

УДК 534.1:534.232

# ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ ЦИЛИНДРАХ ИЗ ЖЕСТКИХ И МЯГКИХ МАТЕРИАЛОВ

В. Т. ГРИНЧЕНКО\*, Г. Л. КОМИССАРОВА

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев  
ул. Желябова, 8/4, 03680, ГСП, Киев-180, Украина  
\*E-mail: grinchenko@hydromech.com.ua

Получено 12.11.2010 ◊ Пересмотрено 21.06.2012

Исследованы свойства нормальных волн в заполненных идеальной сжимаемой жидкостью упругих цилиндрах из жестких и мягких материалов. Для описания волнового поля в цилиндре использована полная система динамических уравнений теории упругости, что позволило изучить эффекты упруго-жидкостного взаимодействия в широком диапазоне частот и длин волн. Представлены данные о дисперсионных, кинематических и энергетических характеристиках нормальных волн. Предложена методика систематизации дисперсионных свойств нормальных волн на основе выделения парциальных подсистем. Установлены существенные различия в проявлении эффектов взаимодействия волн в цилиндре и жидкости для случаев жестких и мягких материалов.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** нормальные волны, дисперсионное уравнение, упруго-жидкостное взаимодействие, парциальная подсистема, жесткость материала

Досліджено властивості нормальних хвиль у заповнених ідеальною стисливою рідиною пружних циліндрах із жорстких та м'яких матеріалів. Для опису хвильового поля в циліндрі використано повну систему рівнянь динамічної теорії пружності, що дозволило провести аналіз пружно-рідинної взаємодії у широкому діапазоні частот і довжин хвиль. Наведено дані про дисперсійні, кінематичні й енергетичні характеристики нормальних хвиль. Запропоновано методику систематизації дисперсійних властивостей нормальних хвиль на основі виділення парціальних підсистем. Встановлено існування суттєвих відмінностей у проявах ефектів взаємодії хвиль у циліндрі й рідині для випадків жорстких і м'яких матеріалів.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** нормальні хвилі, дисперсійне рівняння, пружно-рідинна взаємодія, парціальна підсистема, жорсткість матеріалу

The paper deals with studying of properties of the normal waves in the liquid-filled cylinders made of stiff and compliant materials. A complete system of equations of the dynamic theory of elasticity is used to describe the wave field in the cylinder. This approach allows the analysis of the elastic-liquid interaction in wide range of frequencies and wavelengths. Data on the dispersion, kinematic and energy characteristics of the normal waves are presented. For systematization of the dispersion characteristics of the normal waves, a methodology based on the distinguishing of partial subsystems is proposed. The essential differences in manifestation of wave interaction in the cylinder and liquid are found for the cases of the stiff and compliant materials.

**KEY WORDS:** normal waves, the dispersion equation, the elastic-liquid interaction, partial subsystem, material stiffness

## ВВЕДЕНИЕ

Современный подход к исследованию распространения волн в протяженных телах был заложен в конце XIX века в работах Рэлея, Лэмба, Похгаммера, Кри. На основе соотношений теории упругости для слоя и цилиндра со свободными поверхностями получены дисперсионные уравнения, связывающие частоту и постоянную распространения. Полное же исследование действительных, мнимых и комплексных корней дисперсионных уравнений проведено только в конце XX века. Уровень достигнутого понимания закономерностей распространения волн в изотропном слое и цилиндре достаточно полно изложен в работах [1, 2], содержащих также обзор многочисленных публикаций по этой проблематике.

Исследования волновых процессов в цилиндре с жидкостью стимулировались, прежде всего, стремлением понять закономерности распространения импульсов крови в кровеносных сосудах и распространения жидкости в трубопроводах. Начало интенсивному изучению течения крови в артериях человека положила работа Юнга (1808 г.) [3]. Это направление сохраняет актуальность и в наше время. В первых работах Резаля, Громеко, Кортвега, Жуковского, Моэнса, посвященных моделированию упруго-жидкостных волноводов, речь шла о низшей волне, для которой была определена фазовая скорость. Резаль, исходя из результатов проведенных Марэем опытов по распространению напора воды вдоль каучуковых труб, предложил простую формулу для вычисления скорости низшей волны, полагая трубу упру-

гой, а жидкость несжимаемой. Эта формула была подтверждена Моэнсом, который получил аналогичное выражение, отличающееся от формулы Резаля близким к единице коэффициентом. Учет инерционности стенок трубы и вязкость жидкости, Громеко получил два значения для фазовой скорости низшей волны [4]. Меньшее из них совпало с результатом Резаля, а большее было отброшено как не соответствующее физике исследуемого процесса.

Сжимаемость жидкости впервые была учтена Кортвегом [5], получившим формулу для определения скорости низшей волны, впоследствии экспериментально проверенную Дерзингом. Аналогичное выражение, выведенное Жуковским [6], отличалось от формулы Кортвега множителем, который для тонкостенных цилиндров близок к единице. Более полный анализ волновых движений в тонкостенной упругой оболочке с жидкостью выполнил Лэмб (1889 г.) [7]. Он показал, что в такой волноводной системе при любой сколь угодно малой частоте распространяются два типа волн. Первая из них при малой толщине стенки оболочки соответствует волне, рассмотренной Кортвегом, а вторая – продольной волне в цилиндрической оболочке.

