

УДК 534.23

ОСОБЕННОСТИ ПРОХОЖДЕНИЯ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ОКРУГЛЕННЫЙ ИЗГИБ ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА

И. В. ВОВК¹, В. Т. МАЦЫПУРА^{2*}, А. А. ТРУНОВ²

¹Институт гидромеханики НАН Украины
ул. Желябова, 8/4, 03680, ГСП, Киев-180, Украина

²Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
ул. Владимирская, 64/13, 01601, ГСП, Киев, Украина

*E-mail: mnivtt@gmail.com

Получено 06.06.2014

Рассмотрена задача о распространении гармонической волны в плоском волноводе со скругленным изгибом, волновые размеры которого сравнимы с длиной волны, а угол поворота равен 90° . Исследовано влияние ширины волновода и радиуса изгиба на энергетический коэффициент прохождения волной области неоднородности. Рассмотрена задача о прохождении импульсного сигнала в изогнутом волноводе постоянной ширины.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: изогнутый волновод, коэффициент прохождения, нормальная мода, метод частичных областей

Розглянуто задачу про поширення гармонічної хвилі у плоскому хвилеводі з заокругленим вигином, розміри якого зрівнянні з довжиною хвилі, а кут повороту дорівнює 90° . Досліджено вплив ширини хвилеводу й радіуса вигину на енергетичний коефіцієнт проходження хвилею області неоднорідності. Розглянуто задачу про поширення імпульсного сигналу у вигнутому хвилеводі сталої ширини.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: зігнутий хвилевід, коефіцієнт проходження, нормальна мода, метод часткових областей

The paper deals with a problem on a harmonic wave propagation in plane waveguide with a rounded bent having the dimensions comparable with the wave length and bending angle of 90° . An influence of waveguide's width and bending radius on the energy coefficient of wave transmission through the inhomogeneity domain is studied. A problem on pulse signal propagation in the bended waveguide with a constant width is considered.

KEY WORDS: bended waveguide, transmission coefficient, normal mode, method of partial domains

ВВЕДЕНИЕ

Нерегулярные волноводы находят широкое применение в акустических и радиоэлектронных устройствах (см., например, [1–3] и библиографию в них). Среди различных нерегулярностей, которые могут присутствовать в волноводах, выделим класс неоднородностей, связанных с изменением их геометрии при неизменных параметрах среды, заполняющей волновод. Теория таких волноводов при условии, что они являются одномодовыми, изложена в статье [4]. Если отношение характерного размера волновода к длине волны достаточно велико (скажем, больше пяти), то при исследовании взаимодействия волны с его неоднородностью можно использовать методы геометрической теории дифракции. Теоретическое описание волноводных систем с неоднородностями, характерный размер которых сравним с длиной волны, развито значительно слабее. Причина этого – в объективных трудностях, возникающих при построении строгого решения соответствующих

этих граничных задач. Следует заметить, что этот диапазон изменения волновых размеров “... богат различными волноводными эффектами, порой неожиданными и имеющими практическую ценность” [1]. Большое внимание исследованию подобных задач (в основном, с применением интегральных методов) уделяли специалисты в области электродинамики. Здесь следует особо отметить статью [5] и монографию [1], в которых рассматривалась постановка соответствующих граничных задач и обсуждались трудности их решения.

В данной статье анализируется распространение волны в волноводе, изогнутом под прямым углом, при различных вариантах конструктивного решения зоны изгиба. Характерные размеры волновода выбирались сравнимыми с длиной волны.

1. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

На рис. 1 показаны четыре варианта плоского волновода, изогнутого под прямым углом. Геометрию системы, соответствующей рис. 1, а, будем

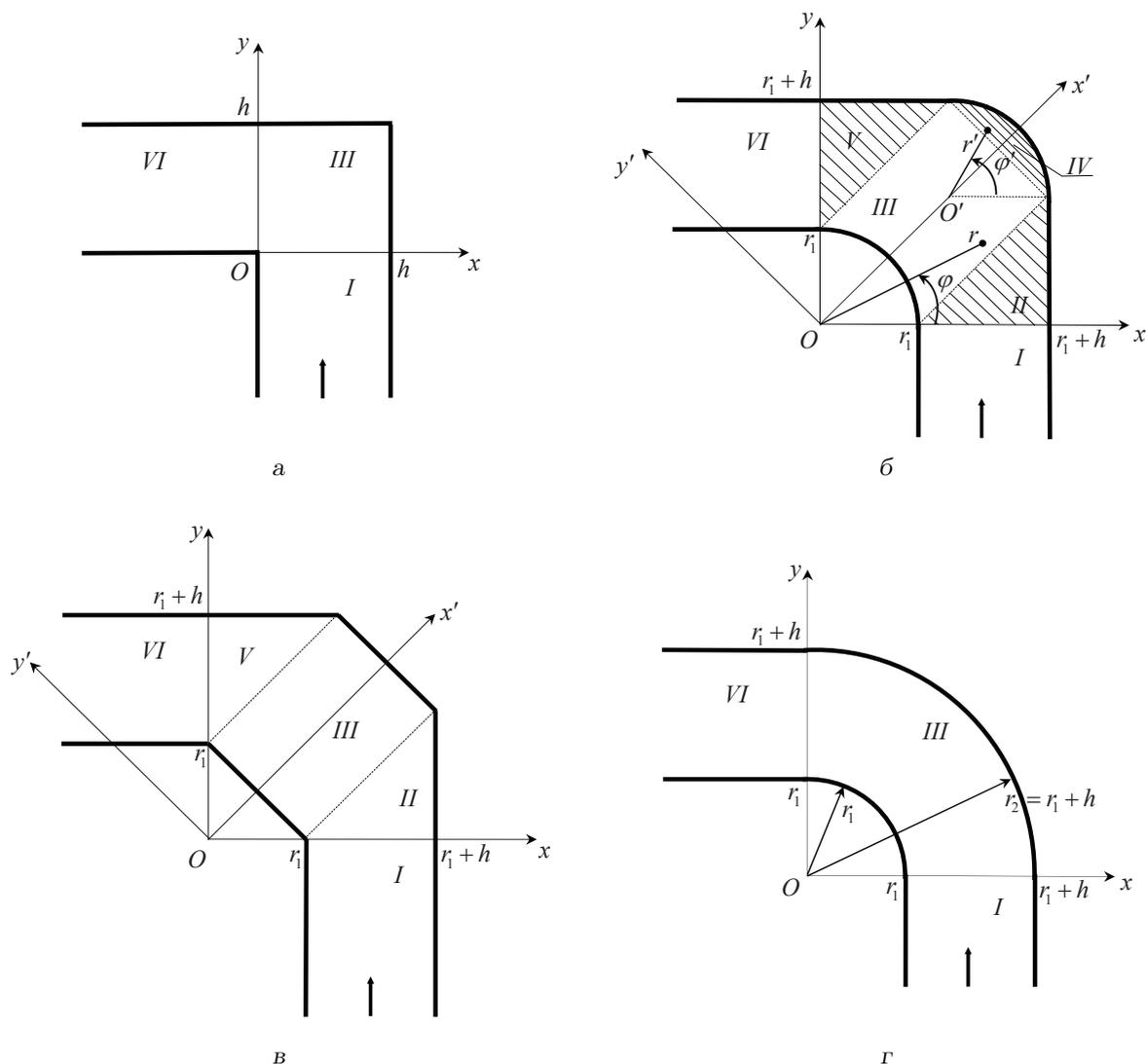


Рис. 1. Варианты геометрии волновода с изгибом

называть “волноводом с изломом”. На рис. 1, б показан волновод, у которого места изломов скруглены, причем оба радиуса скругления одинаковы. Его естественно обозначить как “волновод со скруглением”. На рис. 1, в изображен так называемый “волновод со срезами”. Следует отметить, что характерная черта последних двух волноводов – изменение их поперечного размера в области скругления или излома. Наконец, на рис. 1, г представлен вариант скругления излома волновода, при котором его ширина на всем протяжении остается неизменной. Будем называть его “волноводом со скруглением постоянной ширины”.

