

УДК 534.232.082.73

РАСЧЕТ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСИММЕТРИЧНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА

О. Н. ПЕТРИЩЕВ, А. В. КОРЖИК, А. В. БОГДАНОВ*

Национальный технический университет Украины "КПИ"

пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина

*oleksiib@gmail.com

Получено 12.12.2012 ◊ Пересмотрено 10.03.2014

Построена математическая модель несимметричного биморфного пьезоэлектрического акселерометра. Выведено уточненное выражение для аксиальной координаты нейтральной поверхности чувствительного элемента. В явном виде получены формулы для его физико-механических характеристик. Выполнен расчет частотной зависимости чувствительности преобразователя и проанализирована ее зависимость от различных параметров акселерометра.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пьезоэлектрика, несимметричный биморф, акселерометр, нейтральная поверхность, частотная характеристика

Побудовано математичну модель несимметричного биморфного п'єзоелектричного акселерометра. Виведено уточнений вираз для аксіальної координати нейтральної поверхні чутливого елемента. У явному вигляді отримано формули для його фізико-механічних характеристик. Проведено розрахунок частотної характеристики перетворювача й проаналізовано її залежності від різних параметрів акселерометра.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: п'єзоелектрика, несимметричний биморф, акселерометр, нейтральна поверхня, частотна характеристика

The paper deals with developing of a mathematical model of asymmetric bimorph piezoelectric accelerometer. An improved expression for axial position of a neutral sensor surface is obtained. The explicit formulas for its physical and mechanical characteristics are deduced. The frequency response of transducer is calculated with subsequent analysis of its dependence from various parameters of the accelerometer.

KEY WORDS: piezoelectricity, asymmetric bimorph, accelerometer, neural surface, frequency response

ВВЕДЕНИЕ

Пьезоэффект широко применяется для трансформации механического воздействия в электрический сигнал. На этом принципе построена работа множества приемников различного назначения. Одними из ярких примеров таких приемников являются пьезоэлектрические акселерометры, использующие явление возникновения разности электрических потенциалов при изгибных колебаниях многослойных (биморфных) пластин [1]. Классической считается модель симметричного пьезокерамического биморфа, однако на практике такие чувствительные элементы весьма хрупки. Поэтому с целью придания акселерометру большей прочности и ударостойкости в составе электромеханических устройств для измерения кинематических величин в качестве первичных преобразователей зачастую используются несимметричные относительно плоскости поперечного сечения $z=0$ биморфные элементы с металлической подложкой [2, 3], рис. 1.

Возникает естественный вопрос о нахождении частотной характеристики такого датчика, определяющей диапазон, в котором возможно эффективное использование преобразователя. Рабо-

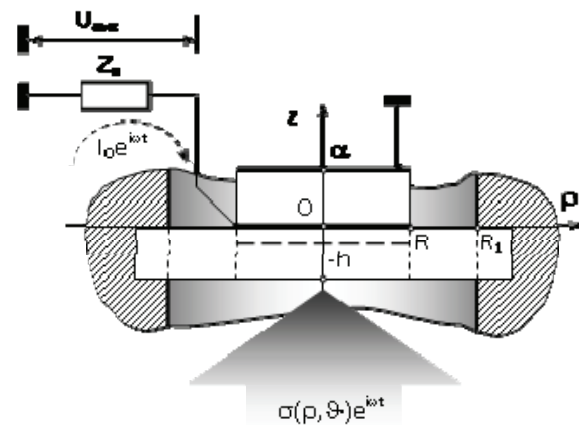


Рис. 1. Схема несимметричного биморфного элемента

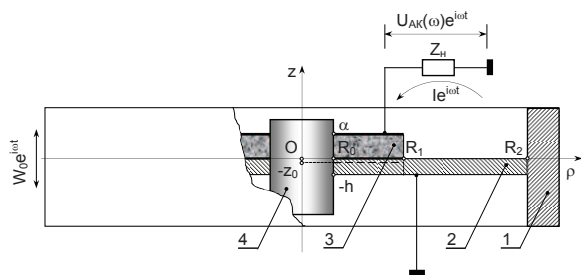


Рис. 2. Схема пьезоэлектрического акселерометра

та симметричных биморфных пьезоэлектрических элементов (БПЭ) в режимах излучения и приема ультразвуковых волн рассмотрена в работах [4, 5]. Частотные характеристики несимметричных БПЭ в условиях излучения и приема ультразвука исследованы в [6, 7].

Несимметричный БПЭ в режиме регистрации избыточного давления, создаваемого падающей ультразвуковой волной, рассматривался в статьях [8, 9]. В них была предпринята попытка аналитического описания вынужденных колебаний жестко склеенных между собой в плоскости $z=0$ металлического и пьезоэлектрического дисков (см. рис. 1). Следует отметить, что вопрос о частотной характеристике несимметричного БПЭ в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта в работах [8, 9] не получил окончательного разрешения. Более того, в них отсутствуют результаты, которые можно было бы рекомендовать к использованию в практической деятельности разработчиков устройств пьезоэлектроники.