Дальнейшие исследования волновых движений в упругом цилиндре с жидкостью основывались на более глубоком качественном понимании особенностей волноводного распространения энергии. В результате учета взаимодействия движений в жидкостной и твердотельной составляющих этой механической системы показано, что свойства нормальных волн в ней зависят от всех параметров, характеризующих физические свойства жидкости и упругого материала, а также от толщины цилиндра. Отметим, что, начиная с ранних работ Резаля, Громеко, Кортвега, Моэнса, Жуковского, рассматривались два типа материалов цилиндра – жесткие (для трубопроводов) и мягкие (для кровеносных сосудов). Обзор ранних работ, посвященных этой проблематике, приведен в [6]. В качестве параметра, определяющего принадлежность материала цилиндра к одной из этих групп, используют отношение скорости волны сдвига материала цилиндра  $V_S$  к скорости звука в жидкости  $C_0$ . Упругий материал считают жестким, если  $V_S/C_0 > 1$ , и мягким, если  $V_S/C_0 < 1$ . Такая классификация принята, например, в [8]. Кроме того, для жестких материалов, как правило,  $\rho_0/\rho_1 < 1$ , а для мягких –  $\rho_0/\rho_1 \approx 1$  и  $\nu \approx 0.5$ . Здесь  $\rho_0, \rho_1$  – плотности жидкости и упругого материала цилиндра соответственно;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В данной работе на основе анализа полученных

ранее дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик волн в заполненном жидкостью цилиндре [9–13] и данных о локализации волновых движений на поверхности контакта жидкой и твердотельной составляющих такого волновода [14, 15] устанавливаются особенности формирования волновых полей для случаев жесткого и мягкого материалов цилиндра.

## 1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В работах [9–12] при рассмотрении свойств осесимметричных волн в упругом цилиндре с жидкостью для описания волнового поля упругого цилиндра использованы уравнения динамической теории упругости. Компоненты вектора смещений  $u_r$  и  $u_z$ , удовлетворяющие уравнениям движения Ламе, имеют вид [9, 11]:

$$u_j = U_j(r) \exp[i(\zeta z - \omega t)], \quad j = r, z,$$

$$U_r(r) = -\alpha [A_1 J_1(\alpha r) + A_2 Y_1(\alpha r)] + \beta [B_1 J_1(\beta r) + B_2 Y_1(\beta r)], \quad (1)$$

$$U_z(r) = i\zeta [A_1 J_0(\alpha r) + A_2 Y_0(\alpha r)] + i \frac{\beta^2}{\zeta} [B_1 J_0(\beta r) + B_2 Y_0(\beta r)],$$

где

$$\alpha^2 = \gamma_1^2 - \zeta^2; \quad \beta^2 = \gamma_2^2 - \zeta^2; \\ \gamma_1 = \frac{\omega R}{V_D}; \quad \gamma_2 = \frac{\omega R}{V_S}; \quad \gamma_1^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \gamma_2^2.$$

Потенциал скорости жидкости, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца, представлен в форме [9, 11]:

$$\varphi = D J_0(\chi_0 r) \exp[i(\zeta z - \omega t)], \\ \chi^2 = \gamma_2^2 \left( \frac{V_S}{C_0} \right)^2 - \zeta^2. \quad (2)$$

Здесь  $\zeta$  – постоянная распространения;  $\omega$  – круговая частота;  $V_D, V_S$  – скорости волн расширения и сдвига;  $C_0$  – скорость звука в жидкости;  $J_n, Y_n$  – функции Бесселя первого и второго рода;  $A_1, A_2, B_1, B_2, D$  – произвольные постоянные. Все линейные величины здесь и далее отнесены к внешнему радиусу цилиндра  $R$ , а потенциал скорости нормирован к произведению  $RC_0$ .

Граничные условия на внешней свободной поверхности ( $r=1$ ) и условия контакта с жидкостью на внутренней ( $r=r_1$ ) выражены соотношениями

$$\sigma_{rr}(1, z, t) = \sigma_{rz}(1, z, t) = \sigma_{rz}(r_1, z_1, t) = 0,$$

$$\frac{\sigma_{rr}(r_1, z_1, t)}{2\mu} = -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{RC_0}{V_S^2} \frac{\partial \varphi(r_1, z_1, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_r(r_1, z_1, t)}{\partial t} = \frac{C_0}{R} \frac{\partial \varphi(r_1, z_1, t)}{\partial r}.$$

Здесь  $\mu$  – модуль сдвига материала цилиндра;  $r_1 = R_1/R$  – относительный внутренний радиус полого цилиндра;  $R_1$  и  $R$  – внутренний и внешний радиусы цилиндра соответственно. Относительная толщина цилиндра определялась по формуле  $h/R = 1 - r_1$ .

Граничные условия (3) при использовании решений (1) и (2) порождают дисперсионное уравнение, выражающееся в приравнении к нулю определителя пятого порядка:

$$\Delta_5 = |a_{ij}| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, 5. \quad (4)$$

Явный вид элементов этого определителя приведен в [9]. Дисперсионное уравнение связывает безразмерные частоту  $\gamma_2$  и постоянную распространения  $\zeta$  при заданных значениях физических ( $\nu$ ,  $V_S/C_0$ ,  $\rho_0/\rho_1$ ) и геометрического ( $r_1$ ) параметров волновода. Цель численного анализа дисперсионного уравнения состоит в нахождении тех значений параметров, при которых упруго-жидкостное взаимодействие проявляется наиболее существенно.

Постановка задачи о взаимодействии волновых движений в жидкости и упругом цилиндре естественным образом приводит к выделению некоторых парциальных подсистем. Если импеданс внутренней поверхности упругого цилиндра превышает импеданс поверхности жидкости, то в качестве парциальных подсистем можно выбрать пустой полый цилиндр и акустический волновод с жесткими стенками. В случае относительно гибкой оболочки второй парциальной системы целесообразно рассматривать акустический волновод с мягкой стенкой. Такое разбиение имеет условный характер, поскольку динамические свойства указанных подсистем существенно зависят от частоты.

