

УДК 539.1

## ДИФРАКЦІЯ НОРМАЛЬНИХ SH-ХВИЛЬ НА РОЗРІЗІ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ У ПРУЖНОМУ ХВИЛЕВОДІ

М. Я. СЕМКІВ\*, Г. М. ЗРАЖЕВСЬКИЙ, В. Т. МАЦИПУРА

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

вул. Володимирська, 64/13, 01601, МСП, Київ, Україна

\*E-mail: mishasemkiv@gmail.com

Одержано 20.06.2013

Розглянуто поширення нормальних SH-хвиль у пружному хвилеводі зі скінченим розрізом та вільними від напружень стінками. Проведено аналіз дифракції пружних хвиль на розрізі. Для розв'язання задачі використано метод часткових областей, який зводить її до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих амплітуд. Одержана система розв'язувалась модифікованим методом лишків аналітичної функції, який базується на обчисленні контурного інтеграла як суми лишків аналітичної функції у комплексній площині. Її властивості визначаються положенням нулів і полюсів, вибраних так, щоб сума лишків співпадала зі згаданою системою. При цьому можливо ототожнити коефіцієнти при невідомих у рівняннях з лишками. Наявність скінченного розрізу породжує додаткову нескінченну систему алгебраїчних рівнянь внаслідок зсуву нулів. У результаті чисельного розв'язання задачі обчислено частотні залежності енергетичних коефіцієнтів відбиття й проникнення нормальних SH-хвиль через область, яка містить розріз скінченної довжини.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** пружний хвилевід, нормальна SH-хвиля, коефіцієнти проходження й відбиття, розріз, метод лишків

Рассмотрено распространение SH-волн в упругом волноводе с конечным разрезом и свободными от напряжений стенками. Проведен анализ дифракции упругих волн на разрезе. Для решения задачи использован метод частичных областей, сводящий ее к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд. Полученная система решалась модифицированным методом вычетов аналитической функции, который базируется на вычислении контурного интеграла как суммы вычетов аналитической функции в комплексной плоскости. Ее свойства определяются расположением нулей и полюсов, выбранных так, чтобы сумма вычетов совпадала с упомянутой системой. При этом возможно отождествить коэффициенты при неизвестных в уравнениях с вычетами. Наличие конечного разреза порождает дополнительную бесконечную систему алгебраических уравнений из-за сдвига нулей функции. В результате численного решения задачи вычислены частотные зависимости энергетических коэффициентов отражения и прохождения нормальных SH-волн через область, содержащую разрез конечной длины.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** упругий волновод, нормальная SH-волна, коэффициенты прохождения и отражения, разрез, метод вычетов

The paper deals with considering of propagation of SH-wave in the elastic waveguide with a finite length crack and stress-free boundaries. A diffraction of elastic waves on a crack is analyzed. The method of partial domains is used for solving of the problem, that reduces it to the infinite system of algebraic equations with respect to unknown amplitudes. The obtained system is solved by the modified method of residues of analytical function which is based on calculating of the contour integral as a sum of residues of analytical function in the complex plane. The properties of this function are determined by location of the poles and zeros chosen so that the residue series coincide with the abovementioned system. In doing so, the coefficients at the unknown values in equations may be identified with the residues. Presence of the finite crack gives rise to the additional infinite system of algebraic equations caused by the shift of zeroes of the function. The numerical solution of the problem yields the frequency dependencies of energy transmission and reflection coefficients through the domain containing the finite crack.

**KEY WORDS:** an elastic waveguide, normal SH-wave, transmission and reflection coefficients, crack, method of residues

### ВСТУП

Задачі поширення пружних хвиль у хвилеводах з неоднорідностями у вигляді розрізів, порожнин або екранів займають особливе місце в акустиці, оскільки при їхньому розв'язанні, з одного боку, даються конкретні відповіді на запити техніки, біології тощо; а з іншого – розробляється складний чисельно-аналітичний апарат для опису дифракції хвиль.

Великий масив результатів, які ілюструють за-

кономірності поширення пружних, акустичних і електромагнітних хвиль у нерегулярних хвилеводах, міститься у публікаціях [2–11]. Так, на основі методу часткових областей (відомого також як метод зшивання хвильових полів) розв'язані задачі дифракції пружних [1, 11] і електромагнітних хвиль [2, 9, 10] на півнескінченному розрізі. Дані про поширення акустичних хвиль у рідинних хвилеводах з відгалуженнями чи хвилеводах складених під кутом з двох частин можна знайти [3–5, 7]. У роботі [1] розв'язано задачу про дифракцію

нормальних SH-хвиль у пружному хвилеводі на півнескінченному розрізі й отримано точний аналітичний розв'язок. Логічним видається продовжити дослідження даної тематики, а саме узагальнити задачу на випадок розрізу скінченної довжини.

Відомо, що наявність розрізу скінченної довжини у хвилеводі при застосуванні методу часткових областей приводить до системи рівнянь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\gamma_n - \Gamma_m} + \frac{\rho_m}{\gamma_n + \Gamma_m} \right] A_n = \frac{1}{\gamma_q + \Gamma_m} + \frac{\rho_m}{\gamma_q - \Gamma_m}, \quad (1)$$

$$m, q = 1, 2, 3, \dots$$

де  $\gamma_n, \rho_m$  – відомі;  $\Gamma_n$  – визначаються з додаткової системи рівнянь;  $A_n$  – шукані величини. Відзначимо, що при  $\rho_m \equiv 0$  система вироджується до вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n - \Gamma_m} A_n = \frac{1}{\gamma_q + \Gamma_m}, \quad (2)$$

$$m, q = 1, 2, 3, \dots$$

і її вдається розв'язати точно, наприклад, за допомогою методу лишків [1]. В багатьох задачах, зокрема і в даній, множник  $\rho_m$  експоненціально спадає. Це дозволяє розглядати розв'язок системи рівнянь (1) як збурення точного розв'язку задачі (2).

Мета цього дослідження – побудова чисельно-аналітичного розв'язку задачі про поширення нормальних SH-хвиль у хвилеводі із скінченною трищиною за допомогою модифікованого методу лишків, а також отримання виразів для переміщень у кожній із часткових областей.

## 1. ДИФРАКЦІЯ НОРМАЛЬНИХ SH-ХВИЛЬ НА РОЗРІЗІ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ

### 1.1. Постановка краєвої задачі у спектральному представленні

Нехай гармонічна (з частотою  $\omega$ ) нормальна SH-хвиля поширюється в однорідному пружному хвилеводі  $x_1 \in R, x_3 \in [0, a]$ , який містить розріз скінченної довжини  $0 \leq x_1 \leq l, x_3 = b$  (рис. 1). Стінки хвилеводу, а також береги розрізу вважаємо вільними від напружень. Середовище хвилеводу характеризується густиною  $\rho$  і швидкістю поперечних хвиль  $c_t$ .