Основаниями для такого заключения послужили не вполне корректные, на наш взгляд, выводы, сделанные в упомянутых публикациях.

Во-первых, в статье [8] неверно определена напряженность электрического поля, которое возникает внутри пьезоэлектрического диска, деформируемого внешними силами. Это повлекло за собой определение изгибной жесткости без учета связности упругих и электрических полей в объеме деформируемого пьезоэлектрика.

Во-вторых, авторы работ [8, 9] фактически отказались от принципиального в теории поперечного изгиба понятия нейтральной плоскости, называя ее в различных местах то “поверхностью приведения”, то “исходной плоскостью”. Формулы же, определяющие аксиальную координату “исходной плоскости” (они весьма напоминают аналогичные соотношения из статьи [10]), в действительности не описывают положение нейтральной поверхности. Очевидно, что неправильное определе-

ние координат последней приводит к существенной ошибке при вычислении изгибной жесткости биморфного элемента. Это ставит под сомнение результаты всех количественных оценок, в том числе и для резонансных частот БПЭ.

В-третьих, в обсуждаемых публикациях допущены ошибки в формулировках граничных условий (см. [8, выражения (29), (30)] и [9, выражения (14), (15)]), что делает исследование частотных зависимостей характеристик БПЭ еще более проблематичным. Более того, в работе [9] присутствует, по меньшей мере, дискуссионная рекомендация: “... в области низких частот, где в основном используются подобные преобразователи, для оценки чувствительности можно пользоваться соответствующими статическими решениями”.

Таким образом, вопрос о построении математических моделей несимметричных БПЭ в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта остается открытым до настоящего времени. Цель данной статьи состоит в полном разрешении этого вопроса в рамках гипотезы Кирхгофа. Напомним, что эта гипотеза определяет деформированное состояние при поперечном изгибе как результат поворота сечений, перпендикулярных нейтральной плоскости, вокруг располагающихся в ней осей.

1. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА

Общая схема несимметричного акселерометра изображена на рис. 2. Корпус акселерометра 1 (приемник вибраций) совершает гармонические колебания в направлении оси Oz со смещением $w(z) = W_0 e^{i\omega t}$, где W_0 – известная амплитуда. В биморфном элементе акселерометра, состоящем из металлической пластины 2 с наклеенной на нее пьезокерамической шайбой 3 эти колебания трансформируются в поперечный изгиб. Позиция 4 соответствует недеформируемому подвижному центру, который используется для управления параметрами частотной характеристики пьезоэлектрического акселерометра. Металлическая пластина имеет форму диска и характеризуется толщиной h , плотностью ρ_m , модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν . Пьезоэлектрическая шайба имеет толщину α , внутренний радиус R_0 , внешний радиус R_1 . Она выполнена из поляризованной по толщине пьезокерамики типа ЦТС, которая характеризуется модулями упругости $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{33}^E$; пьезомодулями e_{31}, e_{33} и диэлектрической проницаемостью χ_{33}^E . Считаем, что недеформируемый подвижный центр имеет массу M .

В процессе деформирования пьезокерамической

шайбы в ней возникают поляризационные заряды, которые своим электрическим полем приводят в движение свободные носители электричества в проводнике. При этом на нагрузочном сопротивлении, представляющем собой входное сопротивление усилителя или какой-либо другой электронной схемы, формируется разность электрических потенциалов $U_{ак}(\omega)$ – искомый отклик акселерометра на воздействие W_0 .

Частотная характеристика чувствительности акселерометра $K_{ак}(\omega, \Pi)$ определяется следующим образом:

$$K_{ак}(\omega, \Pi) = U_{ак}(\omega)W_0. \quad (1)$$

Здесь Π – набор физико-механических и геометрических параметров элементов акселерометра.

2. СХЕМА РАСЧЕТА АМПЛИТУДЫ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВЫХОДЕ АКСЕЛЕРОМЕТРА

Амплитуда гармонического переменного электрического тока в проводнике будет

$$I = -i\omega Q. \quad (2)$$

Здесь Q – поляризационный заряд в деформируемой пьезокерамической шайбе. При этом справедливо

$$Q = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} \rho D_z d\rho, \quad (3)$$

где D_z – аксиальный компонент вектора электрической индукции.

