \gamma) / \partial \mu} I_{\mu_k}(sc), & \theta \in (\gamma, \pi]; \end{cases} \quad (8)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) \frac{I'_{z_n}(sc)}{I_{z_n}(sc)} = \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta) \frac{K'_{\nu_p}(sc)}{K_{\nu_p}(sc)}, & \theta \in [0, \gamma); \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta) \frac{K'_{\mu_k}(sc)}{K_{\mu_k}(sc)} + \\ + \sqrt{2\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k P_{\mu_k-1/2}(\cos \gamma) P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta)}{\cos \pi \mu_k \partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos \gamma) / \partial \mu} I'_{\mu_k}(sc), & \theta \in (\gamma, \pi]. \end{cases} \quad (9)$$

Тут $N = P + K$.

Застосувавши метод перерозкладу функцій Лежандра [14], вилучимо з рівнянь (8), (9) невідомі $y_p^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ і зведемо задачу до такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $N \times N$:

$$\sum_{n=1}^N x_n \frac{scW[K_{\nu_p} I_{z_n}]_{sc}}{[\nu_p^2 - z_n^2] K_{\nu_p}(sc) I_{z_n}(sc)} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, P; \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^N x_n \frac{scW[K_{\mu_k} I_{z_n}]_{sc}}{[\mu_k^2 - z_n^2] K_{\mu_k}(sc) I_{z_n}(sc)} = -\sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \frac{P_{\mu_k-1/2}(\cos \gamma)}{\cos \pi \mu_k K_{\mu_k}(sc)}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Тут $x_n = q(z_n, \gamma) \bar{x}_n$; $q(z_n, \gamma) = P_{z_n-1/2}(\cos \gamma)$; $W[f g]_x = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$.

Із множин індексів $\{\nu_p\}_{p=1}^{\infty}$ і $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ утворимо зростаючу послідовність

$$\{\xi_q\}_{q=1}^{\infty} = \{\nu_p\}_{p=1}^{\infty} \cup \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}. \quad (11)$$

Далі, у співвідношеннях (10) перейдемо до границі при $N, P, K \rightarrow \infty$ ($N = P + K$), розмістивши рівняння цієї системи у відповідності до послідовності (11). Це дозволяє отримати нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР), яка при матричному записі набуває вигляду

$$A_{11} X = F, \quad (12)$$

де $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$; A_{11} – матричний оператор,

$$A_{11} : \left\{ a_{qn} = \frac{scW[K_{\xi_q} I_{z_n}]_{sc}}{[\xi_q^2 - z_n^2] K_{\xi_q}(sc) I_{z_n}(sc)} \right\}_{q,n=1}^{\infty}; \quad (13)$$

$F = \{f_q\}_{q=1}^{\infty}$ – відомий вектор:

$$f_q = \begin{cases} 0, & \xi_q \notin \mu_k, \\ -\sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \frac{P_{\mu_k-1/2}(\cos \gamma)}{\cos \pi \mu_k K_{\mu_k}(sc)}, & \xi_q \in \mu_k. \end{cases}$$

Індекси z_n і ξ_q є відповідно зростаючими послідовностями простих дійсних додатних нулів і полюсів парної мероморфної функції

$$M(\nu, \gamma) = \frac{\cos \pi \nu}{\pi P_{\nu-1/2}(\cos \gamma) P_{\nu-1/2}(-\cos \gamma)}, \quad (14)$$

яка регулярна у смузї $\Pi : \{|\operatorname{Re} \nu| < 1/2\}$, не має тут нулів. Окрім того, $M(\nu, \gamma) = O(\nu)$ при $|\nu| \rightarrow \infty$.

Тоді оператори

$$A : \left\{ a_{qn} = \frac{1}{\xi_q - z_n} \right\}_{q,n=1}^{\infty}, \quad (15)$$

$$A^{-1} : \left\{ \tau_{kq} \right\}_{k,q=1}^{\infty}, \quad (16)$$

$$\tau_{kq} = \frac{1}{\{M_-^{-1}(\xi_q, \gamma)\}' M'_-(z_k, \gamma)(z_k - \xi_q)},$$

є регуляризуючими для НСЛАР (12) [13, 14], де $M_-(\nu, \gamma)$ – відома функція, регулярна і відмінна від нуля в області $\operatorname{Re} \nu < 1/2$. Її отримано в результаті факторизації функції (14) [14].