Виділимо у хвилеводі чотири області існування пружної хвилі: область  $A - x_1 < 0, x_3 \in [0, a]$ ;

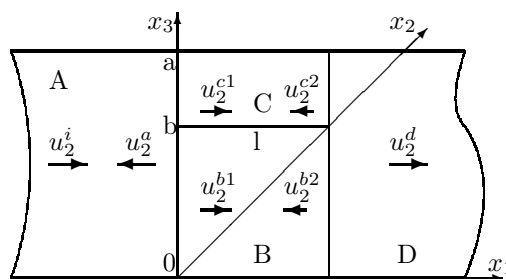


Рис. 1. Геометрія плоского хвилеводу

область  $B - x_1 \in [0, l], x_3 \in [0, b]$ ; область  $C - x_1 \in [0, l], x_3 \in [b, a]$ ; і область  $D - x_1 > l, x_3 \in [0, a]$ . Зазначимо, що таке розбиття дозволяє надалі в кожній з підобластей використати метод розділення змінних. В області  $A$  поширюється нормальна SH-хвиля, яка викликає зміщення вздовж осі  $Ox_2$  і задається у вигляді

$$u_2^i = A \cos \frac{q\pi x_3}{a} e^{-\gamma_{qa} x_1}, \quad q = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Тут  $A$  – амплітуда набігаючої хвилі;  $q$  – номер нормальної хвилі. Сталу поширення знаходимо з виразу

$$\gamma_{qa} = \begin{cases} \sqrt{(q\pi/a)^2 - k_t^2}, & (q\pi/a)^2 > k_t^2, \\ -i\sqrt{k_t^2 - (q\pi/a)^2}, & (q\pi/a)^2 < k_t^2, \end{cases}$$

де  $k_t = \omega/c_t$ . Часовий множник  $\exp\{-i\omega t\}$  тут і надалі не пишемо. Переміщення в областях  $A, B, C$  і  $D$  дифрагованого поля позначимо як  $u_2^a, u_2^b, u_2^c$  й  $u_2^d$  відповідно.

Усі переміщення у хвилеводі задовольняють рівняння Гельмгольца:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k_t^2 \right] u_2^s = 0, \quad s = i, a, b, c, d, \quad (4)$$

а також граничні умови на вільних межах хвилеводу і розрізу  $\sigma_{32} = \mu \partial u_2 / \partial x_3 = 0$  (тут  $u_2$  відповідає зміщенню в кожній з підобластей,  $\mu$  – модуль зсуву), і умови спряження на межах поділу підобластей  $x_1 = 0, x_3 \in [0, a]$  і  $x_1 = l, x_3 \in [0, a]$ , які встановлюють неперервність зміщень і напружень  $\sigma_{12} = \mu \partial u_2 / \partial x_1$  на них.

Відповідно до зазначених граничних умов, поля відбитої хвилі  $u_2^a$ , прохідних в підобласті  $B, C$  хвиль  $u_2^b, u_2^c$  а також хвилі  $u_2^d$ , яка поширюється в області  $D$ , можна подати у вигляді суперпозиції

нормальних SH-хвиль для кожної з них:

$$\begin{aligned}
 u_2^a &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x_3}{a} e^{\gamma_{na} x_1}, \\
 u_2^b &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n1} \cos \frac{n\pi x_3}{b} e^{-\gamma_{nb} x_1} + \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} B_{n2} \cos \frac{n\pi x_3}{b} e^{\gamma_{nb} (x_1-l)}, \\
 u_2^c &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n1} \cos \frac{n\pi (x_3-b)}{c} e^{-\gamma_{nc} x_1} + \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n2} \cos \frac{n\pi (x_3-b)}{c} e^{\gamma_{nc} (x_1-l)}, \\
 u_2^d &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos \frac{n\pi x_3}{a} e^{-\gamma_{na} (x_1-l)}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Тут

$$\gamma_{ns} = \begin{cases} \sqrt{(n\pi/s)^2 - k_t^2}, & (n\pi/s)^2 > k_t^2, \\ -i\sqrt{k_t^2 - (n\pi/s)^2}, & (n\pi/s)^2 < k_t^2, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \dots; \quad s = a, b, c, d.$

Таке представлення полів задовольняє сформульовані граничні умови.

Розписуючи умови спряження і використовуючи властивість ортогональності набору функцій типу  $\cos(n\pi x_3/a)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , отримуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 -\frac{2ab}{\pi} i k_t A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mb}} + \frac{\rho_{mb} A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mb}} \right) &= \\
 = \left( \frac{1}{\gamma_{qa} + \gamma_{mb}} + \frac{\rho_{mb}}{\gamma_{qa} - \gamma_{mb}} \right) A', & \\
 \frac{2ac}{\pi} i k_t A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mc}} + \frac{\rho_{mc} A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mc}} \right) &= \\
 = \left( \frac{1}{\gamma_{qa} + \gamma_{mc}} + \frac{\rho_{mc}}{\gamma_{qa} - \gamma_{mc}} \right) A', &
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned}
 A' &= A_q \sin \frac{q\pi b}{a}, \quad A'_n = n \sin \frac{n\pi b}{a} A_n, \\
 \rho_{ms} &= e^{-2\gamma_{ms} l}, \quad s = b, c; \\
 m &= 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