Поверхности волновода полагаем акустически жесткими. Ограниченная ими область заполнена идеальной жидкостью с плотностью ρ и скоростью

звука c . Известно, что формально такая постановка и решение задачи (с точностью до необходимой замены параметров, определяющих волновое поле) полностью соответствует твердотельному волноводу при распространении в нем SH-волн.

Волновод типа рис. 1, а детально исследован в работе [6]. Исходя из этого, представляется важным, определив решения поставленной задачи для второго, третьего и четвертого волноводов (см. рис. 1, б–г), сравнить их акустические характеристики с характеристиками простейшего волновода с изломом.

Для описания геометрии системы и построения решения задачи о распространении гармонической волны в волноводе, представленном на рис. 1, б, введем четыре системы координат – две декарто-

вы (x, y) , (x', y') и полярную (r, φ) с общим центром в точке O , а также полярную систему координат (r', φ') с центром в точке O' . Радиусы скругления внутренней (точка O) и внешней (точка O') частей изгиба одинаковы (обозначим их величину через r_1). Ширина плоских волноводов, примыкающих к области поворота, равна h . Именно h и r_1 и являются исходными величинами, задающими геометрию волновода.

Решение задачи строится на базе метода частных областей [7]. Для этого вся область существования звукового поля разбивается на шесть подобластей: I и VI – плоскопараллельные волноводы, II, III, IV, V – фрагменты зоны изгиба. Геометрия границ указанных подобластей легко определяется из рис. 1, б.

Пусть в области I в положительном направлении оси Oy распространяется s -ая мода плоскопараллельного волновода $p_0^{(s)} = \cos(\alpha_s(x-r_1)) \exp(i\gamma_s y)$. Тогда поля давления в областях I и VI можно записать через суперпозицию соответствующих мод плоскопараллельного волновода, ограниченного акустически жесткими поверхностями:

$$p_I = \cos(\alpha_s(x-r_1)) \exp(i\gamma_s y) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \cos(\alpha_n(x-r_1)) \exp(-i\gamma_n y), \quad (1)$$

$$p_{VI} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(6)} \cos(\alpha_n(y-r_1)) \exp(-i\gamma_n x). \quad (2)$$

Здесь

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{h}; \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}; \quad k = \frac{\omega}{c};$$

ω – циклическая частота. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен.

Поля в областях II и V запишем как

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(21)} \cos(\alpha_n(x-r_1)) \exp(i\gamma_n y) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(22)} \cos(\alpha_n y) \exp(-i\gamma_n(x-(r_1+h))) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(23)} \cos(\beta_n(x'-a)) \exp(-i\eta_n(y'+a)), \quad (3)$$

$$p_V = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(51)} \cos(\alpha_n(y-r_1)) \exp(i\gamma_n x) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(52)} \cos(\alpha_n x) \exp(-i\gamma_n(y-(r_1+h))) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(53)} \cos(\beta_n(x'-a)) \exp(i\eta_n(y'-a)), \quad (4)$$

где $\beta_n = n\pi/H$; $\eta_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2}$. Геометрические размеры границ соответствующих зон определяются величинами $H = \sqrt{2}h$ и $a = r_1/\sqrt{2}$. Каждая из бесконечных сумм в выражениях (3) и (4) представляет собой ряд Фурье с соответствующим набором функций типа косинуса. Последние обладают полнотой и ортогональностью на скошенных линейных участках границ областей II и V, что и позволяет удовлетворить на них произвольные условия.

Границы областей III и IV содержат криволинейные участки, поэтому поля давления в этих областях имеют вид

$$p_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(31)} \cos(\beta_n(x'-a)) \exp(i\eta_n(y'+a)) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(32)} \cos(\beta_n(x'-a)) \exp(-i\eta_n(y'-a)) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(33)} \cos(\chi_n(y'+a)) \times \exp(-i\mu_n(x'-(a+H))) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(34)} \cos(2n\varphi) \frac{H_{2n}^{(1)}(kr)}{H_{2n}^{(1)'}(kr_1)}, \quad (5)$$

$$p_{IV} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(41)} \cos(\chi_n(y'+a)) \times \exp(i\mu_n(x'-(a+H))) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(42)} \cos(2n\varphi') \frac{J_{2n}(kr')}{J_{2n}'(kr_1)}, \quad (6)$$

где $\chi_n = n\pi/(2a)$; $\mu_n = \sqrt{k^2 - \chi_n^2}$; $J_{2n}(kr)$ и $H_{2n}^{(1)}(kr)$ – функции Бесселя и Ханкеля первого рода соответственно (штрих при этих функциях означает производную по полному аргументу). Ряды в выражениях (5) и (6), содержащие функции Бесселя и Ханкеля, обеспечивают выполнение граничных условий на криволинейных поверхностях областей III и IV.

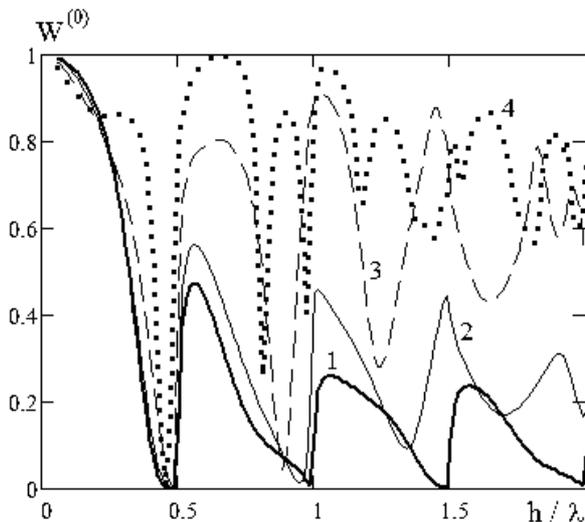


Рис. 2. Частотные характеристики коэффициента прохождения $W^{(0)}$ для волновода с изломом и скруглением:

$$1 - r_1/h=0.06, \quad 2 - r_1/h=0.3, \\ 3 - r_1/h=0.6, \quad 4 - r_1/h=1$$

Для волновода со срезами (см. рис. 1, в) область IV отсутствует, а криволинейная граница области III заменяется линейным участком. При этом вместо четвертой суммы в формуле (5) следует записать суперпозицию мод соответствующего плоскопараллельного волновода.