Дисперсионное уравнение для полого цилиндра со свободными боковыми поверхностями ( $\rho_0=0$ ) получаем непосредственно из уравнения (4), отбрасывая в определителе пятые строку и столбец.

Дисперсионное уравнение для акустического волновода с жесткими стенками следует из условия

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=r_1} = 0,$$

что дает [9]:

$$\chi J_1(\chi r_1) = 0. \quad (5)$$

Для акустического волновода с мягкими стенками дисперсионное уравнение имеет вид

$$J_0(\chi r_1) = 0. \quad (6)$$

Оба уравнения определяют на плоскости ( $\text{Re } \zeta_1, \gamma_2$ ) семейство гипербол

$$\gamma_2 = \frac{C_0}{V_S} \sqrt{\left(\frac{\lambda_{jn}}{r_1}\right)^2 + \zeta^2}, \quad (7)$$

$$j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

где  $\lambda_{1n}$  – корни уравнения  $J_1(\lambda)=0$ , а  $\lambda_{2n}$  – корни уравнения  $J_0(\lambda)=0$  соответственно. Несколько их первых значений будут:

$n$ :	0	1	2	3	4
$\lambda_{1n}$ :	0	3.8317	10.1735	13.3237	...
$\lambda_{2n}$ :	нет	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915

Нулевому корню уравнения (5) ( $\chi=0$ ) соответствует бездисперсионная волна, характеризующаяся плоским волновым движением ( $u_r=0$ ,  $u_z=\text{const}$ ) и скоростью распространения, равной скорости звука в жидкости.

## 2. ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ЦИЛИНДРА С ЖИДКОСТЬЮ В СЛУЧАЕ ЖЕСТКОГО МАТЕРИАЛА ЦИЛИНДРА

В [9–11] приведены дисперсионные ветви для составного волновода, соответствующие жесткому материалу цилиндра (сочетание сталь–вода). В этом случае имеем следующие значения безразмерных параметров:  $\nu=0.29$ ,  $V_S/C_0=2.14$ ,  $\rho_0/\rho_1=0.13$ . На рис. 1, а и б представлены дисперсионные кривые, соответствующие действительным корням уравнения (4), для  $r_1=0.3$  и  $0.99$  соответственно. Здесь и далее на графиках дисперсионные ветви составного волновода изображены штриховыми линиями. Дисперсионные ветви парциальных подсистем, как правило, даны сплошными кривыми, за исключением акустического волновода с мягкими стенками (штрих-пунктир). Парциальные кривые пустого цилиндра помечены треугольниками.

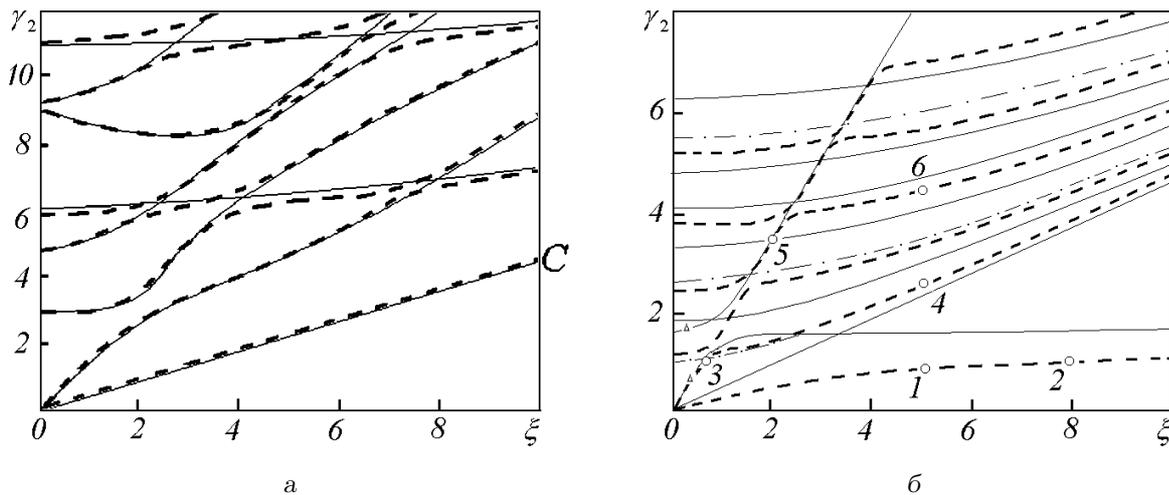


Рис. 1. Дисперсионные ветви распространяющихся волн в составном волноводе сталь – вода:  
 а –  $r_1 = 0.3$ , б –  $r_1 = 0.99$

Для интерпретации результатов расчета важно выделить области частот и постоянных распространения, где эффекты взаимосвязанности волновых движений в составляющих волновода существенны. Исходя из общих свойств волновых движений в подобных системах, следует предположить, что эффекты связности будут существенны только в окрестности точек пересечения дисперсионных кривых парциальных подсистем. Это полностью подтверждается данными, приведенными на графиках. В указанных областях дисперсионные кривые составного волновода удаляются от дисперсионных ветвей одной парциальной подсистемы, приближаясь к другой. При этом и фазовая, и групповая скорости нормальных волн составного волновода существенно изменяются. Такое поведение дисперсионных кривых указывает на обоснованность способа выделения парциальных подсистем. Однако в случае тонкостенных цилиндров взаимодействие между жидкостью и упругой оболочкой проявляется не только вблизи пересечения дисперсионных кривых парциальных подсистем. Прежде всего, это относится к нижней нормальной волне, свойства которой будут рассмотрены отдельно. Что касается волн более высокого порядка, то для рассмотренных геометрических параметров сохраняется общая тенденция – каждая дисперсионная кривая имеет участки, где она очень близка к дисперсионным кривым пустого цилиндра. С повышением номера волны прослеживается тенденция приближения жидкостной части дисперсионных ветвей к соответствующей кривой для волновода с жесткой стенкой.