Предположим, что радиальная компонента электрической индукции пренебрежимо мала $D_\rho \approx 0$ [1], а в деформируемой части акселерометра ($R_0 \leq \rho \leq R_2$) существует напряженно-деформированное состояние поперечного осесимметричного изгиба. При этом напряжения сжатия – растяжения $\sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\phi\phi} \neq 0$, а $\sigma_{zz} = 0$. Из обобщенного закона Гука для упругих сред с пьезоэлектрическим эффектом [1]:

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\phi\phi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_z,$$

$$\sigma_{\phi\phi} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}^E \varepsilon_{\phi\phi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_z,$$

$$\sigma_{zz} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\phi\phi} + c_{33}^E \varepsilon_{zz} - e_{33} E_z = 0$$

следует, что

$$\varepsilon_{zz} = \frac{c_{12}^E}{c_{33}^E} (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\phi\phi}) + \frac{e_{33}}{c_{33}^E} E_z, \quad (4)$$

откуда

$$\begin{aligned} D_z &= e_{31}(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\phi\phi}) + e_{33}\varepsilon_{zz} + \chi_{33}^\varepsilon E_z = \\ &= e_{31}^*(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\phi\phi}) + \chi_{33}^\sigma E_z. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$e_{31}^* = e_{31} - e_{33} \frac{c_{12}^E}{c_{33}^E}; \quad \chi_{33}^\sigma = \chi_{33}^\varepsilon + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E}.$$

Так как $(D_\rho, D_\phi) = 0$ и $\text{div} \vec{D} = 0$, то

$$Q = \frac{2\pi e_{31}^*}{\alpha} \int_{R_0}^{R_1} \rho \int_0^\alpha (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\phi\phi}) dz d\rho - C_0^\sigma U_{вых}(\omega), \quad (6)$$

где $C_0^\sigma = \pi(R_1^2 - R_0^2)\chi_{33}^\sigma/\alpha$ – статическая электрическая емкость электродированной пьезокерамической шайбы; $\varepsilon_{\rho\rho}$ и $\varepsilon_{\phi\phi}$ – деформации сжатия – растяжения в радиальном и окружном направлениях [1].

Так как $I = U_{ак}(\omega)/Z_H$, то, подставляя выражение (6) в определение (1), получаем

$$\begin{aligned} U_{ак}(\omega) &= -\frac{2e_{31}^* \xi_e}{(R_1^2 - R_0^2)\chi_{33}^\sigma} \times \\ &\times \int_{R_0}^{R_1} \rho \int_0^\alpha (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\phi\phi}) dz d\rho, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\xi_e = i\omega C_0^\sigma Z_H / (1 - i\omega C_0^\sigma Z_H)$ – частотно зависящая функция, которая определяет влияние электрической нагрузки на частотную характеристику (чувствительность) акселерометра.

Поскольку деформируемая часть акселерометра ($R_0 \leq \rho \leq R_2$) испытывает гармонические колебания поперечного изгиба, то в приближении теории тонких пластин деформации $\varepsilon_{\rho\rho}$ и $\varepsilon_{\phi\phi}$ записываются следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho\rho} &= -(z + z_0) \frac{\partial^2 w_1(\rho)}{\partial \rho^2}, \\ \varepsilon_{\phi\phi} &= -(z + z_0) \frac{\partial w_1(\rho)}{\rho \partial \rho}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь z_0 – координата нейтрального слоя активной зоны акселерометра ($R_0 \leq \rho \leq R_1$); $w_1(\rho)$ – прогиб активной зоны. Подставляя определение деформаций (8) в выражение (7), получаем

$$U_{ак}(\omega) = -\frac{e_{31}^* (\alpha^2 + 2\alpha z_0) \xi_e}{(R_1^2 - R_0^2)\chi_{33}^\sigma} R_1 \frac{\partial w_1(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1}. \quad (9)$$

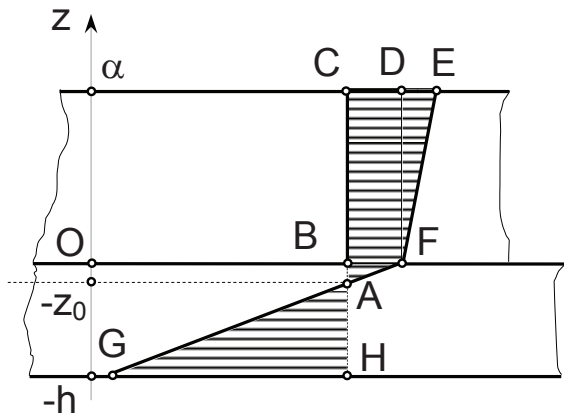


Рис. 3. К расчету координаты нейтрального слоя активной зоны пьезоэлектрического акселерометра

Таким образом, для определения $U_{ак}(\omega)$ и частотной характеристики акселерометра $K_{ак}(\omega, \Pi)$ необходимо найти прогибы $w_1(\rho)$ активной зоны. Расчет прогибов предполагает определение параметра z_0 – координаты нейтрального слоя активной зоны акселерометра.

3. НАПРЯЖЕНИЯ $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\phi\phi}$, КООРДИНАТА z_0 И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ АКТИВНОЙ ЗОНЫ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА

С учетом определения (4) обобщенный закон Гука для пьезокерамической шайбы записывается следующим образом [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho} &= c_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}\varepsilon_{\phi\phi} - e_{31}^*E_z, \\ \sigma_{\phi\phi} &= c_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}\varepsilon_{\phi\phi} - e_{31}^*E_z,\end{aligned}\quad (10)$$

где $c_{11} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2/c_{33}^E$; $c_{12} = c_{12}^E - (c_{12}^E)^2/c_{33}^E$.