а коефіцієнти  $B_{n1}$ ,  $B_{n2}$  і  $C_{n1}$ ,  $C_{n2}$  виражаються через амплітудні коефіцієнти  $A_n$  наступним чином:

$$\begin{aligned}
 B_{m1} &= \frac{(-1)^m \pi}{2a \rho_{mb} \delta_{mb} \gamma_{mb}} \left\{ -\frac{2ab}{\pi} i k_t A_0 \delta_m^0 + \right. \\
 &\quad + \left[ \frac{A'}{\gamma_{qa} - \gamma_{mb}} + \frac{\rho_{mb} A'}{\gamma_{qa} + \gamma_{mb}} \right] - \\
 &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mb}} + \frac{\rho_{mb} A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mb}} \right] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 B_{m2} &= \frac{(-1)^m \pi}{2a \delta_{mb} \gamma_{mb}} \left\{ -\frac{2ab}{\pi} i k_t A_0 \delta_m^0 + \right. \\
 &\quad + \left[ \frac{A'}{\gamma_{qa} + \gamma_{mb}} + \frac{\rho_{mb} A'}{\gamma_{qa} - \gamma_{mb}} \right] - \\
 &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mb}} + \frac{\rho_{mb} A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mb}} \right] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 C_{m1} &= \frac{-\pi}{2a \rho_{mc} \delta_{mc} \gamma_{mc}} \left\{ -\frac{2ac}{\pi} i k_t A_0 \delta_m^0 + \right. \\
 &\quad + \left[ \frac{A'}{\gamma_{qa} - \gamma_{mc}} + \frac{\rho_{mc} A'}{\gamma_{qa} + \gamma_{mc}} \right] - \\
 &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mc}} + \frac{\rho_{mc} A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mc}} \right] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 C_{m2} &= \frac{-\pi}{2a \delta_{mc} \gamma_{mc}} \left\{ -\frac{2ac}{\pi} i k_t A_0 \delta_m^0 + \right. \\
 &\quad + \left[ \frac{A'}{\gamma_{qa} + \gamma_{mc}} + \frac{\rho_{mc} A'}{\gamma_{qa} - \gamma_{mc}} \right] - \\
 &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mc}} + \frac{\rho_{mc} A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mc}} \right] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

$$\delta_m^n = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n; \end{cases} \quad \delta_{ms} = \begin{cases} s, & m = 0, \\ s/2, & m > 0. \end{cases}$$

Для отримання розв'язку системи рівнянь (6) застосуємо модифікований метод лишків [2, 15].

### 1.2. Модифікований метод лишків

Відзначимо суттєву особливість рівнянь (6), яка буде використана нижче – множники  $\rho_{ms}$  у них експоненціально спадають при  $m \rightarrow \infty$ . Якщо у рівняннях (6) опустити члени, пропорційні  $\rho_{ms}$ , то

новоутворене матричне рівняння можна розв'язати точно [1]. Виходячи з цього, почнемо будувати розв'язок системи (6) як збурення точного розв'язку простішої системи з  $\rho_{ms} \equiv 0$ .

Розглянемо інтеграли

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \left[ \frac{g(w)}{w - \gamma_{mb}} + \rho_{mb} \frac{g(w)}{w + \gamma_{mb}} \right] dw,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \left[ \frac{g(w)}{w - \gamma_{mc}} + \rho_{mc} \frac{g(w)}{w + \gamma_{mb}} \right] dw, \quad (12)$$

$$m = 0, 1, \dots$$

де  $C_R$  – коло радіуса  $R$  в комплексній площині змінної  $w$ , що проходить у напрямку проти годинникової стрілки. Функція  $g(w)$  задовольняє такі умови:

- 1)  $g(w)$  – аналітична функція змінної  $w$  у всіх точках області  $C_R$ , за винятком полюсів першого порядку  $w = \gamma_{na}$  і  $w = -\gamma_{qa}$ , ( $n, q = 0, 1, 2, \dots$ ).
- 2)  $g(\gamma_{mb}) + \rho_{mb}g(-\gamma_{mb}) = 0$ .
- 3)  $g(\gamma_{mc}) + \rho_{mc}g(-\gamma_{mc}) = 0$ .
- 4) Лишок функції  $g(w)$  в точці  $w = -\gamma_{qa}$ , що позначається  $\operatorname{res}_{w \rightarrow -\gamma_{qa}} g(w)$ , становить  $A' = Aq \sin(q\pi b/a)$ .
- 5) Поведінка функції  $g(w)$  на нескінченності має алгебраїчний характер, тобто  $g(w) = O(w^{-1/2})$ ,  $|w| \rightarrow \infty$ .
- 6)  $g(-ik_t) + \rho_0 g(ik_t) = 0$ .

Тут скрізь  $\rho_0 = \rho_{0b} = \rho_{0c} = \exp\{2ikt\}$ .

При  $R \rightarrow \infty$  контур  $C_R$  охоплює всі нулі й полюси, зазначені у властивостях функції  $g(w)$ . Виражаючи інтеграли (12) у вигляді сум лишків у полюсах функції  $g(w)$  і прирівнюючи результат до нуля, отримуємо

$$[g(-ik_t) + \rho_0 g(ik_t)] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\gamma_{na} - \gamma_{mb}} + \frac{\rho_{mb}}{\gamma_{na} + \gamma_{mb}} \right) \times$$

$$\times \operatorname{res}_{w \rightarrow \gamma_{na}} g(w) =$$

$$= \left( \frac{1}{\gamma_{qa} + \gamma_{mb}} + \frac{\rho_{mb}}{\gamma_{qa} - \gamma_{mb}} \right) A', \quad (13)$$

$$[g(-ik_t) + \rho_0 g(ik_t)] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\gamma_{na} - \gamma_{mc}} + \frac{\rho_{mc}}{\gamma_{na} + \gamma_{mc}} \right) \times$$

$$\times \operatorname{res}_{w \rightarrow \gamma_{na}} g(w) =$$

$$= \left( \frac{1}{\gamma_{qa} + \gamma_{mc}} + \frac{\rho_{mc}}{\gamma_{qa} - \gamma_{mc}} \right) A'. \quad (14)$$

Тут враховано, що, згідно з умовою 4,  $\operatorname{res}_{w \rightarrow -\gamma_{qa}} g(w) = A'$  і  $\gamma_{0b} = \gamma_{0c} = -ik_t$ .

Порівнюючи вирази (6) і (13), (14), отримуємо

$$A_n n \sin \frac{n\pi b}{a} = \operatorname{res}_{w \rightarrow \gamma_{na}} g(w),$$

$$-\frac{2ab}{\pi} ik_t A_0 = g(-ik_t) + g(ik_t) = \frac{2ac}{\pi} ik_t A_0, \quad (15)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

З другого рівняння системи (15) випливає, що  $A_0 = 0$ , тобто нульова мода у відбитій хвилі  $u_2^a$  має нульову амплітуду.