Из приведенных данных следует, что в случае осесимметричных нормальных волн в составном волноводе существуют две волны, распространяющиеся при любой частоте (имеющие нулевую частоту запертия). Одна из них соответствует практически бездисперсионной волне в жидкостном волноводе с плоским волновым движением. Степень влияния упругих стенок на дисперсионные свойства этой волны существенно зависит от толщины цилиндра. Наименьший действительный корень дисперсионного уравнения упруго-жидкостного волновода (4) находится несколько ниже прямой  $OC$  ( $\chi = 0$ ) – в области, где  $\chi$  становится мнимым. С увеличением  $r_1$  (т. е. при уменьшении толщины цилиндра) этот корень незначительно удаляется от прямой  $OC$ . По мере того, как это происходит, движение жидкости в цилиндре перестает быть плоским. Следует отметить, что в случае жесткого материала цилиндра прямая  $OC$  расположена на плоскости  $(\gamma_2, \zeta)$  ниже прямых  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$ .

Оценить влияние величины  $r_1$  на поведение нижней дисперсионной кривой волновода можно по данным рис. 2, на котором показаны первые действительные дисперсионные кривые пустого цилиндра (сплошные) и составного волновода (штриховые). Для пустого цилиндра с  $r_1 = 0.8$  первая дисперсионная кривая лежит выше прямой  $OC$ . При дальнейшем увеличении  $r_1$  для малых значений волнового числа  $\zeta$  дисперсионные кривые цилиндра практически не различаются. На этом участке фазовые скорости нормальных волн равны скорости продольной волны в стержне:

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho_1}} = \sqrt{2(1 + \nu)}V_S. \quad (8)$$

С ростом волнового числа ( $\zeta > 2$ ) свойства этой волны начинают существенно зависеть от толщины цилиндра. При  $r_1 = 0.9$  фазовые скорости коротких волн цилиндра становятся меньше скорости плоской волны в жидкости. Для цилиндра с  $r_1 = 0.99$  в рассматриваемом диапазоне длин волн дисперсионная ветвь (кривая 4) становится практически горизонтальной. Подобный тип зависимости между частотой и постоянной распространения предсказан теорией тонкостенных оболочек и обуславливает появление особых (непрерывных) составляющих в спектрах их собственных частот [16]. Отметим, однако, что в рамках полных соотношений теории упругости с увеличением волнового числа фазовая скорость этой волны все же начнет возрастать.

С уменьшением толщины цилиндра фазовая скорость низшей волны составного волновода падает. При этом низшая дисперсионная кривая для всех значений  $r_1$  расположена ниже первой дисперсионной кривой пустого цилиндра. Она не приближается ни к одной из дисперсионных кривых парциальных подсистем. В области малых частот фазовая скорость низшей волны составного волновода довольно точно определяется по формуле Кортвега:

$$\frac{C_1}{C_0} = \left[ 1 + \frac{2R_1}{h} \frac{\rho_0 C_0^2}{E} / \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{h}{2R_1} \right) \right]^{-1/2}. \quad (9)$$

Определяемые по ней значения фазовой скорости хорошо согласуются с результатами, полученными на основе уравнений теории упругости в той области частот, для которой штриховые кривые на рис. 2 аппроксимируются прямыми.

Согласно формуле (9), отношение  $C_1/C_0$  уменьшается со снижением жесткости оболочки на растяжение  $Eh$ . Для комбинации сталь – вода различия между фазовой скоростью первой волны незначительны вплоть до  $r_1 = 0.9$ . В табл. 1 приведены значения фазовой скорости низшей нормальной волны составного волновода, полученные по формуле Кортвега ( $C_1/C_0$ ), формуле Жуковского ( $C_1^*/C_0$ ) и значение  $C_p/C_0$ , полученное из дисперсионного уравнения (4). Как уже упоминалось, формулы Жуковского и Кортвега отличаются отсутствием в первой из них множителя, стоящего в круглых скобках в знаменателе соотношения (9). Видно, что при  $r_1 = 0.9$  значения  $C_1/C_0$  и  $C_p/C_0$  практически совпадают, а расхождение с  $C_1^*/C_0$  составляет менее 1%. Существенное снижение  $C_1/C_0$  начинается только со значения  $r_1 \geq 0.95$ .