Виділимо з НСЛАР (12) матричний оператор (15) і, використавши обернений оператор (16), зведемо задачу до НСЛАР другого роду:

$$X = A^{-1}[A - A_{11}]X + A^{-1}F. \quad (17)$$

Єдиний розв'язок системи (17) існує в $b(\sigma) : \{\|x_n\| = \sup_n |x_n n^\sigma|, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n n^\sigma = 0\}$ при $0 \leq \sigma < 3/2$, що забезпечує виконання умов Мейкснера на краї [13].

Матричний оператор (13) – ключовий з фізичної точки зору. Він описує дифракцію плоскої хвилі на круглому краї зрізаного м'якого конуса при осьовому опроміненні. У статті [14, формула (8)] отримано оператор задачі дифракції на краї скінченного м'якого конуса. Співвідношення між цими двома операторами встановлює така теорема: “Зв'язок між матричними операторами, які описують дифракцію хвиль на круговій апертурі напівнескінченного м'якого конуса зі зрізаною вершиною та на апертурі доповнюючого скінченного конуса визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} a_{qn}^{(\text{trunc.})} &= -a_{qn}^{(\text{finite})} & (\xi_q \rightarrow z_n, z_n \rightarrow \xi_q), \\ a_{qn}^{(\text{finite})} &= -a_{qn}^{(\text{trunc.})} & (\xi_q \rightarrow z_n, z_n \rightarrow \xi_q), \end{aligned}$$

де $a_{qn}^{(\text{trunc.})}$ означено формулою (13); позначення $\xi_q \rightarrow z_n, z_n \rightarrow \xi_q$ вказують на заміну індексів”. Доведення цього твердження впливає безпосередньо з виразів для матричних елементів операторів.

5. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Усі характеристики розсіяного поля розраховувались на основі розв'язку скінченної системи рівнянь, отриманої з НСЛАР (17) методом редукції, з додатковим використанням співвідношення (4). Порядок редукції вибирали з умови $N = |kc| + q, q = (4 \dots 10)$. Для аналізу бралися діаграми спрямованості дифрагованого поля, розраховані за формулою

$$D(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} |rU(r, \theta)e^{-ikr}|.$$

Тут $U(r, \theta)$ має фізичний зміст потенціалу швидкості дифрагованого поля в області D_2 і повного поля в області D_1 .

На рис. 2, а показано вплив хвильового радіуса зрізу вершини конуса kc на амплітудні діаграми спрямованості при опроміненні плоскою звуковою хвилею з боку зрізу. Іншими словами, аналізується ситуація, коли хвиля проникає в кінчну каверну через отвір, сформований зрізом вершини. З поведінки кривих на рис. 2, а спостерігаємо формування інтенсивного випромінювання у напрямі поширення падаючої хвилі зі зростанням параметра kc . Зауважимо, що рівень цього випромінювання залежить від kc монотонно. В області D_2 максимум випромінювання дифрагованого поля формується у напрямку зворотного розсіяння ($\theta = 180^\circ$), а кутлова область $60^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$ практично “вільна” від його проникнення.

Рис. 2, б ілюструє особливості амплітудних діаграм спрямованості для випадку, коли конус опромінюється з боку основи зрізу ($\gamma = 120^\circ$) – хвиля виходить через отвір з кінчної каверни. Як і у попередньому випадку, тут зі збільшенням kc також спостерігаємо монотонне зростання поля випромінювання у напрямку падаючої хвилі ($\theta = 0^\circ$), тобто ефект “фокусування” звукового поля кінчною каверною (див. рис. 2). В області D_2 (див. рис. 2, б) максимум випромінювання формується в околі кутів спостереження, близьких до бічної поверхні конуса ($130^\circ < \theta < 140^\circ$).

Аналогічним залишається характер впливу параметра kc на форму діаграм спрямованості зрізаного конуса і при збільшенні його кута розхилу.