При  $\rho_{ms} \equiv 0$  функція  $g(w)$  переходить у  $f(w)$ , яка має вигляд [1]:

$$f(w) = \frac{q \sin(q\pi b/a)}{\gamma_{qa} + w} \frac{1 + w/ik_t}{1 - \gamma_{qa}/ik_t} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{w + \gamma_{qa}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - w/\gamma_{nb}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nb}} e^{(w + \gamma_{qa})b/n\pi} \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - w/\gamma_{nc}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nc}} e^{(w + \gamma_{qa})c/n\pi} \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{na}}{1 - w/\gamma_{na}} e^{-(w + \gamma_{qa})a/n\pi}. \quad (16)$$

З умов 2 і 3 випливає, що нулі функції  $g(w)$  (назвемо їх  $\{\Gamma_{mb}\}$ ,  $\{\Gamma_{mc}\}$ ) зсунуті відносно нулів  $\{\gamma_{mb}\}$ ,  $\{\gamma_{mc}\}$  функції  $f(w)$ . Виходячи з цього, можна записати

$$g(w) = f(w)p(w) \frac{1 - w/\Gamma_0}{1 - w/\gamma_0} \times$$

$$\times \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - w/\Gamma_{nb})(1 - w/\Gamma_{nc})}{(1 - w/\gamma_{nb})(1 - w/\gamma_{nc})}. \quad (17)$$

З умови 5 для функції  $g(w)$  при урахуванні  $f(w) = O(w^{-1/2})$  для  $|w| \rightarrow \infty$  отримуємо такі

асимптотичні розклади:

$$p(w) = p_0 = \text{const},$$

$$\frac{1-w/\Gamma_0}{1-w/\gamma_0} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-w/\Gamma_{ns}}{1-w/\gamma_{ns}} = O(1). \quad (18)$$

Константа  $p_0$  визначається з умови 4:

$$p_0 = \frac{1+i\frac{\gamma_{qa}}{k}}{1+\frac{\gamma_{qa}}{\Gamma_0}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{\gamma_{qa}}{\gamma_{nb}}\right)\left(1+\frac{\gamma_{qa}}{\gamma_{nc}}\right)}{\left(1+\frac{\gamma_{qa}}{\Gamma_{nb}}\right)\left(1+\frac{\gamma_{qa}}{\Gamma_{nc}}\right)}. \quad (19)$$

З представлення (18) випливає, що

$$\Gamma_{ns} \approx \gamma_{ns} + \Delta_{ns}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (20)$$

де  $\Delta_{ns}$  – невідомі сталі, залежні від  $n$ , причому  $\Gamma_{ns} \approx \gamma_{ns}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким чином, зміщені нулі  $\{\Gamma_{ns}\}$  асимптотично не відрізняються від  $\{\gamma_{ns}\}$ . Априорне знання асимптотики  $\{\Gamma_{ns}\}$  суттєвим чином використовується в подальших міркуваннях.

Для повної побудови функції  $g(w)$  залишилось визначити систему зміщених нулів  $\{\Gamma_{ns}\}$ . Підставивши вираз (17) в умови 2, 3, 6 для функції  $g(w)$  і провівши певні перетворення, отримаємо

$$\frac{1-\frac{\gamma_0}{\Gamma_0}}{1+\frac{\gamma_0}{\Gamma_0}} \times \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nb}}\right)\left(1-\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nc}}\right)\left(1+\frac{\gamma_0}{\gamma_{na}}\right)}{\left(1+\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nb}}\right)\left(1+\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nc}}\right)\left(1-\frac{\gamma_0}{\gamma_{na}}\right)} =$$

$$= -\rho_0 \exp \left\{ -\frac{2\gamma_0}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{\gamma_{qa} + \gamma_0}{\gamma_{qa} - \gamma_0}, \quad (21)$$

$$\frac{1-\frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_0}}{1+\frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_0}} \times \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nb}}\right)\left(1-\frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nc}}\right)\left(1+\frac{\gamma_{mb}}{\gamma_{na}}\right)}{\left(1+\frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nb}}\right)\left(1+\frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nc}}\right)\left(1-\frac{\gamma_{mb}}{\gamma_{na}}\right)} =$$

$$= -\rho_{mb} \exp \left\{ -\frac{2\gamma_{mb}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{\gamma_{qa} + \gamma_{mb}}{\gamma_{qa} - \gamma_{mb}}, \quad (22)$$

$$\frac{1-\frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_0}}{1+\frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_0}} \times \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nb}}\right)\left(1-\frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nc}}\right)\left(1+\frac{\gamma_{mc}}{\gamma_{na}}\right)}{\left(1+\frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nb}}\right)\left(1+\frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nc}}\right)\left(1-\frac{\gamma_{mc}}{\gamma_{na}}\right)} =$$

$$= -\rho_{mc} \exp \left\{ -\frac{2\gamma_{mc}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{\gamma_{qa} + \gamma_{mc}}{\gamma_{qa} - \gamma_{mc}}, \quad (23)$$

де  $\rho_{ms} = \exp\{-2\gamma_{ms}\}$ ,  $s = (b, c)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$

Отримані рівняння (21)–(23) дають змогу визначити систему зміщених нулів  $\{\Gamma_{ms}\}$ . Відзначимо, що розв'язки цієї нескінченної системи збігаються набагато швидше, ніж розв'язки рівнянь (6). Окрім того, априорі відома асимптотика  $\{\Gamma_{ms}\}$ , що також спрощує розв'язання отриманої системи.

### 1.3. Матричний метод

При розв'язанні системи (21)–(23) використаємо матричний метод. Для цього подамо її рівняння у вигляді

$$\frac{1-\frac{\gamma_0}{\Gamma_0}}{1+\frac{\gamma_0}{\Gamma_0}} \prod_{n=0}^M \frac{\left(1-\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nb}}\right)\left(1-\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nc}}\right)}{\left(1+\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nb}}\right)\left(1+\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nc}}\right)} =$$

$$= -\rho_0 \exp \left\{ -\frac{2\gamma_0}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{\gamma_{qa} + \gamma_0}{\gamma_{qa} - \gamma_0} \prod_{n=0}^M \frac{1-\frac{\gamma_0}{\gamma_{na}}}{1+\frac{\gamma_0}{\gamma_{na}}} \times$$