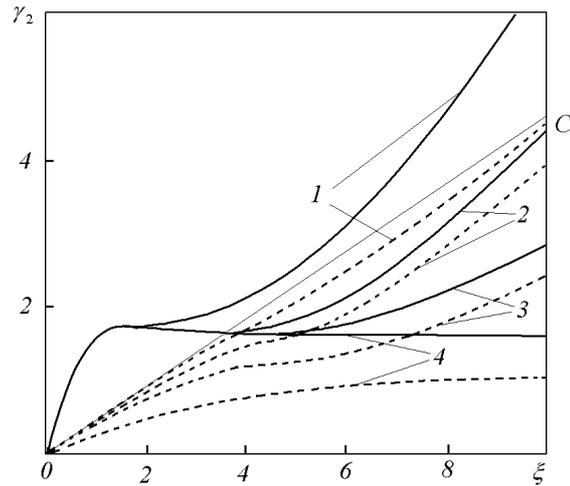


Рис. 2. Влияние жесткости цилиндра на дисперсионные свойства низших нормальных волн в составном волноводе (штриховые линии) и пустом цилиндре (сплошные линии):  
 1 –  $r_1 = 0.8$ , 2 –  $r_1 = 0.8$ , 3 –  $r_1 = 0.95$ , 4 –  $r_1 = 0.99$

Табл. 1. Зависимость фазовой скорости низшей нормальной волны составного волновода сталь – вода от  $r_1$

$r_1$	$C_1/C_0$	$C_1^*/C_0$	$C_p/C_0$
0.8	0.949	0.956	0.950
0.9	0.906	0.913	0.906
0.99	0.559	0.561	0.559
0.995	0.430	0.431	0.430
0.999	0.209	0.209	0.209

Приведенные в табл. 1 данные указывают также на характер зависимости  $C_p/C_0$  от величины  $r_1$ . Характерная особенность низшей дисперсионной ветви состоит в ее удаленности от парциальных дисперсионных кривых. Следовательно, для низшей волны заполненного жидкостью упругого волновода из жесткого материала характерно существенное упруго-жидкостное взаимодействие. Более полное представление об особенностях волновых движений в составных волноводах можно получить при анализе кинематических и энергетических характеристик нормальных волн. На рис. 3 приведены данные для тонкостенного цилиндра с  $r_1 = 0.99$  в характерных точках дисперсионных кривых для второй и четвертой нормальных волн. Номера кривых здесь соответствуют номерам точек на дисперсионных ветвях, отмеченных кружочками на рис. 1, б. Смещения нормированы к максимальному значению в поперечном сечении для

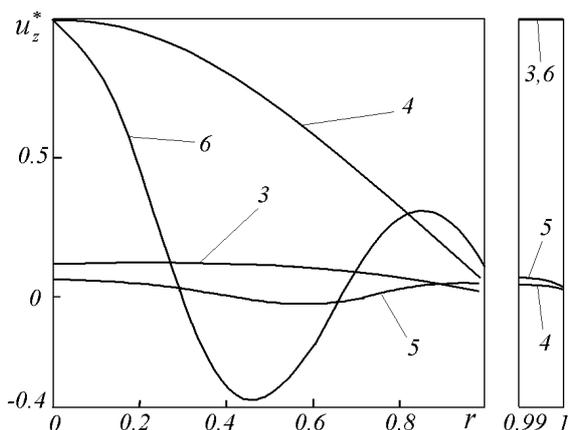


Рис. 3. Распространение по радиусу нормированных амплитуд смещений для нормальных волн волновода. Вычисления выполнены для точек 3–6 на рис. 1, б

Табл. 2. Относительное распределение энергии по поперечному сечению жидкого ядра и упругого цилиндра для точек, отмеченных на рис. 1, б

ТОЧКА	$W_0/W_1$
1	41.10
2	5.22
3	$3.07 \cdot 10^{-2}$
4	$3.59 \cdot 10^3$
5	$4.52 \cdot 10^{-3}$
6	$3.62 \cdot 10^2$

каждой волны  $u_z^* = u_z / |u_{z \max}|$ . Для большей наглядности смещения в цилиндре даны в другом масштабе. В табл. 2 приведены данные об относительном распределении энергии по поперечному сечению жидкого ядра  $W_0$  и упругого цилиндра  $W_1$ .

Представленные на рис. 3 и в табл. 2 данные показывают, что точкам 4 и 6, которые принадлежат участкам, близким к дисперсионным кривым акустического волновода, соответствуют нормальные волны с концентрацией движений в жидкости. Соответственно, практически всю энергии такой волны переносит жидкостная составляющая волновода. Аналогично, точкам 3 и 5, соответствующим участкам, близким к дисперсионным кривым пустого цилиндра, соответствует нормальная волна с концентрацией движений и потока энергии в упругой стенке. В целом участкам, расположенным вблизи дисперсионных кривых парциальных подсистем, соответствуют нормальные волны с весьма незначительным упруго-жидкостным взаимодействием. Отметим, что такая картина на-

блюдается в довольно широких интервалах частот и постоянных распространения.

Практически для всех нормальных волн составного волновода существенное упруго-жидкостное взаимодействие проявляется лишь в узких областях в окрестности точек пересечения дисперсионных кривых парциальных подсистем. Исключение составляет низшая нормальная волна, которая при увеличении частоты и постоянной распространения превращается в поверхностную волну Стоунли. Область, в которой существует эта волна, является зоной существенного упруго-жидкостного взаимодействия. Она расположена несколько ниже прямой  $OC$ .

Важным параметром составного волновода – толщина цилиндра. С ее уменьшением эффекты взаимодействия проявляются во все более широком диапазоне частот, обуславливая существование волн с экстремально низкими скоростями распространения (по сравнению со скоростями звука в жидкости и упругом цилиндре).