Для підтвердження достовірності цих результатів порівнювались амплітудні (рис. 3, а) й фазові (рис. 3, б) діаграми спрямованості, отримані нами

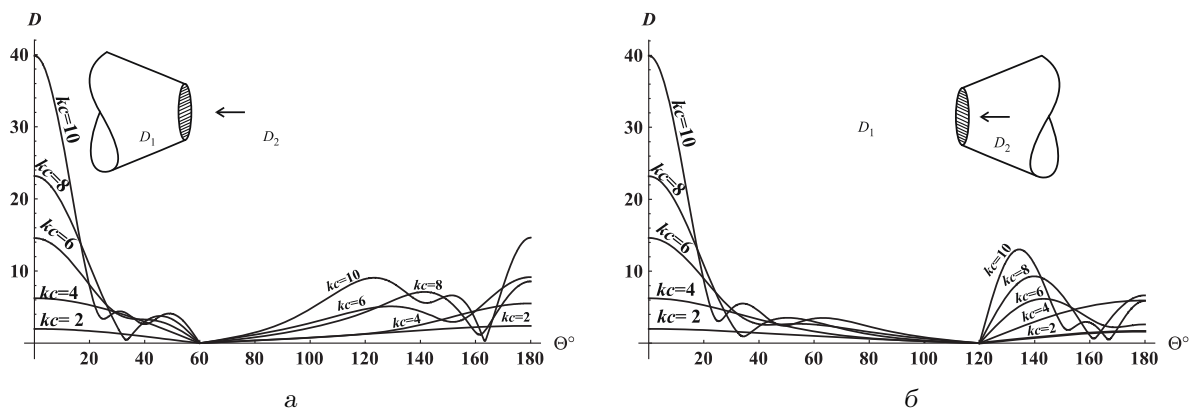


Рис. 2. Вплив параметра kc на амплітудні діаграми спрямованості:
 а – $\gamma = 60^\circ$, б – $\gamma = 120^\circ$

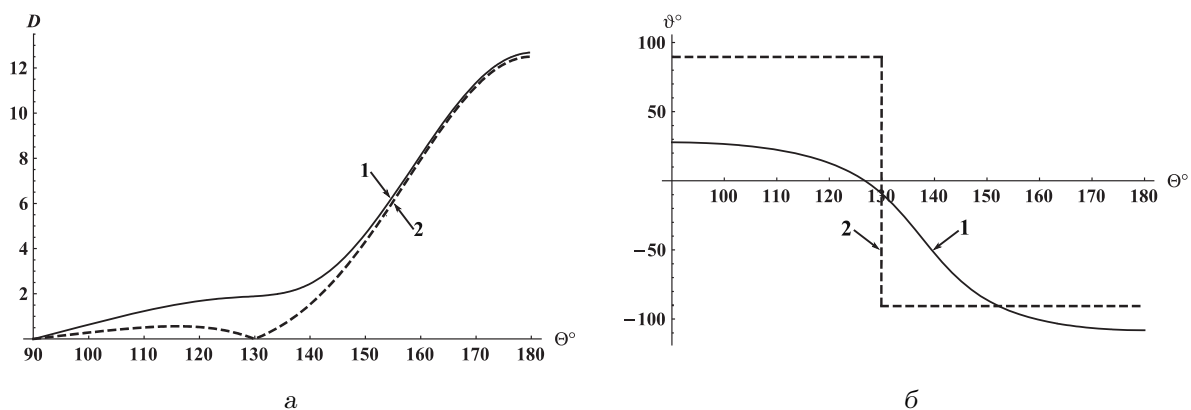


Рис. 3. Порівняння діаграм спрямованості дифрагovanого поля для м'якої апертури при $kc = 5$:
 а – амплітудні діаграми, б – фазові діаграми;
 1 – наші розрахунки при $\gamma = 90.01^\circ$, 2 – наближення Кірхгофа для жорсткого диска