$$\times \prod_{n=M+1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nb}}\right)\left(1+\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nc}}\right)\left(1-\frac{\gamma_0}{\gamma_{na}}\right)}{\left(1-\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nb}}\right)\left(1-\frac{\gamma_0}{\Gamma_{nc}}\right)\left(1+\frac{\gamma_0}{\gamma_{na}}\right)}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - \frac{\gamma_{mb}}{\gamma_0}}{1 + \frac{\gamma_{mb}}{\gamma_0}} \prod_{n=0}^M \frac{\left(1 - \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nb}}\right) \left(1 - \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nc}}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nb}}\right) \left(1 + \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nc}}\right)} = \\
 & = -\rho_{mb} \exp \left\{ -\frac{2\gamma_{mb}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times \\
 & \times \frac{\gamma_{qa} + \gamma_{mb}}{\gamma_{qa} - \gamma_{mb}} \prod_{n=0}^M \frac{1 - \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{na}}}{1 + \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{na}}} \times \\
 & \times \prod_{n=M+1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nb}}\right) \left(1 + \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nc}}\right) \left(1 - \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{na}}\right)}{\left(1 - \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nb}}\right) \left(1 - \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{nc}}\right) \left(1 + \frac{\gamma_{mb}}{\Gamma_{na}}\right)}, \\
 & \frac{1 - \frac{\gamma_{mb}}{\gamma_0}}{1 + \frac{\gamma_{mc}}{\gamma_0}} \prod_{n=0}^M \frac{\left(1 - \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nb}}\right) \left(1 - \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nc}}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nb}}\right) \left(1 + \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nc}}\right)} = \\
 & = -\rho_{mc} \exp \left\{ -\frac{2\gamma_{mc}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times \\
 & \times \frac{\gamma_{qa} + \gamma_{mc}}{\gamma_{qa} - \gamma_{mc}} \prod_{n=0}^M \frac{1 - \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{na}}}{1 + \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{na}}} \times \\
 & \times \prod_{n=M+1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nb}}\right) \left(1 + \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nc}}\right) \left(1 - \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{na}}\right)}{\left(1 - \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nb}}\right) \left(1 - \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{nc}}\right) \left(1 + \frac{\gamma_{mc}}{\Gamma_{na}}\right)}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Вибираючи достатньо велике  $M$  (зазвичай, на практиці достатньо обмежитися значеннями 5 або 6 [2]), можна замінити з достатньо малою похибкою всі  $\{\Gamma_{ns}\}$  при  $n > M$  у правій частині (24)–(26) їхніми асимптотичними величинами (18). Слід звернути увагу на один момент: оскільки зміщені нулі  $\{\Gamma_{ns}\}$  асимптотично не відрізняються від нулів  $\{\gamma_{ns}\}$ , то на перший погляд здається, що праві частини рівнянь (25)–(26) містять ділення на 0. Проте слід розглядати не самі знаменники, а відношення  $\rho_{ms}$  до зміщених нулів – воно вже не буде сингулярним, а збігатиметься до деякого скінченного числа. Замінюючи зміщені нулі вищого за  $M$  порядку незміщеними, можна виразити перші  $2M+1$  рівнянь системи (24)–(26) наступним чином:

$$\begin{aligned}
 Q(\gamma_0) &= t_0 Q(-\gamma_0), \\
 Q(\gamma_{mb}) &= t_{mb} Q(-\gamma_{mb}), \\
 Q(\gamma_{mc}) &= t_{mc} Q(-\gamma_{mc}).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Тут  $t_0$  і  $t_{ms}$  визначаються з системи (24)–(26),  $m = 1, 2, \dots, M$ ; функція  $Q(w)$  має вигляд

$$Q(w) = \left(1 - \frac{w}{\gamma_0}\right) \prod_{n=1}^M \left(1 - \frac{w}{\Gamma_{nb}}\right) \left(1 - \frac{w}{\Gamma_{nc}}\right). \tag{28}$$

Перепишемо останню так:

$$\begin{aligned}
 Q(w) &= \left(1 - \frac{w}{\gamma_0}\right) \prod_{n=1}^M \left(1 - \frac{w}{\gamma_{nb}}\right) \left(1 - \frac{w}{\gamma_{nc}}\right) \times \\
 & \times \left[ 1 + \frac{F_0}{1 - \frac{w}{\gamma_0}} + \sum_{n=1}^M \left( \frac{F_{nb}}{1 - \frac{w}{\gamma_{nb}}} + \frac{F_{nc}}{1 - \frac{w}{\gamma_{nc}}} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{29}$$

де додатковий множник враховує збурення, обумовлені зміщенням нулів із точок  $\{\gamma_{ms}\}$  у  $\{\Gamma_{ms}\}$ . Підстановка виразів (29) у рівняння (27) приводить до системи лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів  $\{F_0\}$ ,  $\{F_{nb}\}$  і  $\{F_{nc}\}$ , яку вдається розв'язати чисельно.

Таким чином, використання модифікованого методу лишків призвело до розв'язання допоміжної системи рівнянь (24)–(26) відносно невідомих  $F_0$ ,  $F_{mb}$  і  $F_{mc}$ . Зазначимо, що, при виборі геометричних параметрів хвилеводу таким чином, щоб відношення  $b/a$  було раціональним числом, у системі (24)–(26) може з'явитись певна кількість однакових рівнянь. Це пов'язано з тим, що при такому виборі відношення  $b/a$  хвильові числа  $\gamma_{mb}$  і  $\gamma_{mc}$  можуть співпасти (наприклад, при  $b/a = 3/4$  маємо  $\gamma_{3b} = \gamma_{1c}$ ). У цьому випадку слід прирівняти відповідні невідомі величини (для нашого конкретного прикладу –  $F_{3b} = F_{1c}$ ).

Отримавши з рівнянь (27) значення  $\{F_0\}$ ,  $\{F_{nb}\}$  і  $\{F_{nc}\}$ , побудуємо функцію  $Q(w)$  з урахуванням формули (29). Тоді шукана функція  $g(w)$  матиме вигляд

$$\begin{aligned}
 g(w) &= \frac{q \sin q\pi \frac{b}{a}}{\gamma_{qa} + w} \times \\
 & \times \exp \left\{ \frac{\gamma_{qa} + w}{\pi} \left[ b \log \frac{a}{b} + c \log \frac{a}{c} \right] \right\} \times \\
 & \times \frac{Q(w)}{Q(-\gamma_{qa})} \prod_{n=1}^M \frac{1 + \frac{\gamma_{qa}}{w}}{1 - \frac{\gamma_{na}}{w}} \times \\
 & \times \prod_{n=M+1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{w}{\gamma_{nb}}\right) \left(1 - \frac{w}{\gamma_{nc}}\right) \left(1 + \frac{\gamma_{qa}}{\gamma_{na}}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma_{qa}}{\gamma_{nb}}\right) \left(1 + \frac{\gamma_{qa}}{\gamma_{nc}}\right) \left(1 - \frac{w}{\gamma_{na}}\right)}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Невідомі амплітудні коефіцієнти  $\{A_n\}$  виражаються через функцію  $g(w)$  наступним чином:

$$A_n = \frac{\operatorname{res}_{w \rightarrow \gamma_{na}} g(w)}{n \sin n\pi b/a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Провівши аналогічні міркування, визначимо амплітуди дифрагованих полів в областях  $B$ ,  $C$  і  $D$ :

$$\begin{aligned} B_{m1} &= \frac{(-1)^m \pi}{2a\gamma_{mb}\delta_{mb}} g(-\gamma_{nb}), \\ B_{m2} &= \frac{(-1)^m \pi}{2a\gamma_{mb}\delta_{mb}\rho_{mb}} g(-\gamma_{nb}), \\ C_{m1} &= \frac{\pi}{2a\gamma_{mc}\delta_{mc}} g(-\gamma_{nc}), \\ C_{m2} &= \frac{\pi}{2a\gamma_{mc}\delta_{mc}\rho_{mc}} g(-\gamma_{nc}), \\ D_m &= g(\gamma_{ma}). \end{aligned} \quad (32)$$