Вычислим аксиальный компонент E_z вектора напряженности электрического поля в объеме деформируемой пьезокерамической шайбы.

Из условия $\text{div}\vec{D}=0$ следует, что $\partial D_z/\partial z=0$. Интегрируя левую и правую части соотношения (5) по переменной z , получаем эквивалентное ему выражение для расчета компонента D_z :

$$\begin{aligned}D_z(\rho) &= -\frac{e_{31}^*}{2\rho}(\alpha + 2z_0)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w_1}{\partial\rho}\right) - \\ &\quad - \frac{\chi_{33}^\sigma}{\alpha}U_{ак}(\omega).\end{aligned}\quad (11)$$

Сравнивая формулы (5) и (11) между собой, находим соотношение для расчета аксиального компо-

нента вектора напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned}E_z(\rho) &= -\frac{e_{31}^*}{2\chi_{33}^\sigma}(\alpha - 2z)\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w_1}{\partial\rho}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{\alpha}U_{ак}(\omega),\end{aligned}\quad (12)$$

где $U_{ак}(\omega)$ определено выражением (9).

Теперь напряжения $\sigma_{\rho\rho}$ и $\sigma_{\phi\phi}$ можно записать так:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho} &= c_{11}^D\left[-(z + z_0)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial\rho^2} + \frac{k^*}{\rho}\frac{\partial w_1}{\partial\rho}\right) + \right. \\ &\quad + \frac{K_{31}^2(\alpha + 2z_0)}{2(1 + K_{31}^2)}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w_1}{\partial\rho}\right) - \\ &\quad \left. - \frac{2\xi_e R_1}{R_1^2 - R_0^2}\frac{\partial w_1}{\partial\rho}\Bigg|_{\rho=R_1}\right],\end{aligned}\quad (13)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\phi\phi} &= c_{11}^D\left[-(z + z_0)\left(k^*\frac{\partial^2 w_1}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w_1}{\partial\rho}\right) + \right. \\ &\quad + \frac{K_{31}^2(\alpha + 2z_0)}{2(1 + K_{31}^2)}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w_1}{\partial\rho}\right) - \\ &\quad \left. - \frac{2\xi_e R_1}{R_1^2 - R_0^2}\frac{\partial w_1}{\partial\rho}\Bigg|_{\rho=R_1}\right].\end{aligned}\quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned}c_{11}^D &= c_{11}(1 + K_{31}^2); & c_{12}^D &= c_{11}(k + K_{31}^2); \\ K_{31}^2 &= \frac{(e_{31}^*)^2}{c_{11}\chi_{33}^\sigma}; & k^* &= \frac{c_{12}^D}{c_{11}^D}; & k &= \frac{c_{12}}{c_{11}}.\end{aligned}$$

В слое металла в пределах активной зоны акселерометра существуют напряжения $\sigma_{\rho\rho}^m$ и $\sigma_{\phi\phi}^m$, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^m &= -\frac{E(z + z_0)}{1 - \nu^2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial\rho^2} + \frac{\nu}{\rho}\frac{\partial w_1}{\partial\rho}\right), \\ \sigma_{\phi\phi}^m &= -\frac{E(z + z_0)}{1 - \nu^2}\left(\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w_1}{\partial\rho}\right).\end{aligned}\quad (15)$$

Предположим, что геометрические и физико-механические параметры компонентов активной зоны акселерометра выбраны таким образом, что нейтральный слой находится в объеме металлической пластины.

Из равенства положительных (сжатие) и отрицательных (растяжение) площадей под эпюрой

нормальных напряжений рис. 3 следует, что производные от функции прогибов должны удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{c_{11}^D \alpha}{2} \left\{ \frac{Eh(h-2z_0)}{c_{11}^D(1-\nu^2)\alpha} \times \right. \\ & \quad \times \left[\left(\begin{matrix} 1 \\ \nu \end{matrix} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \left(\begin{matrix} \nu \\ 1 \end{matrix} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right] - \\ & \quad - (\alpha + 2z_0) \times \\ & \quad \times \left[\left(\begin{matrix} 1 \\ k^* \end{matrix} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \left(\begin{matrix} k^* \\ 1 \end{matrix} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right] + \\ & \quad + \frac{K_{31}^2(\alpha + 2z_0)}{1 + K_{31}^2} \times \\ & \quad \times \left. \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{2\xi_e}{R} \frac{\partial w(R)}{\partial \rho} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом верхние символы в круглых скобках соответствуют равенству площадей под эпюрами радиальных напряжений, нижние – окружных. Соотношение (16) фактически представляет собой систему двух алгебраических уравнений относительно производных функции прогибов $w(\rho)$. Она может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} + A_{12} \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} &= A_0, \\ A_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} + A_{11} \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} &= A_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{1\{1\}^2} &= \frac{Eh(h-2z_0)}{c_{11}^D(1-\nu^2)\alpha^2} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ 1 \end{matrix} \right\} - \\ & \quad - (\alpha + 2z_0) \left\{ \begin{matrix} k^* \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{K_{31}^2(\alpha + 2z_0)}{1 + K_{31}^2}; \\ A_0 &= \frac{2K_{31}^2(\alpha + 2z_0)\xi_e}{(1 + K_{31}^2)(R_1^2 - R_0^2)} R_1 \frac{\partial w_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1}. \end{aligned}$$