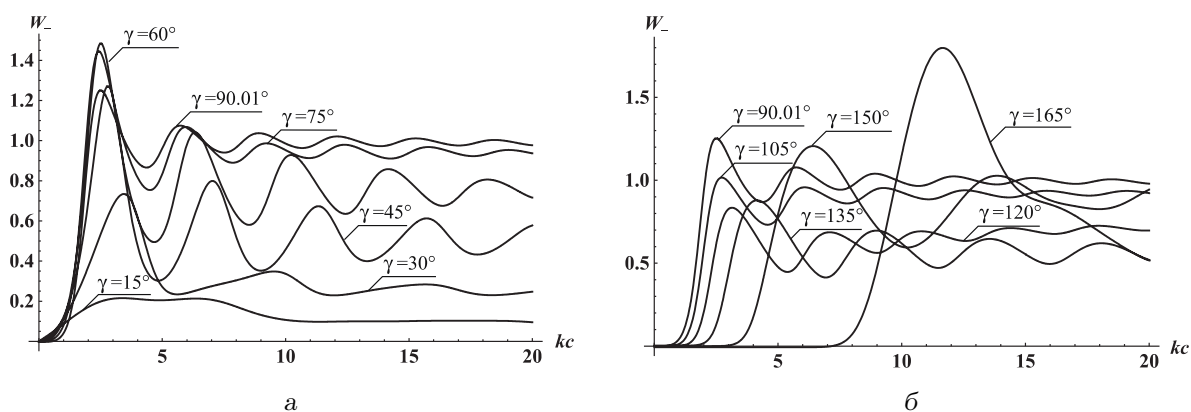


Рис. 4. Сімейство залежностей $W_-(kc)$ для різних кутів розхилу конуса γ :
 а – $\gamma \leq 90.01^\circ$, б – $\gamma \geq 90.01^\circ$

для $\gamma = 90.01^\circ$ (криві 1) і на основі методу Кірхгофа (криві 2). Зауважимо, що останні розраховано для жорсткого диска, що за теоремою Бабіне еквівалентно відповідним характеристикам для апертури у м'якій площині. Фазові діаграми визначались за формулою

$$\vartheta(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Arg} (rU(r, \theta)e^{-ikr}).$$

Криві 1, 2 на рис. 3, а демонструють хорошу взаємну відповідність в області кутів спостережень $150^\circ < \theta < 180^\circ$. Зауважимо, що, згідно з кривою 2 на рис. 3, б, прогнозується стрибок фази, який відповідає нулю амплітудної діаграми спрямованості при $\theta = 130^\circ$ (див. рис. 3, а). На відміну від цього, крива 1 на рис. 3, б характеризується монотонним зсувом фази при проходженні θ через мінімуми діаграми спрямованості.

На рис. 4 наведені залежності коефіцієнтів відбиття за потужністю [13] для різних кутів розхилу конуса. Вони обчислювались за формулою

$$W_-(kc) = \frac{\pi \sin \gamma}{2(kc)^2} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^{(2)}|^2 \times \frac{P_{\mu_k-1/2}^1(-\cos \gamma) \partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos \gamma) / \partial \mu}{\mu_k |K_{\mu_k}(sc)|^2}.$$

За своїм фізичним змістом $W_-(kc)$ визначає нормовану потужність випромінювання звукової хвилі в кутову область $\gamma < \theta < \pi$.

Як видно з поведінки кривих на рис. 4, а, залежності $W_-(kc)$ мають осцилюючий характер. Зі збільшенням кута розхилу γ при $\gamma < 90^\circ$ головний максимум $W_-(kc)$ зсувається у низькочастотну область до значень $kc \approx 2.6$. Максимальне проникнення потужності дифрагованого поля у низькочастотній області $kc \leq 2.6$ спостерігається для кутів розхилу конуса $45^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$. Зростання кута розхилу конуса γ понад 90° призводить до зсуву головного максимуму $W_-(kc)$ у високочастотну область (рис. 4, б). Максимальна амплітуда відбитої від краю енергії дифрагованого поля спостерігається для кутів $\gamma \geq 150^\circ$. При $\gamma \rightarrow \pi/2$ для великих значень kc маємо $W_-(kc) \rightarrow 1$.

На рис. 5 залежність $W_-(kc)$ при $\gamma \rightarrow \pi/2$, отриману нами (крива 1), співставлено з даними [6] для круглої апертури в м'якій площині (крива 2). Із графіків видно хорошу відповідність обох тенденцій в усій дослідженій області зміни kc . Окрім того, порівняння кривих 1 і 3 показує співпадіння наших результатів з релєївським наближенням [16] при $kc < 1$.