### 3. ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ЦИЛИНДРА С ЖИДКОСТЬЮ В СЛУЧАЕ МЯГКОГО МАТЕРИАЛА ЦИЛИНДРА

В [12] приведены характеристики волнового поля заполненного жидкостью упругого цилиндра для случая мягкого материала цилиндра. На рис. 4, а и б показаны действительные дисперсионные кривые для составного волновода жесткая резина – вода с  $r_1 = 0.3$  и  $0.9$ . Для рассмотренного примера безразмерные параметры принимают следующие значения:  $\nu = 0.4$ ,  $V_S/C_0 = 0.3946$ ,  $\rho_0/\rho_1 = 0.909$ . Как и в случае жесткого материала цилиндра, в качестве парциальных подсистем выбираем пустой цилиндр и акустические волноводы с мягкой или жесткой стенками. На рис. 4, а ( $r_1 = 0.3$ ) нанесены три дисперсионные кривые пустого цилиндра (сплошные) и четыре составного волновода (штриховые). Отсюда можно заключить, что низшая нормальная волна пустого цилиндра на низких частотах соответствует практически чисто продольному стержневому движению. Для второй нормальной волны цилиндра при относительно большой его толщине характерно наличие диапазона частот, для которых фазовая и групповая скорости имеют разные знаки – наблюдается явление обратной волны. На частотах загираания нормальных волн пустого цилиндра волновые движения связаны с чисто продольными или чисто сдвиговыми волнами.

Частоты загираания нормальных волн со сдвиго-

вым типом движения для выбранной безразмерной частоты не зависят ни от свойств материала цилиндра, ни от наличия жидкости внутри него [9]. На рис. 4, а к этому типу следует отнести третью распространяющуюся волну для пустого цилиндра. Вторая распространяющаяся волна пустого цилиндра на частотах запирания формируется за счет чисто радиальной волны. Как и в случае сплошного цилиндра [2], частота запирания для нее возрастает при увеличении коэффициента Пуассона. В работе [17] подробно исследована зависимость частот запирания второй (радиальной) и третьей (сдвиговой) нормальных волн от величины относительного внутреннего радиуса полого цилиндра. Показано, что с увеличением  $r_1$  (уменьшением толщины) частота запирания радиальной моды уменьшается, а сдвиговой – возрастает.

Как следует из рис. 4, а и б, в рассмотренном частотном диапазоне дисперсионные кривые парциальных подсистем не пересекаются. Объясняется это тем, что в данном случае скорость звука в жидкости значительно превосходит скорость сдвиговой волны в материале цилиндра. Частота запирания для второй нормальной жидкостной волны оказывается очень высокой и пересечение парциальных дисперсионных кривых возможно лишь в области высоких частот. Частота запирания акустического волновода с мягкой стенкой для волновода с  $r_1=0.3$  составляет  $\gamma_{f1}=20.31$ . На рис. 4, в приведены дисперсионные кривые нормальных волн волновода жесткая резина – вода с  $r_1=0.9$  в области высоких частот. Здесь штриховыми линиями показаны дисперсионные кривые нормальных волн составного волновода с номерами 3–8. Сплошная линия соответствует дисперсионной ветви пустого цилиндра, частота запирания которой  $\gamma_2=31.43$ . Результаты, полученные для различных сочетаний геометрических и физических параметров компонент составных волноводов из мягких материалов, позволяют заключить, что введение при их анализе парциальных подсистем значительно менее эффективно, чем для жесткого цилиндра.

При анализе рис. 4, а следует обратить внимание на принципиальное отличие в проявлении взаимодействия волновых движений для мягкого и жесткого материалов цилиндра. В случае мягкого материала взаимодействие существенно для всех значений частоты и постоянной распространения, а наличие жидкости приводит к снижению фазовых скоростей всех нормальных волн составного волновода. Исключение составляет частота запирания третьей (сдвиговой) нормальной волны, замечательной особенностью которой является во-

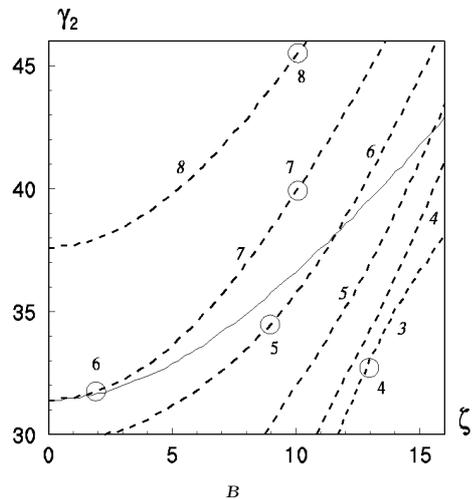
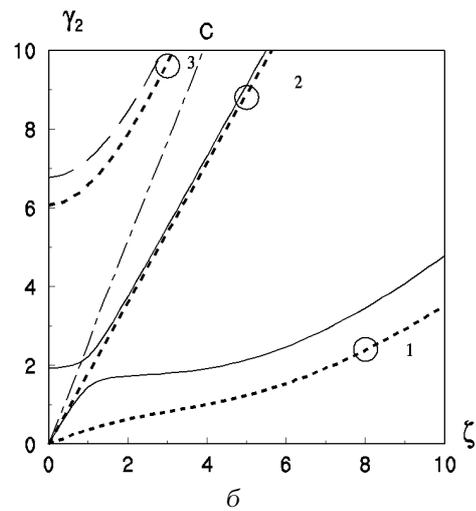
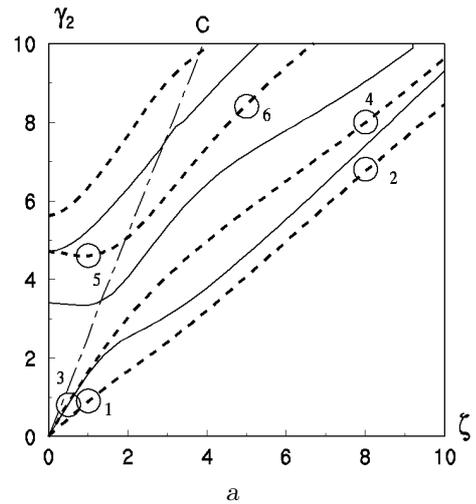