Для скругленного волновода постоянной ширины (см. рис. 1, г) переходная зона между двумя плоскопараллельными волноводами формируется одной областью III, в которой поле давления представляет собой сумму четырех бесконечных рядов:

$$p_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\alpha_n(x - r_1)) \exp(i\gamma_n y) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\alpha_n(y - r_1)) \exp(i\gamma_n x) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(2n\varphi) \frac{J_{2n}(kr)}{J'_{2n}(kr_2)} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(2n\varphi) \frac{Y_{2n}(kr)}{Y'_{2n}(kr_1)}, \quad (7)$$

где $r_2=r_1+h$, $Y_{2n}(kr)$ – функция Неймана. Первые две суммы в формуле (7) позволят удовлетворить условия сопряжения полей на границах частичных областей I, III и III, VI. Помимо них, необходимо удовлетворить граничные условия на жестких поверхностях криволинейной области III:

$r=r_1, \varphi=[0, \varphi_0]$ и $r=r_2, \varphi=[0, \varphi_0]$. За это и отвечают третья и четвертая суммы, поскольку набор функций $\cos(2n)$, $n=0, 1, 2, \dots$ обладает полнотой и ортогональностью на отрезке $\varphi=[0, \pi/2]$.

Для решения задачи о распространении волны в волноводе следует расписать условия сопряжения звуковых полей на границах выделенных частичных областей, представляющие собой равенства давлений и нормальных скоростей. Воспользовавшись свойством ортогональности соответствующих наборов функций, приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов в выражениях для полей в частичных областях. Бесконечная система уравнений решалась методом редукции. Достоверность полученного решения гарантировалась выполнением условий сопряжения полей на границах частичных областей и контролем над выполнением закона сохранения энергии. Указанная процедура была неоднократно и детально описана в монографии [7].

Большое значение имеет исследование энергетических характеристик процесса распространения волны в волноводе с изгибом. Энергетический коэффициент прохождения $W^{(s)}$ определяется как отношение среднего потока мощности волны в области VI к среднему потоку мощности s -ой моды $p_0^{(s)}$ в области I. После ряда преобразований формула для него принимает вид [6, 7]:

$$W^{(s)} = \sum_{n=0}^{N_6} W_n^{(s)}, \quad (8)$$

где

$$W_n^{(s)} = |A_n^{(6)}|^2 \frac{\varepsilon_n \mathbf{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_s \mathbf{Re}(\gamma_s)}, \quad (9) \\ \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0.5 & \text{при } n > 0. \end{cases}$$

Согласно соотношениям (8) и (9), коэффициент прохождения $W^{(s)}$ представляется в виде суммы энергетических коэффициентов возбуждения $W_n^{(s)}$ нормальных волн в области VI. Иными словами, о выражении (8) можно говорить как о сумме коэффициентов трансформации s -ой нормальной волны области I в соответствующую нормальную волну области VI. Как следует из формулы (9), число слагаемых N_6 в ней равно количеству распространяющихся волн области VI (для них $\mathbf{Re}(\gamma_n) \neq 0$). Аналогично, коэффициент отражения $V^{(s)}$, определяемый как отношение среднего потока мощности в отраженной волне к средне-

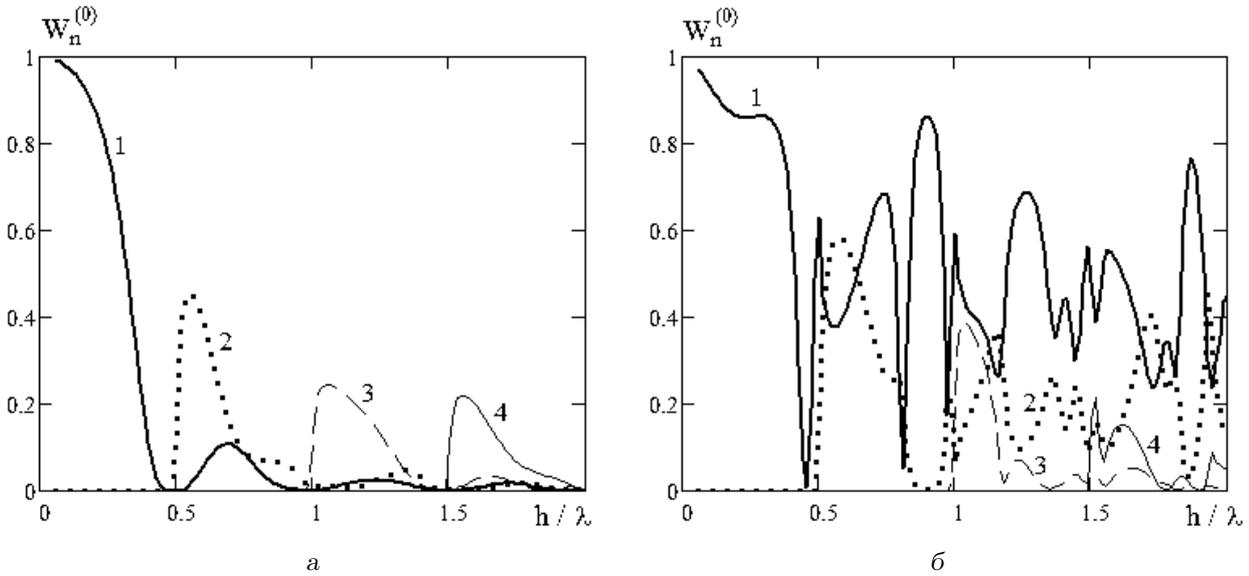


Рис. 3. Частотные характеристики коэффициентов возбуждения нормальных волн области VI $W_n^{(0)}$ для волноводов с изломом и скруглением:
 а – $r_1/h=0.06$, б – $r_1/h=1$

му потоку мощности s -ой нормальной волны области I, представляется следующим образом:

$$V^{(s)} = \sum_{n=0}^{N_1} V_n^{(s)}, \quad (10)$$

$$W_n^{(s)} = |A_n^{(1)}|^2 \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_s \operatorname{Re}(\gamma_s)}.$$

Из закона сохранения энергии вытекает необходимость выполнения условия $V^{(s)} + W^{(s)} = 1$.

2. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть на изгиб волновода набегают нулевая мода ($s=0$) области I. На рис. 2 показаны зависимости коэффициента прохождения $W^{(0)}$ для волновода с изломом и волновода со скруглением. Следует отметить, что при малом радиусе скругления (в нашем случае $r_1/h=0.06$ для кривой 1) расчетные кривые для волноводов с изломом и скруглением совпадают с графической точностью. При увеличении радиуса скругления (кривые 2–4) среднее значение коэффициента прохождения увеличивается, однако сохраняется изрезанность частотной характеристики.