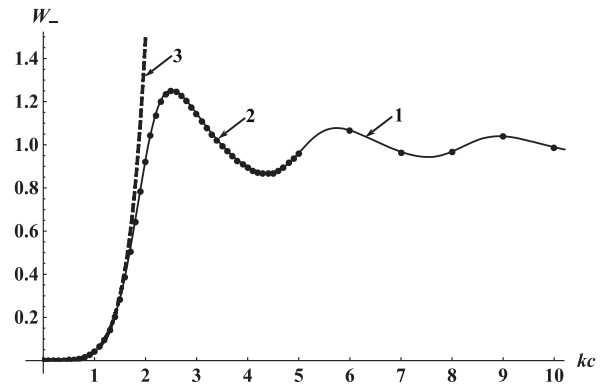


Рис. 5. Коефіцієнт відбивання (пропускання) для апертури у м'якій площині:
1 – $\gamma = 90.01^\circ$, 2 – отриманий у [6],
3 – релєївське наближення для жорсткого диска

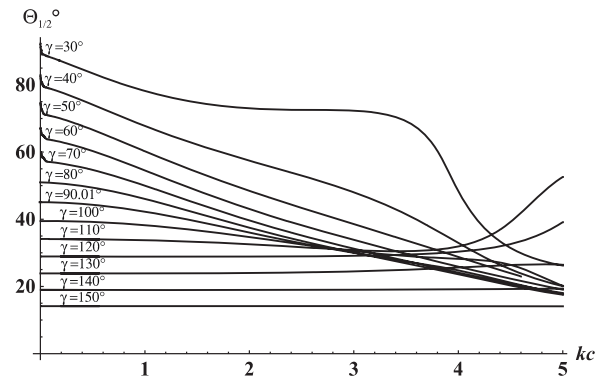


Рис. 6. Сімейство залежностей кутової ширини $\theta_{1/2}(kc, \gamma)$ головної пелюстки інтенсивності випромінювання на рівні половини амплітуди

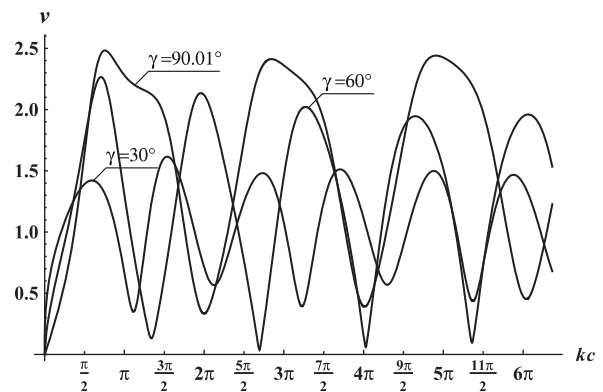


Рис. 7. Нормована залежність звукового тиску $U^{(t)}$ у центрі апертури як функція kc і γ

На рис. 6 наведені залежності кутової ширини $\theta_{1/2}(kc, \gamma)$ головної пелюстки на рівні половини інтенсивності випромінювання $[D(\theta_{1/2})]^2$ як функції хвильового радіуса зрізу конуса kc , розраховані для діапазону кутів розхилу конуса $30^\circ \leq \gamma \leq 150^\circ$. Криві, показані на рис. 6, дозволяють встановити радіус апертури при відомому куті розхилу за умови $\gamma < 90^\circ$ і $c < \lambda/2$. Для значень $\gamma > 90^\circ$, які відповідають випадку розташування джерела опромінення в кінчній каверні, величина $\theta_{1/2}(kc, \gamma)$ практично не залежить від kc , тобто визначення радіусу отвору за цією характеристикою стає практично неможливим. Таким чином, для визначення радіусу отвору каверни необхідно опромінювати конус зі сторони зрізу.

У якості локальної характеристики було досліджено залежність повного поля у точці $r=0$ від радіусу зрізу kc , визначену за формулою

$$v(kc) = \left| \frac{U^{(t)}(r)}{U_0(r)} \right|_{r=0} = \left| \frac{\sqrt{sc}}{\text{sh}(sc)} \bar{x}_1 \right|.$$

Відповідні криві наведено на рис. 7. Для їхньої поведінки характерна періодична зміна максимумів і мінімумів $v(kc)$. При $\gamma \rightarrow \pi/2$ максимуми розташовуються в околі $kc \rightarrow (2m-1)\pi$, а мінімуми – поблизу $kc \rightarrow 2m\pi$ ($m=1, 2, \dots$). Це свідчить про утворення зон Френеля. Відхилення γ від $\pi/2$ призводить до порушення цієї тенденції. При цьому зі зменшенням γ відбувається як зниження рівнів максимумів $v(kc)$, так і зменшення їхньої глибини. Зауважимо, що для жорсткого скінченного конуса справедливо $v(kc)=1$ при $k \rightarrow 0$ [17].