Рис. 4. Дисперсионные ветви нормальных волн волновода жесткая резина – вода:  
а – при  $r_1=0.3$  в области низких частот ( $\gamma_2 \leq 10$ ),  
б – при  $r_1=0.9$  в области низких частот ( $\gamma_2 \leq 10$ ),  
в – при  $r_1=0.9$  в области высоких частот ( $30 \leq \gamma_2 \leq 46$ )

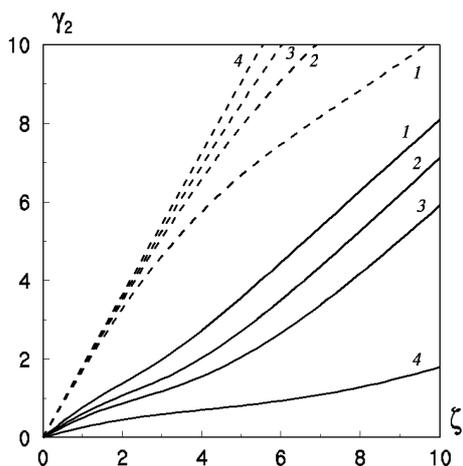


Рис. 5. Изменение дисперсионных свойств двух нижних нормальных волн в волноводе жесткая резина – вода при изменении внутреннего радиуса цилиндра: 1 –  $r_1=0.5$ , 2 –  $r_1=0.7$ , 3 –  $r_1=0.8$ , 4 –  $r_1=0.95$ ; сплошные – первые волны, штриховые – вторые волны

Табл. 3. Фазовая скорость низшей волны составного волновода в зависимости от  $r_1$  в области низких частот

$r_1$	ЖЕСТКАЯ РЕЗИНА		СТАЛЬ
	$C_1/C$	$C_p/C$	$C_p/C$
0.8	0.2129	0.2133	0.950
0.9	0.1536	0.1529	0.906
0.95	0.1092	0.1088	0.833
0.99	0.0490	0.0488	0.559

зникновение в составном волноводе обратной волны, соответствующей движению с разными знаками фазовой и групповой скоростей. Таким образом, в этом диапазоне частот наличие жидкости выражается только через эффект присоединенной массы без проявления свойств сжимаемости.

Рассмотрим дисперсионные характеристики нормальных волн в тонкостенном волноводе ( $r_1=0.9$ ). На рис. 4, б приведены первые две дисперсионные кривые пустого цилиндра (сплошные), первая кривая акустического волновода с мягкими стенками (штрих-пунктирная) и три дисперсионные кривые составного волновода (штриховые).

Существенное изменение жесткости цилиндра  $Eh$  за счет уменьшения толщины его стенки обуславливает некоторые специфические черты взаимодействия волновых движений. Дисперсионные свойства первой нормальной волны составного волновода подобны свойствам этой волны в тол-

стостенном цилиндре. Эффект присоединенной массы здесь выражен сильнее. Для второй нормальной волны также наблюдается снижение частоты запираания до нуля. Для более высоких частот эффект присоединенной массы практически не наблюдается. Для третьей нормальной волны составного волновода, связанной с волновым движением в жидкости, наличие упругого цилиндра также обуславливает появление некоторой присоединенной массы. В целом можно отметить, что уменьшение жесткости цилиндра, обусловленное его тонкостенностью, – определяющий фактор. При увеличении  $r_1$  с 0.9 до 0.99 поведение нормальных волн становится практически таким же, как и в волноводе сталь – вода (рис. 1, б) [12].

Для мягкого цилиндра, как и для жесткого, существуют две нормальные волны с нулевой частотой запираания, см. рис. 5. При уменьшении толщины цилиндра (увеличении  $r_1$ ) они ведут себя по-разному. Так, первая из них характеризуется общей тенденцией снижения фазовой скорости с уменьшением толщины. Вторая нормальная волна существенно связана с волновыми движениями в упругом цилиндре. Об этом свидетельствует то, что в низкочастотном пределе она имеет фазовую скорость, равную скорости стержневой волны в пустом цилиндре и возрастающую с уменьшением его толщины.

Фазовая скорость первой нормальной волны в окрестности начала координат хорошо аппроксимируется формулой Кортвега (9). В табл. 3 приведены значения  $C_1/C_0$ ,  $C_p/C_0$  для составного волновода жесткая резина – вода, а также  $C_p/C_0$  для волновода сталь – вода. Здесь, как и в табл. 1, значение фазовой скорости низшей волны составного волновода получено в результате решения дисперсионного уравнения (4). Из приведенных данных следует, что в случае цилиндра из мягкого материала фазовая скорость низшей волны составного волновода значительно меньше скорости звука в жидкости.

#### 4. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН СОСТАВНОГО ВОЛНОВОДА ДЛЯ СЛУЧАЯ МЯГКОГО МАТЕРИАЛА ЦИЛИНДРА

На рис. 6 показано распределение по радиусу волновода осевых и радиальных смещений в нормальных волнах для волновода жесткая резина – вода с  $r_1=0.9$ . Амплитуды смещений нормированы к максимальному смещению для каждой волны. Номера кривых соответствуют номерам то-