При $h \ll \lambda$, вне зависимости от радиуса скругления изгиба волновода, коэффициент прохождения $W^{(0)}$ равен единице, что соответствует распространению звука в “... очень узкой трубе. В такой

трубе волна распространяется, не замечая изломов также как, если бы труба была вытянута в прямую линию” [8, с. 168].

Обращает на себя внимание наличие резкого провала в характеристиках коэффициента прохождения $W^{(0)}$ вплоть до нулевого значения в районе величины $h/\lambda=0.5$ (рис. 2). Для волновода с изломом (кривая 1) при h , кратном половине длины волны $\lambda/2$, получаем нулевые значения коэффициента прохождения $W^{(0)}$.

Для лучшего понимания характера кривых, представленных на рис. 2, обратимся к частотным зависимостям коэффициентов возбуждения нормальных волн $W_n^{(0)}$ в области прохождения. На рис. 3 показаны коэффициенты возбуждения первых нормальных волн области VI (номер кривой соответствует номеру нормальной волны) при падении на излом нулевой моды в области I. Заметим, что нулевая мода будет распространяющейся при любом волновом размере волновода с жесткими границами. Для области VI нормальная волна с номером $n > 0$ – распространяющаяся при условии, что $h > n\lambda/2$. В этом случае средний поток мощности в ней не равен нулю. Графики показывают, что если волновой размер $h/\lambda < 0.5$, то в области VI распространяется только нулевая нормальная волна (кривая 0), которая и определяет прохождение плоской волны (нулевой моды) области I через изгиб волновода. При $h/\lambda > 0.5$ ситуация качественно меняется. Так, для волновода с

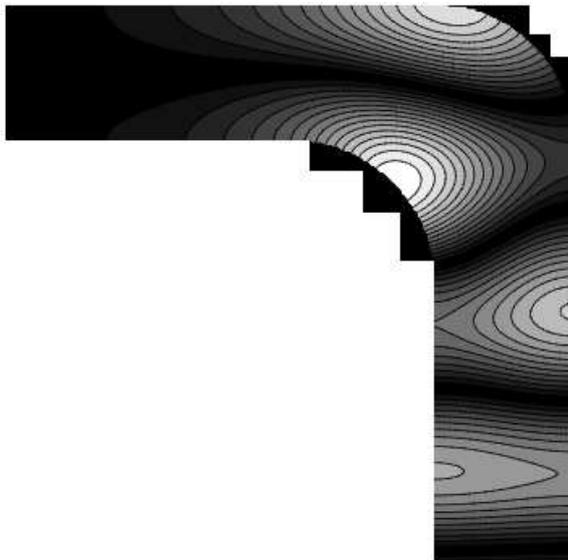


Рис. 4. Поле амплитуды давления в окрестности изгиба скругленного волновода при $r_1/h=1$, $h/\lambda=0.453$, набегает нулевая мода ($s=0$)

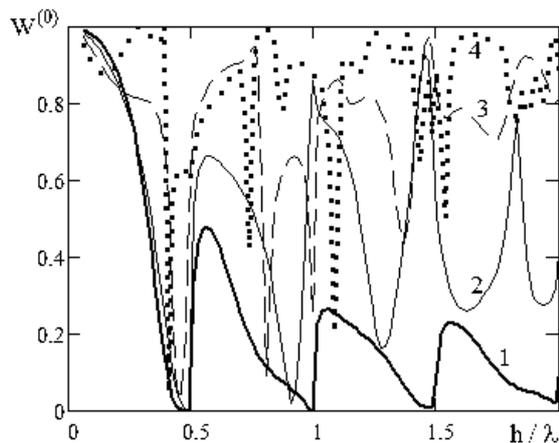


Рис. 5. Частотные характеристики коэффициента прохождения $W^{(0)}$ для волновода со срезами (рис. 1, в):
 1 – $r_1/h=0.06$, 2 – $r_1/h=0.3$,
 3 – $r_1/h=0.6$, 4 – $r_1/h=1$

изломом (см. рис. 3, а) при $h/\lambda > 0.5$ возбуждается первая нормальная волна (кривая 1), которая по величине значительно превосходит нулевую, при $h/\lambda > 1$ доминирует уже вторая нормальная волна (кривая 2), далее вступают более высокие моды. Таким образом, можно говорить о трансформации энергии нулевой моды области I в нормаль-

ные волны области VI с номерами $n > 0$. В точках частотного диапазона, где величина h кратна половине длины волны, коэффициенты возбуждения мод, а следовательно, и коэффициенты прохождения, равны нулю, т. е. наблюдается эффект “запирания” волновода. Очевидно, что для волноводов с изломом или малым радиусом скругления “запирание” тесно связано с моментом зарождения очередной нормальной волны волновода (см., например, кривую 1 на рис. 2).

При увеличении радиуса скругления изгиба волновода характер зависимостей, представленных на рис. 3, а, меняется. Постепенно, начиная с высоких частот, пропадают нулевые значения коэффициентов возбуждения мод в окрестностях точек, для которых h кратно половине длины волны λ . Эффект запирания проявляется лишь при $h/\lambda = 0.5$. В качестве примера на рис. 3, б показаны соответствующие графики для большего радиуса скругления – $r_1/h = 1$. Как видно, при $h/\lambda > 0.5$ здесь наблюдается сильная неравномерность частотных характеристик энергетических коэффициентов возбуждения мод области VI.

В качестве иллюстрации этого на рис. 4 показано поле амплитуды давления при $r_1/h = 1$, $h/\lambda = 0.453$. Указанная ситуация соответствует запиранию волновода (см. рис. 3, а), т. е. коэффициент отражения равен единице и, как следствие, в области I образуется стоячая волна. В поперечном сечении области VI формируется распределение давления, соответствующее первой моде, но поскольку при данном значении h/λ она остается неоднородной, то и поток энергии равен нулю.

На рис. 5 показаны частотные характеристики коэффициента прохождения $W^{(0)}$ для волновода со срезами (рис. 1, в). Сравнивая рис. 3, а и 5, можно отметить общность в поведении соответствующих кривых. При этом неравномерность в частотных характеристиках для волновода со срезами проявляется еще сильнее.