Разрешая систему уравнений (17) относительно производных от функции прогиба, находим

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} = \frac{A_0}{A_{11} + A_{12}}. \quad (18)$$

На границе раздела сред – в плоскости $z=0$ – должно в обязательном порядке выполняться

условие $\sigma_\beta(0) = \sigma_\beta^m(0)$ ($\beta = \rho, \varphi$), делающее возможной процедуру окончательного определения параметра z_0 . Приравнявая друг к другу радиальные напряжения в плоскости $z=0$, получаем

$$\begin{aligned} & \left[-z_0 + \frac{K_{31}^2(\alpha + 2z_0)}{2(1 + K_{31}^2)} + \frac{Ez_0}{c_{11}^D(1-\nu^2)} \right] \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} + \\ & + \left[-z_0 k^* + \frac{K_{31}^2(\alpha + 2z_0)}{2(1 + K_{31}^2)} + \frac{Ez_0 \nu}{c_{11}^D(1-\nu^2)} \right] \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} = \\ & = - \frac{K_{31}^2(\alpha + 2z_0)}{(1 + K_{31}^2)(R_1^2 - R_0^2)} \xi_e R_1 \frac{\partial w_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения следует, что

$$\begin{aligned} & \left[-z_0(1 + k^*) + \frac{K_{31}^2(\alpha + 2z_0)}{2(1 + K_{31}^2)} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{Ez_0}{c_{11}^D(1-\nu)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} = \\ & = - \frac{K_{31}^2(\alpha + 2z_0)}{(1 + K_{31}^2)(R_1^2 - R_0^2)} \xi_e R_1 \frac{\partial w_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассматривая равенство площадей под эпюрами окружных напряжений $\sigma_{\phi\phi}(\rho)$ и $\sigma_{\phi\phi}^m(\rho)$, приходим к соотношению, которое по форме и содержанию идентично уравнению (19). Исключая из него вторую производную функции прогиба и проводя очевидные алгебраические преобразования, получаем окончательную формулу для координаты z_0 :

$$z_0 = \alpha \frac{\xi^2 - \frac{c_{11}^D}{E}(1-\nu)(1+k^*)}{2(1+\xi)}, \quad (20)$$

где $\xi = h/\alpha$.

Для определения изгибной жесткости активной зоны пьезоэлектрического акселерометра вычислим интегральные характеристики напряженно-деформированного состояния – величины M_ρ , M_φ и Q_1 :

$$\begin{aligned} M_\rho &= -(D_{пз} + D_M - D_0) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} - \\ & - (k^* D_{пз} + \nu D_M - D_0) \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} - M_0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} M_\phi &= -(k^* D_{пз} + \nu D_M - D_0) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} - \\ & - (D_{пз} + D_M - D_0) \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} - M_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$D_{\text{пз}} = \frac{1}{3} c_{11}^D [(\alpha + z_0)^3 - z_0^3];$$

$$D_M = \frac{E}{3(1-\nu^2)} [(h - z_0)^3 + z_0^3];$$

$$D_0 = \frac{e_{31}^2 \alpha}{4\chi_3^\varepsilon} (\alpha + 2z_0)^2;$$

$$M_0 = \frac{e_{31}^2 \xi_\varepsilon \alpha}{2\chi_3^\varepsilon (R_1^2 - R_0^2)} (\alpha + 2z_0)^2 R_1 \frac{\partial w_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1};$$

$$D_1 = D_{\text{пз}} + D_M - D_0.$$

С точностью до бесконечно малых второго порядка малости в теории поперечного изгиба доказывается, что линейная плотность поперечных сил будет

$$Q_1 = \frac{1}{\rho} \left[M_\phi - \rho \frac{\partial M_\rho}{\partial \rho} - M_\rho \right],$$

откуда следует, что

$$Q_1 = -D_1 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} \right). \quad (23)$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СМЕЩЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ АКТИВНОЙ И ПАССИВНОЙ ЗОН АКСЕЛЕРОМЕТРА

Гармонические изгибные колебания активной зоны пьезоакселерометра описываются уравнением

$$\nabla^4 w_1 - \lambda_1^4 w_1 = 0 \quad \forall \rho \in [R_0, R_1], \quad (24)$$

общее решение которого, выражаемое через цилиндрические функции, имеет следующий вид:

$$w_1(\rho) = A_1 J_0(\lambda_1 \rho) + A_2 N_0(\lambda_1 \rho) + A_3 I_0(\lambda_1 \rho) + A_4 K_0(\lambda_1 \rho). \quad (25)$$

Здесь $\lambda_1^4 = \omega^2(\rho_0 \alpha + \rho_m h) / D_1$.