Таким чином, модифікований метод лишків дозволив отримати амплітуди нормальних хвиль дифрагованих полів у всіх областях хвилеводу.

При проведенні чисельних розрахунків в отриманих виразах слід замінити нескінченні добутки і суми скінченними. Похибку такої редукції було визначено в [1]. Так, для добутку

$$\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma_{nb}}\right) \exp \frac{b\alpha}{n\pi}$$

вона не перевищує  $|\alpha b/\pi|^2/N$ , якщо тільки  $|\alpha b/\pi|^2/N \ll 1$ .

## 2. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для ілюстрації отриманих результатів розглянемо конкретний випадок – хвилевід з розмірами  $b=3a/4$ ,  $c=a/4$ ,  $l=a$ .

Розглянемо коефіцієнт відбиття  $V_a$  – відношення середнього потоку потужності відбитої хвилі  $u_2^a$  в області  $A$  до середнього потоку потужності  $q$ -ої моди, яка набігає в області  $A$  на межу розподілу підобластей  $x_1=0$ ,  $x_3 \in [0, a]$ . Він визначається формулою

$$V_a = \frac{\int_0^a \operatorname{Re} \left[ \sigma_{12} \left( \frac{\partial u_2^a}{\partial t} \right)^* \right] dx_3}{\int_0^a \operatorname{Re} \left[ \sigma_{12} \left( \frac{\partial u_2^i}{\partial t} \right)^* \right] dx_3}. \quad (33)$$

Після тривіальних перетворень отримуємо:

$$V_a = \sum_{n=0}^{N_a} V_n, \quad V_n = \frac{|\gamma_{na}|}{|\gamma_{qa}|} |A_n|^2. \quad (34)$$

Згідно з виразом (34),  $V_a$  подано у вигляді суми енергетичних коефіцієнтів збурення  $V_n$  нормальних SH-хвиль в області  $A$ .

Коефіцієнт проникнення  $W_d$  – відношення середнього потоку потужності хвилі  $u_2^d$ , що пройшла в область  $D$ , до середнього потоку потужності  $q$ -ої моди, що набігає в області  $A$  – визначається формулою

$$W_d = \sum_{n=0}^{N_a} W_n, \quad W_n = \frac{|\gamma_{na}|}{|\gamma_{qa}|} |D_n|^2. \quad (35)$$

Аналогічно коефіцієнти проникнення хвилі в підобластях  $B$  і  $C$  (див. рис. 1) визначаються як відношення середнього потоку потужності хвиль в підобластях  $B$  або  $C$  до середнього потоку потужності  $q$ -ої нормальної хвилі, що набігає на розріз у підобласті  $A$ :

$$\begin{aligned} W_b &= \frac{\omega\mu}{2\gamma_{qa}} \frac{b}{a} \left\{ \sum_{n=1}^{N_b} \delta_{nb}\gamma_{nb} \left( |B_{n1}|^2 - |B_{n2}|^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\operatorname{Re} \sum_{n=N_b+1}^{\infty} \delta_{nb}\gamma_{nb} i \operatorname{Im} \left( B_{n1} B_{n2}^* e^{-\gamma_{nb}l} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} W_c &= \frac{\omega\mu}{2\gamma_{qa}} \frac{c}{a} \left\{ \sum_{n=1}^{N_c} \delta_{nc}\gamma_{nc} \left( |C_{n1}|^2 - |C_{n2}|^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\operatorname{Re} \sum_{n=N_c+1}^{\infty} \delta_{nc}\gamma_{nc} i \operatorname{Im} \left( C_{n1} C_{n2}^* e^{-\gamma_{nc}l} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Тут  $N_a$ ,  $N_b$ ,  $N_c$  – кількість біжучих мод в областях  $A$ ,  $B$  і  $C$  відповідно. Перші доданки у виразах (36), (37) визначають інтенсивність потоку потужності біжучих мод, а другі – внесок неоднорідних мод.

Результат падіння нульової моди на розріз очевидний – відповідно до властивостей поверхонь хвилеводу і розрізу, потік її енергії проходить в області  $B$  і  $C$ , розділившись на дві частини, пропорційно розмірам  $b$  і  $c$ . Відбита хвиля у цьому випадку відсутня.

Розглянемо дифракцію першої нормальної хвилі на розрізі ( $q=1$ ). При цьому хвильовий розмір області  $A$  змінюється в межах  $\pi < k_l a < 2\pi$ , тобто однорідними у ній будуть нульова і перша моди.

Згідно з побудованим розв'язком весь діапазон зміни хвильового розміру області  $A$  природним чином ділиться на два інтервали:

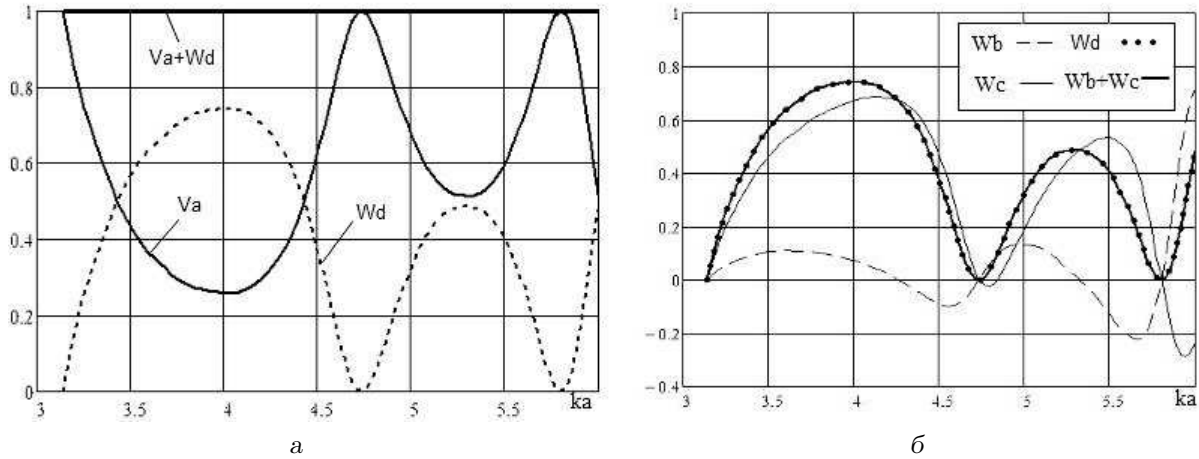


Рис. 2. Залежності енергетичних коефіцієнтів відбиття і проходження від хвильової величини  $k_t a$ : а – коефіцієнти відбиття  $V_a$  і проходження  $W_d$ ; б – коефіцієнти проходження в областях  $B$ ,  $C$  і  $D$  –  $W_b$ ,  $W_c$ ,  $W_d$

- 1) В областях  $B$  і  $C$  однорідними будуть лише нульові нормальні хвилі. Тому їхні хвильові розміри не можуть перевищувати  $k_t b < \pi$  і  $k_t c < \pi$  відповідно. Оскільки  $b = 3a/4$ ,  $c = a/4$ , то для області  $A$  ці обмеження виглядають так:  $k_t a < 4\pi/3$  і  $k_t a < 4\pi$ . Проте, оскільки розглянуті величини  $k_t a$  не перевищують  $2\pi$ , то перший інтервал має бути визначено як  $\pi < k_t a < 4\pi/3$ .
- 2) В області  $B$  однорідними будуть нульова і перша моди, тобто маємо  $4\pi/3 < k_t a < 2\pi$ . Зауважимо, що в області  $C$ , як і раніше, однорідною залишається тільки нульова мода.

Хвильові властивості області  $D$  повністю аналогічні до властивостей області  $A$ .

На рис. 2, а зображено залежності коефіцієнтів відбиття  $V_a$  в області  $A$  і проходження  $W_d$  в область  $D$  першої моди від хвильового розміру  $k_t a = a\omega/c_t$ . У розглянутому діапазоні частот чергуються ділянки зростання й спадання коефіцієнта проникнення. Як показують розрахунки, при подальшому збільшенні хвильового розміру  $k_t a$  хід кривих стає більш плавним і при  $k_t a \geq 7$  область хвилеводу, яка містить тріщину, стає практично звукопрозорою.

Звісно, особливої уваги заслуговують випадки повного відбиття першої нормальної хвилі, котра набігає на тріщину ( $V_a = 1$ ). Згідно з рис. 2, а, це спостерігається при  $k_t a \approx 4.74$  і  $k_t a \approx 5.94$ . Цю ситуацію ілюструє рис. 3, на якому зображено розподіл амплітуди переміщення в околі тріщини при  $k_t a \approx 4.7365$  (градації відтінків від білого до чорного відповідають діапазону модулів переміщення від максимуму до нуля). З графіка видно, що хви-

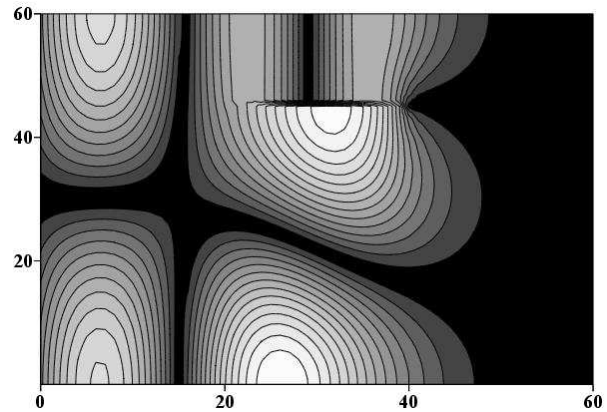


Рис. 3. Поле амплітуди переміщення в околі тріщини на частоті відсікання ( $k_t a = 4.74$ )

льове поле за тріщиною на цій частоті практично не збуджується.

Розрахунок амплітудних множників для однорідних мод в підобластях дає

$$\begin{aligned} |A_0| &= 0, & |A_1| &= 1, \\ |B_{01}| &= |B_{02}| = 0.23, & |B_{11}| &= |B_{12}| = 1.23, \\ |C_{01}| &= |C_{02}| = 0.69, & |D_0| &= |D_1| = 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що в областях  $A$ ,  $B$  і  $C$  назустріч одна одній поширюються хвилі з однаковими амплітудами і це призводить до утворення стоячих хвиль. В області  $A$  стояча хвиля формується першими модами, в області  $B$  – нульовими і першими, в області  $C$  – нульовими. В області  $D$  амплітуди біжучих хвиль дорівнюють нулю, поле утворюється за рахунок неоднорідних хвиль з номерами



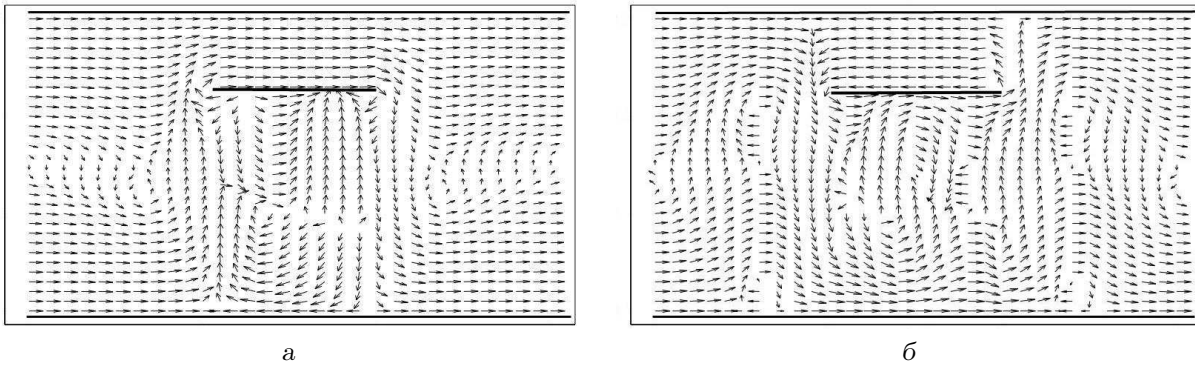


Рис. 4. Поле вектора інтенсивності в околі тріщини:  
а – при  $k_t a = 4.57$ ; б – при  $k_t a = 5.94$

$n > 1$  і локалізується поблизу перерізу  $x = b$ . Таким чином, поле у хвильоводі з тріщиною на так званих частотах відсікання ( $k_t a \approx 4.74$ ,  $k_t a \approx 5.94$ ) можна охарактеризувати як просторовий резонанс у хвильоводі з тріщиною скінченної довжини.