Обратимся к скругленному волноводу постоянной ширины h (см. рис. 1, г). Здесь через r_1 обозначен внутренний радиус скругления, а внешний радиус скругления $r_2 = r_1 + h$. На рис. 6 показаны частотные характеристики коэффициента прохождения $W^{(0)}$ (кривая 1) и коэффициентов возбуждения нормальных волн области VI $W_n^{(0)}$. Сразу отметим, что, в отличие от остальных конфигураций (см. зависимости, представленные на рис. 3), волновод постоянной ширины во всем рассмотренном частотном диапазоне практически звукопрозрачен. Однако, как следует из рис. 6, модовая структура поля в области VI существенно зави-

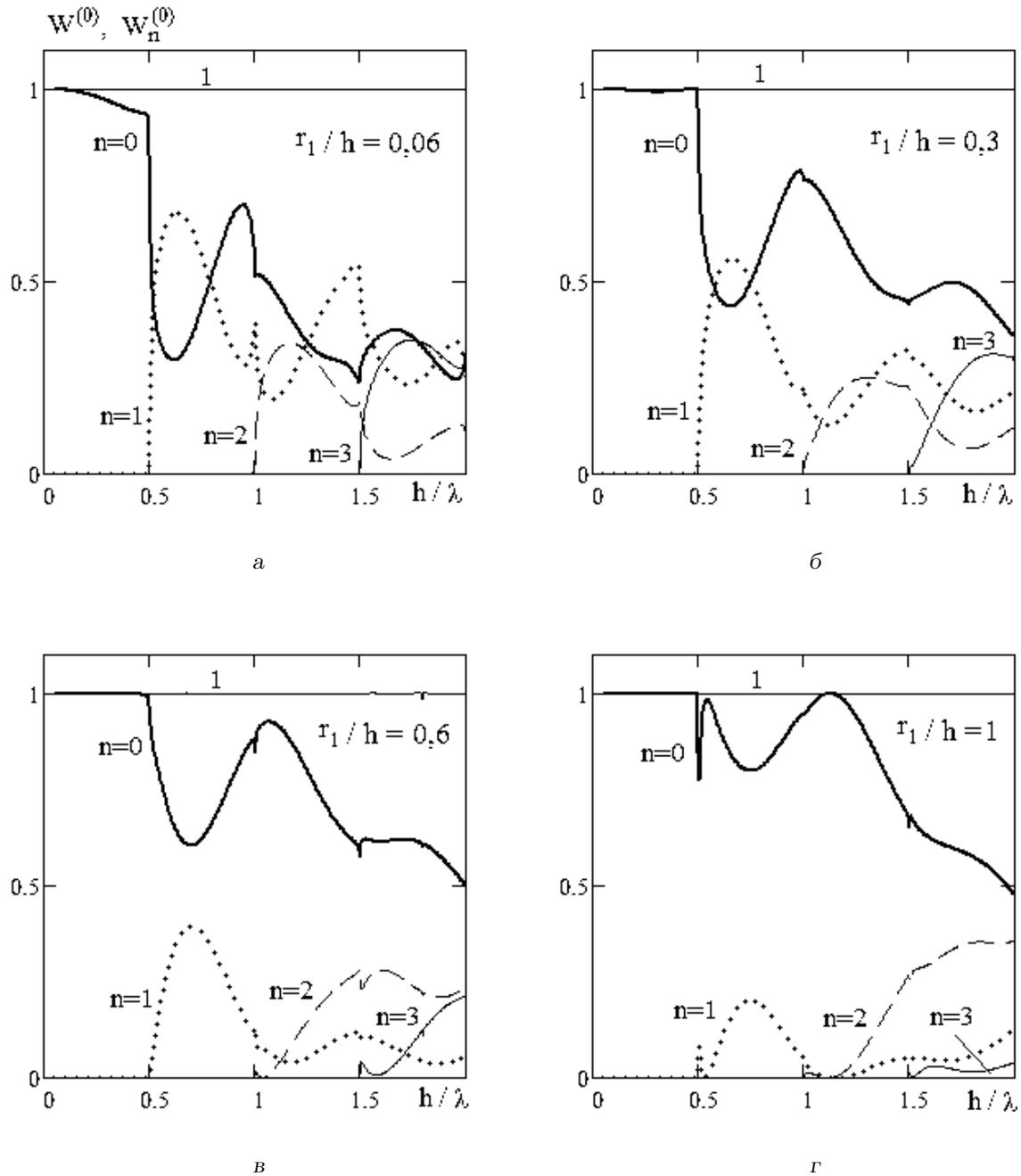


Рис. 6. Частотные характеристики коэффициента прохождения $W^{(0)}$ (кривая 1) и коэффициентов возбуждения нормальных волн области VI $W_n^{(0)}$ для скругленного волновода постоянной ширины при разных значениях r_1/h

сит от геометрических параметров волновода, т. е. от отношения радиуса скругления к ширине волновода r_1/h , а также волновой ширины волновода h/λ . Сравнивая рис. 3 и 6, укажем как на наличие некоторых сходных черт, так и на существенные отличия. Например, в характеристиках волноводов можно выделить частотные диапазоны, где

доминирует одна из мод. При этом в скругленном волноводе постоянной ширины не наблюдается эффекта “запирания”. Как видно из рис. 6, с ростом отношения r_1/h доминирование нулевой моды проявляется сильнее.

В качестве иллюстрации к сказанному приведем картины полей амплитуды давления в окрестно-

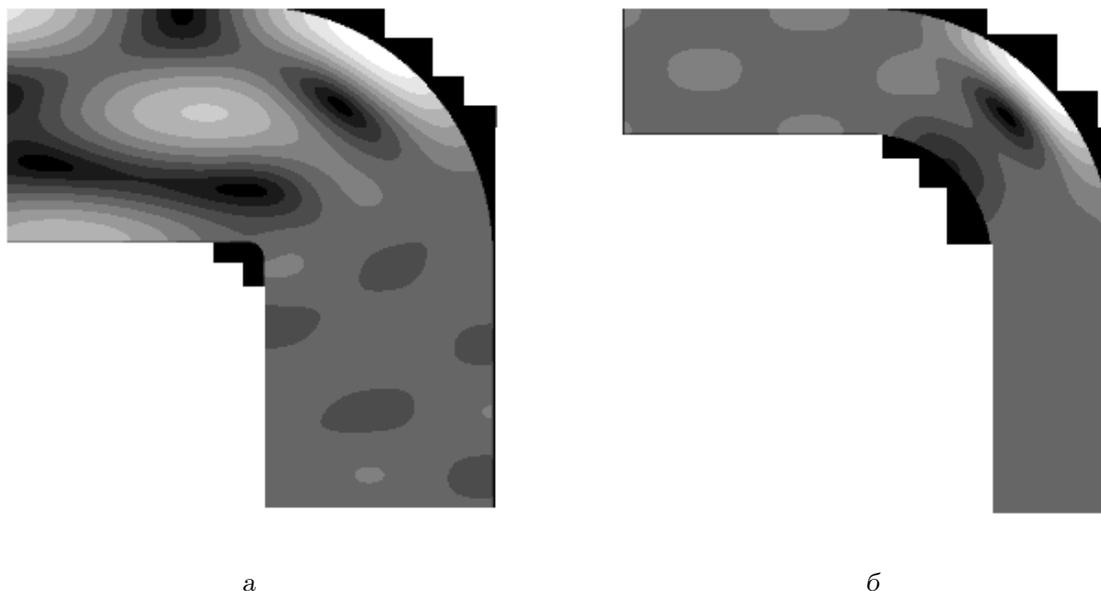


Рис. 7. Поля амплитуды давления в окрестности изгиба волновода со скруглением постоянной ширины, $h/\lambda=1.15$:
 а – $r_1/h=0.06$, б – $r_1/h=1$

сти изгиба волновода постоянной ширины (рис. 7). Здесь на неоднородность набегают нулевая мода, а волновая ширина составляет $h/\lambda=1.15$ (в этом случае присутствуют три однородные моды). Как видно из рис. 7, а ($r_1/h=0.06$), за поворотом произошла существенная реструктуризация поля вследствие того, что все три однородные моды – энергонесущие (см. рис. 6). Напротив, увеличение радиуса скругления до $r_1/h=1$ (рис. 7, б) приводит к тому, что структура поля набегающей волны за изгибом практически не меняется: здесь доминирует нулевая мода. При этом поток энергии в криволинейной области “прижимается” к поверхности с радиусом r_2 , обходя зону пониженного давления.