Аналогичное по форме уравнение движения можно записать и для элементов (материальных частиц) пассивной зоны:

$$\nabla^4 w_2 - \lambda_2^4 w_2 = 0 \quad \forall \rho \in [R_1, R_2]. \quad (26)$$

Его общее решение ищем в форме

$$w_2(\rho) = A_5 J_0(\lambda_2 \rho) + A_6 N_0(\lambda_2 \rho) + A_7 I_0(\lambda_2 \rho) + A_8 K_0(\lambda_2 \rho), \quad (27)$$

где $\lambda_2^4 = \omega^2 \rho_m h / D_2$; $D_2 = E h^3 / [12(1-\nu^2)]$ – изгибная жесткость металлической пластины.

Произвольные константы A_1, \dots, A_8 , входящие в выражения (25), (27), определяются из следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_0} &= 0, \\ [2\pi R_0 Q_1(\rho) - M \omega^2 w_1(\rho)] \Big|_{\rho=R_0} &= 0, \\ [w_1(\rho) - w_2(\rho)] \Big|_{\rho=R_1} &= 0, \\ \left[\frac{\partial w_1(\rho)}{\partial \rho} - \frac{\partial w_2(\rho)}{\partial \rho} \right] \Big|_{\rho=R_1} &= 0, \\ M_\rho^{(1)}(\rho) - M_\rho^{(2)}(\rho) \Big|_{\rho=R_1} &= 0, \\ [Q_1(\rho) - Q_2(\rho)] \Big|_{\rho=R_1} &= 0, \\ [w_2(\rho) - W_0] \Big|_{\rho=R_2} &= 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_2} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь

$$M_\rho^{(2)}(\rho) = -D_m^* \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial w_2}{\partial \rho} \right);$$

$$D_m^* = \frac{E}{3(1-\nu^2)} (h/2 - z_0)^3;$$

$$Q_2(\rho) = -D_m^* \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w_2}{\partial \rho} \right).$$

Условия (28) образуют неоднородную систему из восьми линейных алгебраических уравнений, которая разрешается относительно искомых констант A_1, \dots, A_8 единственным образом.

Обозначим символом Δ_0 главный определитель полученной алгебраической системы. Тогда

$$A_k = (-1)^{k+7} W_0 \frac{\Delta_k}{\Delta_0}, \quad k = 1, \quad (29)$$

где Δ_k – алгебраическое дополнение при элементе A_k , которое получается путем вычеркивания седьмой строки и k -го столбца определителя Δ_0 . С

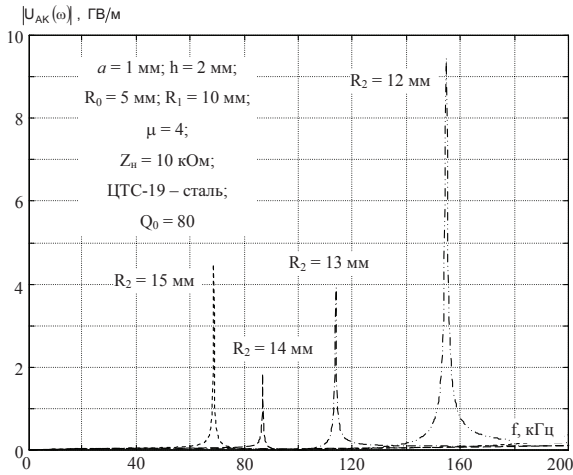


Рис. 4. Влияние радиуса R_2 металлического диска на частотную характеристику пьезоэлектрического акселерометра

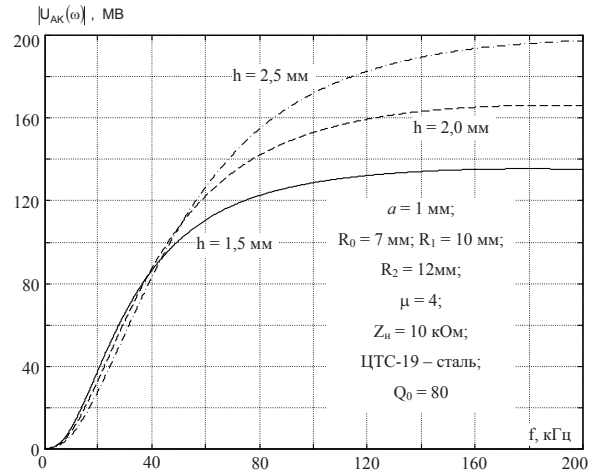


Рис. 6. Влияние толщины h металлического диска на частотную характеристику пьезоэлектрического акселерометра