ВИСНОВКИ

Із застосуванням метода розкладу потенціалу швидкості в ряди за власними функціями підобластей сумісно з методами спряження полів і аналітичної регуляризації задачу дифракції поля плоскої звукової хвилі на м'якому напівнескінченному конусі зі зрізаною вершиною при осьовому його опроміненні зведено до НСЛАР другого роду, розв'язок якої забезпечує виконання усіх необхідних умов і знаходиться методом редукції із заданою точністю.

Отримано числовий розв'язок НСЛАР і досліджено характеристики розсіяння для напівнескінченного м'якого конуса у широкому діапазоні зміни геометричних параметрів і частоти. Виявлено ефект “фокусування” звукового поля кінчною каверною у напрямі опромінення. Встановлено, що поведінка ближнього поля у центрі круглої апертури ($\gamma \rightarrow \pi/2$) призводить до формування періо-

дичних зон Френеля з різницею ходу π . Встановлені закономірності зсуву екстремумів зон Френеля зі зміною кута γ .

Показано можливість визначення радіусу кругових апертур ($c < \lambda/2$) для конусів з $\gamma < 90^\circ$ за значеннями вимірюваної ширини інтенсивності випромінювання на рівні половини амплітуди. При цьому мають використовуватись дані одночастотного зондування, коли відомі частота і кут розхилу апертури.

Достовірність отриманих результатів ілюструється порівнянням діаграм спрямованостей і коефіцієнтів відбиття для конусів при $\gamma \rightarrow \pi/2$ і кругових апертур, отриманих незалежними методами.

1. Obermüller C., Karrai K. Far field characterization of diffracting circular apertures // Appl. Phys. Lett.– 1995.– **67**, № 23.– P. 3408–3410.
2. Куриляк Д. Б., Лисечко В. О. Дифракція плоскої акустичної хвилі на скінченному жорсткому конусі при осьовому опроміненні // Акуст. вісн.– 2013–2014.– **16**, № 2.– С. 8–17.
3. Куриляк Д. Б. Осесимметричное поле электрического диполя над полубесконечным конусом с усеченной вершиной I. Сопоставление метода рядов и метода интегральных преобразований // Радиофиз. радиоастрон.– 1999.– **4**, № 2.– С. 121–128.
4. Куриляк Д. Б. Осесимметричное поле электрического диполя над полубесконечным конусом с усеченной вершиной II. Численное моделирование // Радиофиз. радиоастрон.– 2000.– **5**, № 3.– С. 284–290.
5. Spence R. D. The diffraction of sound by circular disks and apertures // J. Acoust. Soc. Amer.– 1948.– **20**, № 4.– P. 380–386.
6. Bouwkamp C. J. Theoretical and numerical treatment of diffraction through a circular aperture // IEEE Trans. Antennas Propag.– 1970.– **18**, № 2.– P. 152–176.
7. Spence R. D. A note on the Kirchhoff approximation in diffraction theory // J. Acoust. Soc. Amer.– 1949.– **21**, № 2.– P. 98–100.
8. Levine H., Schwinger J. On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. I // Phys. Rev.– 1948.– **74**, № 8.– P. 958–974.
9. Levine H., Schwinger J. On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. II // Phys. Rev.– 1949.– **75**, № 9.– P. 1423–1432.
10. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции.– М.: Мир, 1964.– 428 с.
11. Keller J. B. Diffraction by an aperture // J. Appl. Phys.– 1957.– **28**, № 4.– P. 426–444.
12. Bekefi G. Diffraction of sound waves by a circular aperture // J. Acoust. Soc. Amer.– 1953.– **25**, № 2.– P. 205–211.
13. Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на кінчних і клиноподібних поверхнях.– К.: Наук. думка, 2006.– 280 с.
14. Куриляк Д. Б., Лисечко В. О. Дифракція плоскої акустичної хвилі на скінченному м'якому конусі при осьовому опроміненні // Акуст. вісн.– 2013–2014.– **16**, № 3.– С. 23–30.

15. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацьпура В. Т. Волновые задачи акустики.– К.: Интерсервис, 2013.– 572 с.
16. Bowman J. J., Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E., Asvestas J. S. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes.– Amsterdam: North-Holland, 1969.– 728 p.
17. Куриляк Д. Б., Лисечко В. О. Дифракція плоскої акустичної хвилі на скінченному м'якому (жорсткому) конусі при осьовому опроміненні // 5-та міжнар. конф. "Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій".– Львів, 2014.– С. 85–90.