Очевидно, что изменение структуры поля за изгибом по сравнению с набегающей плоской волной должно повлиять на прохождение импульсного сигнала в таком волноводе. При распространении акустического импульса его пространственно-временная структура подвергается со стороны волновода воздействию, в основе которого лежат два основных механизма. Один из них обусловлен тем, что рассматриваемая система является фильтром, поскольку на частотах ниже критической каждая нормальная волна становится неоднородной. Другой механизм определяется дисперсией волн, распространяющихся в волноводе.

Ясно, что наличие эффективного решения для

гармонического сигнала позволяет построить решение нестационарной задачи [7]. Пусть временная зависимость исходного импульсного сигнала имеет вид бесконечной последовательности отрезков синусоиды

$$p_0(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_1, \\ 0, & \text{при } \tau_1 \leq t \leq T_1, \end{cases} \quad (11)$$

где ω_0 – частота несущей на временном промежутке длительности импульса τ_1 ; T_1 – период следования импульсов. Введем параметры, которые широко используются в импульсной технике, а именно: скважность $q=T_1/\tau_1$ и количество $N=\tau_1/T_0$ периодов T_0 несущей частоты $\omega_0=2\pi/T_0$.

Представим сигнал (11) в виде ряда Фурье:

$$p(t) = \sum_{s=1}^{\infty} [a_s \cos(\omega_s t) + b_s \sin(\omega_s t)], \quad (12)$$

где коэффициенты a_s и b_s определяются известными формулами. Величины $p_s = \sqrt{a_s^2 + b_s^2}$ имеют смысл амплитуд отдельных гармонических составляющих. Частоты гармоник $\omega_s = 2\pi f_s = s\omega_1 = s\Omega_1$, $s=1, 2, 3, \dots$ кратны частоте следования импульсов $\Omega_1=2\pi/T_1$. Постоянная составляющая ($s=0$) в ряде (12) отсутствует.

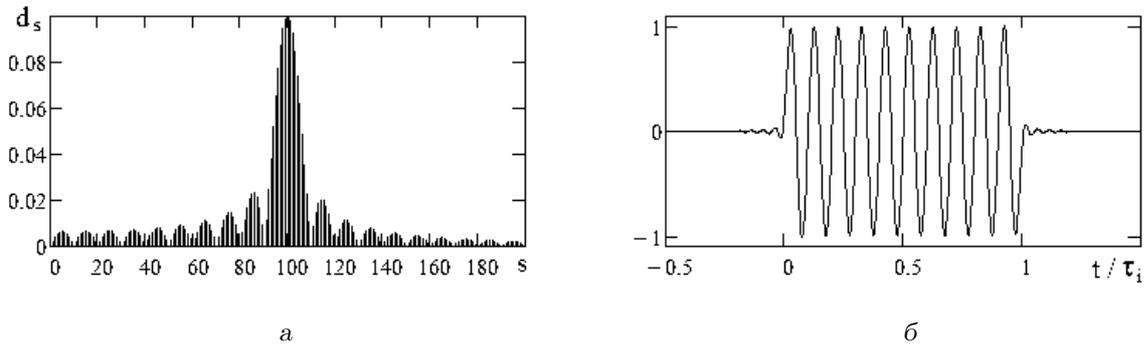


Рис. 8. Вид импульсного сигнала, возбуждаемого в волноводе:
 а – амплитудный спектр, б – временная зависимость

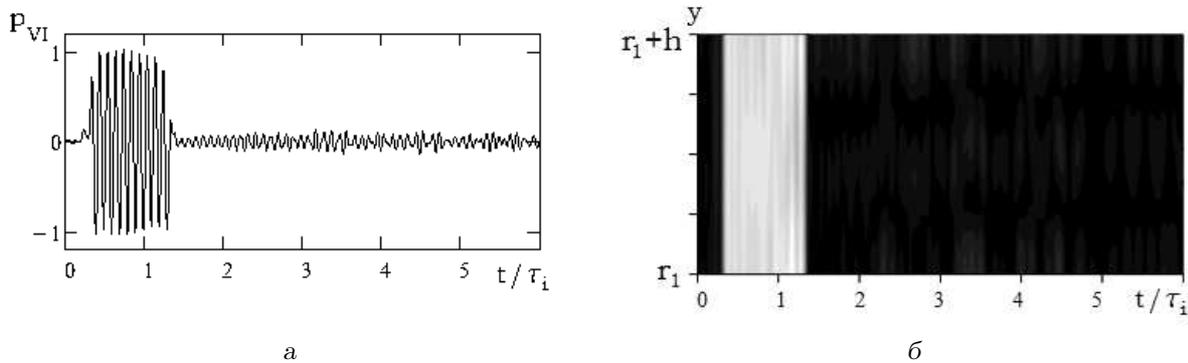


Рис. 9. Акустическое давление в области VI скругленного волновода постоянной ширины с $h/\lambda_0=1.15$, $r_1/h=1$:
 а – временная зависимость в точке $(y-r_1)/h=0.5$, $x/\lambda_0=-150$,
 б – амплитуды давления в сечении $x/\lambda_0=-150$

Выберем следующие значения безразмерных параметров: $N=10$, $q=10$. На рис. 8 представлены амплитудный спектр $d_s = \sqrt{a_s^2 + b_s^2}$, $s=1, 2, \dots, 200$ и временная зависимость соответствующего сигнала. Частота сотой гармоники равняется частоте несущей. Следует отметить, что в полосе частот $[\omega_{90}, \omega_{110}]$ содержится 90 % всей энергии сигнала, поэтому данный импульс можно отнести к разряду узкополосных.

Конечно, предлагаемая модель сигнала не позволяет рассматривать задачу распространения импульса в волноводе на произвольном отрезке времени. Говоря о наличии в системе дисперсии, можно отметить, что такое представление сигнала пригодно лишь до тех пор, пока запаздывание импульса не сравнится с периодом следования импульсов.

Пусть в области I распространяется нулевая мода волновода с временной зависимостью (12):

$$p_0 = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + Ib_j) \exp(-i\omega_j t + i\gamma_{j,0} y). \quad (13)$$

Тогда поле в области VI следует записать в виде

$$p_{VI} = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + ib_j) \sum_{n=0}^{\infty} D_{j,n} \cos(\alpha_n(y-r_1)) \times \exp(-i\omega_j t - i\gamma_{j,n} x), \quad (14)$$

где постоянная распространения

$$\gamma_{j,n} = \frac{\omega_j}{c} \sqrt{1 - \frac{\tilde{\omega}_n^2}{\omega_j^2}};$$

$\tilde{\omega}_n = n\pi c/h$ – критическая частота n -ой моды.