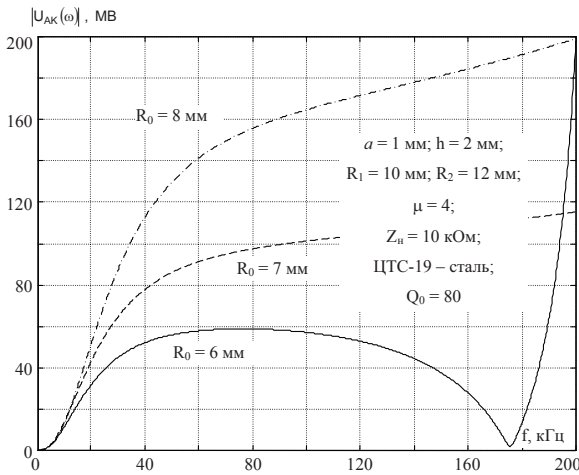


Рис. 5. Влияние радиуса R_0 недеформируемого подвижного центра на частотную характеристику пьезоэлектрического акселерометра

учетом принятых обозначений получаем окончательное выражение для искомой разности электрических потенциалов:

$$U_{ак}(\omega) = -W_0 \frac{e_{31}^*(\alpha^2 + 2z_0\alpha)}{(R_1^2 - R_0^2)\chi_{33}^\sigma \Delta_0} \times \\ \times \xi_e(\lambda_1 R_1) [-\Delta_1 J_1(\lambda_1 R_1) + \Delta_2 N_1(\lambda_1 R_1) + \\ + \Delta_3 I_1(\lambda_1 R_1) + \Delta_4 K_1(\lambda_1 R_1)]. \quad (30)$$

5. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученное уточненное выражение для электрического отклика несимметричного акселерометра позволяет количественно оценить частотную характеристику его чувствительности. На рис. 4–9 показаны результаты расчетов модуля разности электрических потенциалов при уровне амплитуды воздействия $W_0 = 1$ м. Это приводит к значениям $U_{ак}(\omega)$ порядка сотен мегавольт – единиц гигавольт. По осям абсцисс на всех графиках отложена частота.

В качестве материалов пьезоэлектрического акселерометра выбраны пьезокерамика ЦТС-19 и сталь. Физико-механические параметры пьезокерамики имеют следующие значения: $c_{11}^E = 112.2$ ГПа; $c_{12}^E = 62.2$ ГПа; $c_{33}^E = 106$ ГПа; $\rho_0 = 7400$ кг/м³; $e_{31} = -7$ Кл/м²; $e_{33} = 18$ Кл/м²; $\chi_{33}^\sigma = 1000\chi_0$; $\chi_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Добротность пьезокерамики выберем $Q_0 = 80$. Для стали считаем модуль Юнга $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0.31$; плотность $\rho_m = 7900$ кг/м³. Символом μ обозначим относительную массу подвижного центра $\mu = M/[2\pi R_0^2(\rho_0 \alpha + \rho_m h)]$, где M – полная масса недеформируемого подвижного центра.

Из представленных на результатах расчетов следует, что:

- увеличение радиуса R_2 металлического диска приводит к снижению резонансной частоты (см. рис. 4);
- варьируя размер R_0 недеформируемого центра масс и толщину h металлического диска,

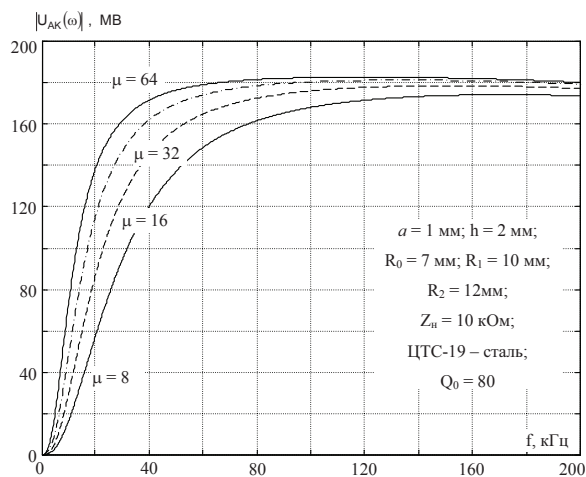


Рис. 7. Влияние относительной массы μ на частотную характеристику пьезоэлектрического акселерометра

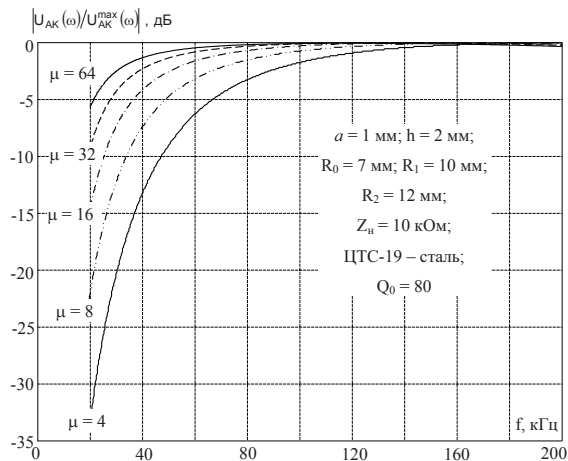


Рис. 9. Влияние массы недеформируемого подвижного центра на частотную характеристику пьезоэлектрического акселерометра