На рис. 2, б показані залежності коефіцієнтів проходження в області  $B$ ,  $C$  і  $D$  від хвильової ширини  $k_t a$ . Очевидно, що при зміні  $k_t a$  від  $\pi$  до  $2\pi$  спостерігається складне співвідношення між потоками енергії в областях  $B$  і  $C$ . Так, при  $\pi < k_t a \leq 5.8$ , за винятком вузької смуги, більша частина енергії проходить крізь область  $C$ , хоча вона й вузла за область  $B$ . При  $k_t a > 5.8$  справедливо  $W_b > W_c$ .

Ще більш цікавою є поява на рис. 2, б ділянок, для яких один з коефіцієнтів  $W_b$  або  $W_c$  стає від'ємним. Це означає, що в одній з областей  $B$  чи  $C$  потік енергії поширюється у напрямку, зворотному до напрямку поширення хвилі в області  $A$ . Такі ситуації ілюструє рис. 4, , на якому показано поле вектора інтенсивності (середнього потоку потужності за період  $T = 2\pi/\omega$ ) в околі тріщини хвильоводу. Тут стрілочки починаються в точках, для яких проводився розрахунок, їхні напрямки визначають напрям потоку потужності. Шуканий вектор інтенсивності обчислювався за відомою формулою [12]:

$$\mathbf{I} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^* \right] = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Re} [i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^*], \quad (38)$$

де  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напруження;  $\mathbf{u}$  – вектор зміщення.

При розгляді плоскої задачі вектор інтенсивності  $\mathbf{I} = \{I_1, I_3\}$  має лише дві компоненти:

$$I_1 = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Re} [i \sigma_{12} u_2^*], \quad I_3 = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Re} [i \sigma_{32} u_2^*], \quad (39)$$

за якими й побудовано поле вектора  $\mathbf{I}$ , показане на рис. 4. Оскільки виявилось, що абсолютні значен-

ня вектора  $\mathbf{I}$  можуть сильно змінюватись від точки до точки, роблячи польову картину малоінформативною, довжини побудованих стрілочок відповідають розподілу логарифму модуля вектора інтенсивності, нормованого на свій мінімум. Це дозволило суттєво вирівняти довжини стрілок, але, звісно, призвело до певної втрати інформації.

Рис. 4, а відповідає значенню  $k_t a = 4.57$  (див. рис. 2, б), коли  $W_b < 0$ , тобто потік енергії з області  $A$  проходить крізь область  $C$ , після чого одна її частина прямує в область  $D$ , а друга повертається в  $B$ . На рис. 4, б ( $k_t a = 5.94$ ) показана ситуація, коли  $W_c < 0$ , тобто вже потік енергії, який виходить з області  $B$ , поділяється на дві частини, що поширюються в областях  $D$  і  $C$  відповідно.

## ВИСНОВКИ

Розглянуто задачу поширення нормальних SH-хвиль у хвильоводі з розрізом скінченної довжини. За допомогою модифікованого методу лишків аналітичної функції нескінченну систему рівнянь відносно невідомих амплітудних коефіцієнтів зведено до швидко збіжної допоміжної системи, яка розв'язувалась чисельно. Вирази для амплітуд дифрагованих полів представлено у вигляді збіжних нескінченних рядів. На основі отриманих результатів побудовано графіки залежності енергетичних коефіцієнтів відбиття й проникнення в підобласті від хвильової ширини хвильоводу  $k_t a$ .

Показано, що в діапазоні  $\pi < k_t a < 2\pi$  залежності енергетичних коефіцієнтів мають досить складний характер, а саме:

- можна виділити діапазони зміни величини  $k_t a$ , де коефіцієнт відбиття  $V_a$  більший за коефіцієнт проходження  $W_d$ , і навпаки;

- існують частоти, на яких область тріщини у хвилеводі стає замкненою для падаючої хвилі, тобто коефіцієнт відбиття становить  $V_a = 1$ ;
  - поле вектора інтенсивності в околі тріщини суттєво змінюється в залежності від хвильового розміру  $k_t a$ , причому можуть спостерігатись від'ємні значення потоків енергії в областях  $B$  або  $C$ .
1. Семків М. Я. Дифракція нормальних SH-хвиль у хвилеводі з розрізом // Акуст. вісн.– 2011.– 14, № 2.– С. 57–69.
  2. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов.– М.: МИР, 1974.– 328 с.
  3. Сторожев В. И., Павлюшина Е. Ю. Нормальные упругие волны в волноводе из состыкованных под углом анизотропных полуслоев.– Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі: К.: Наук. думка, 2007.– 331–338 с.
  4. Грінченко В. Т., Вовк І. В., Маціпура В. Т. Основи акустики.– К.: Наук. думка, 2007.– 640 с.
  5. Гончарова Г. Ю., Маціпура В. Т. Распространение звука в волноводе с изломом // Акуст. вісн.– 1998.– 1, № 2.– С. 57–64.
  6. Городецкая Н. С. Дифракция волн Рэлея–Лэмба на вертикальной границе в составном упругом волноводе // Акуст. вісн.– 2000.– 3, № 1.– С. 23–35.
  7. Маціпура В. Т. Взаимодействие волны с угловой неоднородностью в волноводе // Электроника и связь.– 1997.– 2, № 3.– С. 25–28.
  8. Marcuritz N. Waveguide handbook.– New York: Dover, 1964.– 423 p.
  9. Marcuritz N., Felsen L. Radiation and scattering of waves.– New York: IEEE Press, 1972.– 888 p.
  10. Hurd R. A., Gruenberg H. H-plane bifurcation of rectangular waveguides // Can. J. Phys.– 1954.– 32.– P. 694–701.
  11. Вуцукаксой А., Полат В. A bifurcated waveguide problem // Bull. Tech. Univ. Istanbul.– 1999.– 51.– P. 196–202.
  12. Грінченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
  13. Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике.– М.: Наука, 1966.– 168 с.
  14. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах.– М.: Наука, 1981.– 288 с.
  15. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации.– М.: Сов. радио, 1966.– 432 с.
  16. Титчмарш Е. Теория функций.– М.: Наука, 1980.– 464 с.