Вначале рассмотрим ситуацию, когда в области VI доминирует одна из мод волновода. Например, согласно рис. 6, при $h/\lambda_0=1.15$ (здесь λ_0 – длина

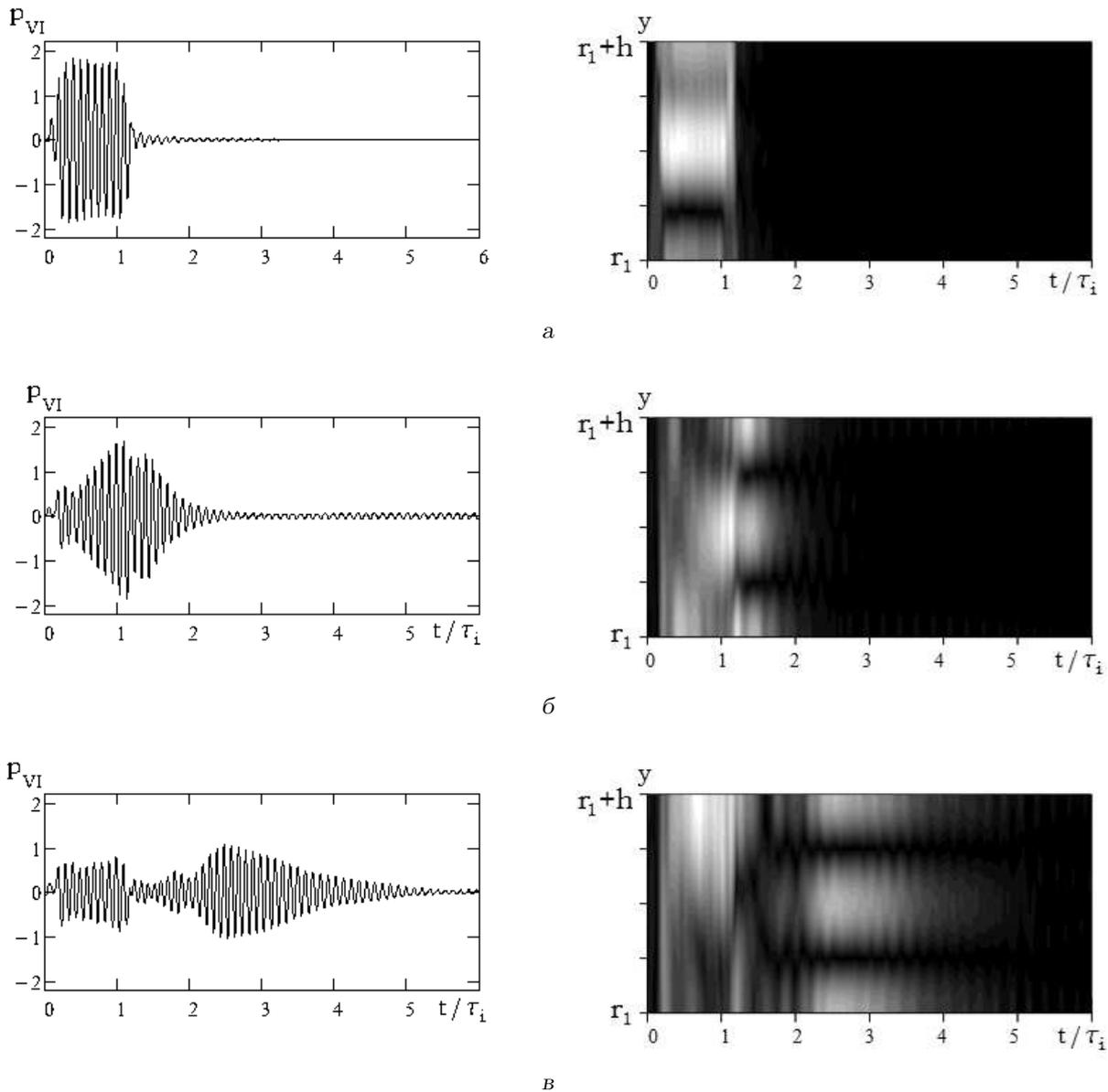


Рис. 10. Временные зависимости давления в области VI скругленного волновода постоянной ширины с $h/\lambda_0=1.15$, $r_1/h=0.06$ в точке $(y-r_1)/h=0.5$, x/λ_0 и амплитуды давления в сечении x/λ_0 :
 а – при $x/\lambda_0=0$, б – при $x/\lambda_0=-6$, в – при $x/\lambda_0=-20$

волны на частоте несущей) и $r_1/h=1$ определяющей является нулевая мода. Поскольку дисперсия у нее отсутствует, то импульс будет сохранять свою форму на любом расстоянии от места изгиба волновода. Этот факт иллюстрируется рис. 9, на котором слева показана временная зависимость давления в срединной точке волновода, а справа – зависимость амплитуды давления в сечении, отстоящем от изгиба на расстояние $150\lambda_0$. Вдоль оси абсцисс отложено безразмерное время $t'=t/\tau_1$.

Резко уменьшив величину радиуса скругле-

ния r_1 , оставив ширину волновода прежней: $h/\lambda_0=1.15$, $r_1/h=0.06$. В этом случае, как видно из рис. 6, должны распространяться три моды, причем определяющими будут нулевая и вторая. При заданной ширине волновода в выражении (14) распространяющимися оказываются моды с такими номерами: нулевая ($n=0$) при $j \geq 0$, первая ($n=1$) при $j > 44$ и вторая ($n=2$) при $j > 88$. Таким образом, все три моды захватывают диапазон энергонесущих частот. На рис. 10 показано изменение формы импульса при его распространении