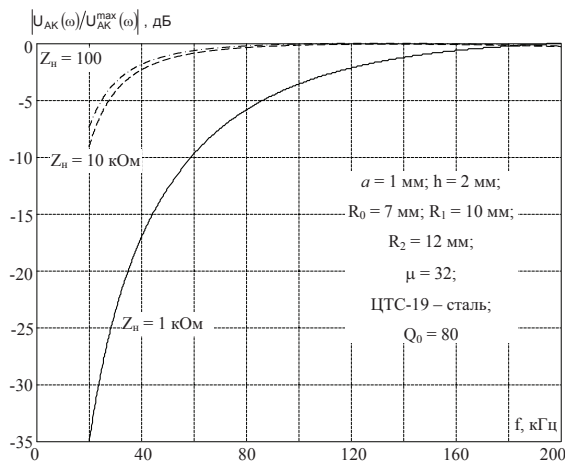


Рис. 8. Влияние электрической нагрузки на частотную характеристику пьезоэлектрического акселерометра

можно получить равномерный и, что самое главное, частотно независимый участок характеристики акселерометра в желаемом диапазоне частот (см. рис. 5, 6);

- относительная масса акселерометра, электрическая нагрузка и масса недеформируемого центра масс влияют в основном на крутизну частотной характеристики на границах равномерного участка (см. рис. 7–9).

Таким образом, в рамках принятых модельных представлений существует возможность построения пьезоэлектрического акселерометра с практически равномерной частотной характеристикой в пределах от 20 до 200 кГц, при условии допол-

нительной ее коррекции в области низких частот. При этом глубина необходимой коррекции не превышает (10...15) дБ.

ВЫВОДЫ

В статье приведены основные результаты, полученные в рамках прикладной теории несимметричных в разрезе биморфных пьезоэлектрических элементов. Она опирается на классические представления о деформированном состоянии при поперечном осесимметричном изгибе круглых пластин, согласованные с основными фактами феноменологической теории пьезоэлектрических явлений и фундаментальными положениями технической электродинамики. Математические модели БПЭ в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта доведены до уровня, когда их можно рекомендовать к практическому использованию в процессе проектирования и разработки акселерометров с гладкой частотной характеристикой в заданном диапазоне звуковых частот.

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Том 5. Электроупругость.– К.: Наук. думка, 1989.– 290 с.
2. Домаркас В. И., Кажис Р.-И. Ю. Контрольно-измерительные преобразователи.– Вильнюс: Минтис, 1975.– 258 с.
3. Джагунов Р. Г., Ерофеев А. А. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления.– СПб.: Политехника, 1994.– 608 с.

4. Петрищев О. Н., Шаблатович А. Н. Исследование биморфного пьезоэлектрического преобразователя в режиме излучения ультразвуковых колебаний // Электроника и связь.– 2003.– **18**.– С. 120–126.
5. Дидковский В. С., Петрищев О. Н., Шаблатович А. Н. Расчет передаточных характеристик биморфного преобразователя в режиме приема ультразвуковых колебаний // Электроника и связь.– 2003.– **20**.– С. 96–104.
6. Козерук С. А., Мартынюк А. Я., Петрищев О. Н. Исследование несимметричного биморфного пьезоэлектрического элемента в режиме излучения ультразвуковых колебаний. Часть I. Обзор литературы и постановка задачи // Электроника и связь.– 2005.– **26**.– С. 61–67.
7. Козерук С. А., Мартынюк А. Я., Петрищев О. Н. Исследование несимметричного биморфного пьезоэлектрического элемента в режиме излучения ультразвуковых колебаний. Часть II. Моделирование поперечного изгиба активной зоны и расчет частотной характеристики излучающего несимметричного биморфного пьезоэлектрического элемента // Электроника и связь.– 2005.– **26**.– С. 68–73.
8. Рудницкий С. И., Шаратов В. М., Шульга Н. А. Колебания дискового биморфного преобразователя типа металл-пьезокерамика // Прикл. мех.– 1990.– **26**, № 10.– С. 64–72.
9. Евсейчик Ю. Б., Рудницкий С. И., Шаратов В. М., Шульга Н. А. Чувствительность биморфного преобразователя типа металл-пьезокерамика // Прикл. мех.– 1990.– **26**, № 12.– С. 67–75.
10. Аллавердиев А. М., Ахмедов Н. В., Шермергор Т. Д. Связанные изгибно-сдвиговые колебания слойно-ступенчатых дисковых пьезокерамических преобразователей // Прикл. мех.– 1987.– **23**, № 5.– С. 59–66.
11. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах.– М.: Мир, 1986.– 160 с.
12. Берлинкур Д., Жаффе Г., Керран Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика. Том 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А.– М.: Наука, 1966.– С. 204–326.
13. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки.– М.: Наука, 1982.– 567 с.
14. Тамм И. Е. Основы теории электричества.– М.: Наука, 1976.– 616 с.
15. Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С., Павлюк И. А. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.– К.: Вища школа, 1974.– 472 с.
16. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.– М.: Наука, 1979.– 832 с.