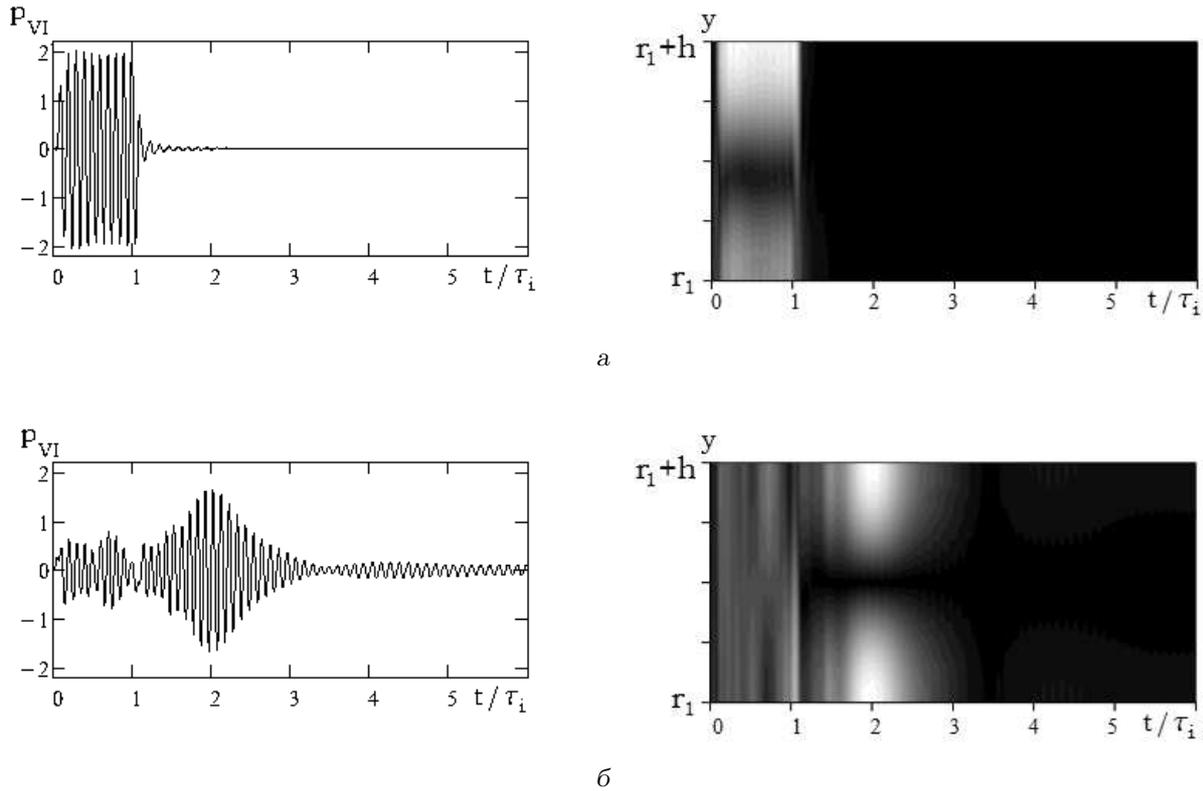


Рис. 11. Временные зависимости давления в области VI скругленного волновода постоянной ширины с $h/\lambda_0=0.6$, $r_1/h=0.06$ в точке $(y-r_1)/h=0.9$, x/λ_0 и амплитуда давления в сечении x/λ_0 :
а – при $x/\lambda_0=0$, б – при $x/\lambda_0=-17$

в области VI. Рис. 10, а отражает ситуацию вхождения импульса в эту область. В срединной точке волновода наблюдается практически неискаженный сигнал с амплитудой, почти в два раза превышающей амплитуду импульса, набегающего из области I. Как видно из рис. 10, а (правый график) при перемещении точки наблюдения вдоль сечения волновода амплитуда импульса существенно изменяется, что согласуется с результатами расчета полей давления, представленными на рис. 7. На рис. 10, б, в, соответствующих удалению точки наблюдения от места изгиба, начинается пространственное разделение нулевой и второй мод, поскольку групповая скорость последней оказывается меньше, чем групповая скорость нулевой моды. Исходный сигнал претерпевает сильные искажения, фактически разделяясь на два импульса с примерно одинаковыми уровнями. При этом первый из них, образованный нулевыми модами, имеет длительность, равную исходному импульсу, а второй, формируемый вторыми модами, вследствие дисперсии растягивается во времени и пространстве.

В качестве еще одного примера на рис. 11 приведены аналогичные рис. 10 зависимости при $h/\lambda_0=0.6$, $r_1/h=0.06$. Согласно данным рис. 6, поле за изгибом образуют нулевая и первая моды, причем коэффициент возбуждения первой моды выше, чем нулевой. Распространяющимися в данном случае будут первые моды с номерами $j > 84$. Выберем точку наблюдения вблизи внешней поверхности волновода. Как видно из графиков, по мере распространения импульс четко разделяется на два импульса, образуемые нулевой и первой модами.

В заключение укажем на связь предмета наших исследований с музыкой. Для ряда духовых инструментов (например, валторны, тромбона и др.) характерно наличие сложной системы изгибов звукопроводящих труб [9]. О музыкальном сигнале можно говорить как о временной последовательности импульсов разной длительности. Поэтому, опираясь на результаты, полученные в данной работе, укажем, что количество поворотов и их геометрические параметры, по сути, определяют тембровую окраску того или иного инструмента.

Разумеется, внешний вид и устройство каждого из музыкальных инструментов является плодом таланта многих мастеров, которые в процессе их создания руководствовались своим восприятием их звучания.

ВЫВОДЫ

1. Построено решение задачи о распространении волны в изогнутом волноводе с различными типами скругления области изгиба. Геометрические размеры волновода сравнимы с длиной волны. Рассмотрен угол изгиба, равный 90° . Показано, что при малом, по сравнению с длиной волны, радиусе изгиба частотные зависимости энергетического коэффициента прохождения плоской волны зоны изгиба с графической точностью совпадают с результатами соответствующих расчетов для волновода с изломом.
2. С увеличением радиуса скругления вплоть до величины, равной ширине волновода, коэффициент прохождения растёт, однако изрезанность частотной характеристики сохраняется. Такая же тенденция имеет место и для волновода со срезами.
3. Скругление уголкового области при сохранении постоянной ширины волновода на всем его протяжении приводит к практически полной звукопрозрачности криволинейной области для нулевой моды волновода в широком диапазоне частот. При этом структура поля за поворотом существенно зависит от геометрических параметров, т. е. от волновых величин

радиуса скругления и ширины волновода. При определенном сочетании указанных параметров возможно добиться доминирования одной из мод волновода в области за изгибом.

4. Построено решение задачи о распространении узкополосного импульсного сигнала в скругленном волноводе с постоянной шириной. Показано, что, подбирая должным образом геометрические параметры системы, можно добиться сохранения в общих чертах формы импульса на пути его распространения.

1. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Рудь Л. А. Резонансное рассеяние волн. Том 2. Волноводные неоднородности.– К.: Наук. думка, 1986.– 216 с.
2. Hwang W. S. A boundary integral method for acoustic and scattering // J. Acoust. Soc. Amer.– 1997.– **101**, № 6.– P. 3330–3335.
3. Sridhara B. S., Crocker M. J. Review of theoretical and experimental aspects of acoustical modeling of engine exhaust systems // J. Acoust. Soc. Amer.– 1994.– **95**, № 1.– P. 2363–2370.
4. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука.– М.: Изд-во. МГУ, 1960.– 336 с.
5. Lewin L. On the inadequacy of discrete mode-matching techniques in some waveguide discontinuity problems // IEEE Trans. Microwave Theory Tech.– 1970.– **MTT-18**, № 7.– P. 364–372.
6. Гончарова И. Ю., Мацьшура В. Т. Распространение звука в волноводе с изломом // Акуст. вісн.– 1998.– **1**, № 2.– С. 57–64.
7. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацьшура В. Т. Волновые задачи акустики.– К.: Интерсервис, 2013.– 572 с.
8. Исакович М. А. Общая акустика.– М.: Наука, 1973.– 495 с.
9. Ананьев А. Б. Элементы музыкальной акустики.– К.: Феникс, 2008.– 224 с.