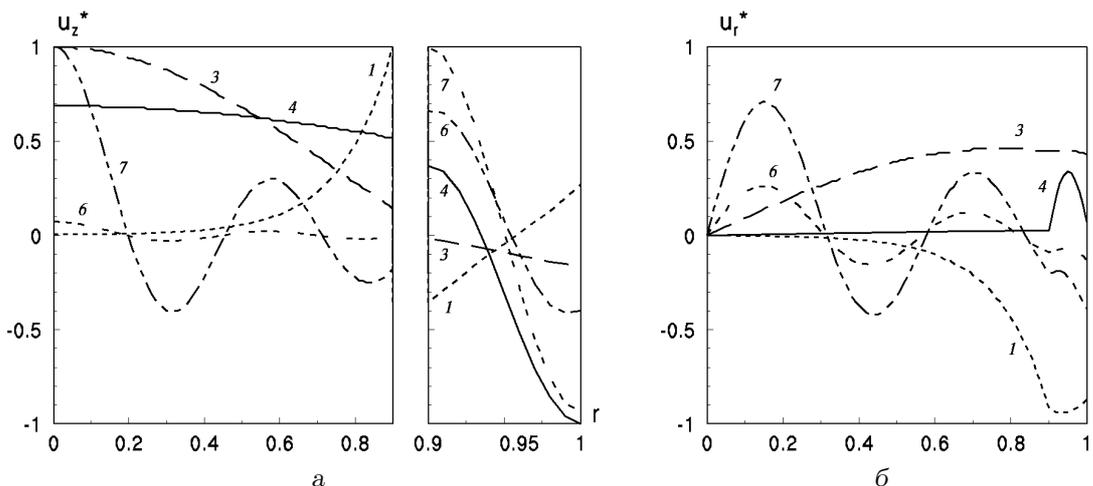


Рис. 6. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений для нормальных волн волновода жесткая резина – вода с  $r_1 = 0.9$  для точек, отмеченных на рис. 4, б (точки 1–3) и рис. 1, в (точки 4–7): а – продольные смещения, б – радиальные смещения

чек на дисперсионных кривых, отмеченных кружочками на рис. 4, б и в. Рассмотрим свойства нижней волны. Для частот и постоянных распространения, соответствующих точке 1, движение в нормальной волне характеризуется локализацией зоны интенсивных движений вблизи поверхности контакта жидкости и упругого цилиндра, что характерно для волны Стоунли. Точке 2 соответствует практически стержневая упругая волна (на графике не показана), а точке 3 – нормальная волна, генетически связанная с волной в жидком ядре. При анализе волновых движений в области высоких частот рассмотрим волновые движения, соответствующие точке 4, которая находится практически на прямой  $OC$ , что определяет особенность кинематики соответствующей ей нормальной волны. Несмотря на довольно высокую частоту, осевые смещения в жидкости распределены почти равномерно, радиальные – пренебрежимо малы. Следовательно, в жидкости распространяется практически плоская волна. В то же время, смещения в упругой оболочке довольно значительны. Для нормальных волн, соответствующих точкам 6 и 7 (см. рис. 4, в), наблюдается высокая изменчивость смещений по радиусу. Движение в волне, соответствующее точке 6, практически полностью сосредоточено в упругой оболочке.

Приведенные данные указывают на сложный характер взаимодействия волновых движений в жидкости и в цилиндре из мягкого материала. При изменении частоты (постоянной распространения) существенно меняются свойства нормальных волн одного порядка. Движение приобрета-

ет особенно сильную связанность в случае тонкостенных оболочек, когда обусловленная физическими свойствами материала цилиндра податливость усиливается за счет геометрического фактора.

Сделанный вывод о характере формирования волновых движений в составном волноводе из мягкого материала подтверждается анализом энергетических характеристик нормальных волн. В табл. 4 приведены отношения величины потока энергии в жидком ядре к полному потоку энергии в нормальной волне  $W_0/W_z$ , а также величин потоков энергии в упругом цилиндре и жидком ядре  $W_1/W_0$ . Эти данные дополнены некоторыми кинематическими характеристиками, а именно: отношениями модулей максимальных осевых смещений в цилиндре и жидком ядре для точек, выделенных на рис. 4, б и в. Отсюда следует, что распространяющуюся волну, соответствующую точке 2 второй дисперсионной кривой составного волновода, можно классифицировать как упругую. Для нее фазовая скорость связанной волны близка к фазовой скорости волны пустого цилиндра. Естественно, при этом практически вся энергия переносится в упругой части волновода.

Согласно данным табл. 4, распространяющуюся волну, соответствующую точке 3, можно рассматривать как жидкостную, которая переносит всю энергию в жидком ядре. В то же время, фазовая скорость связанной волны в точке 3 значительно отличается от фазовой скорости нормальной волны акустического волновода с мягкой стенкой.

Точка 1 расположена на участке нижней дис-

Табл. 4. Относительное распределение энергии по поперечному сечению жидкого ядра и упругого цилиндра для волновода жесткая резина – вода с  $r_1 = 0.9$ 

ТОЧКА	$\zeta$	$\gamma_2$	$W_0/W_z$	$W_1/W_0$	$ u_{z \max}^c / u_{z \max}^f $
1	8	2.377	0.172	4.831	1.19
2	5	8.902	0.015	65.22	9.17
3	3	9.699	0.996	0.0043	0.17
4	13	33.072	0.911	0.0973	0.43
5	9	34.521	0.729	0.370	1.06
6	2	31.775	0.107	8.33	13.7
7	10	39.859	0.769	0.300	0.66
8	10	45.433	0.854	0.170	0.43

персионной кривой, который существенно удален от дисперсионных ветвей парциальных подсистем. В этом случае фазовая скорость связанной волны существенно отличается от фазовых скоростей парциальных упругой и жидкостной волн. Ей соответствует поверхностная волна Стоунли, которая также характеризуется существенной связанностью упругих и жидкостных движений.

##### 5. ОСОБЕННОСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРЕ С ЖИДКОСТЬЮ ДЛЯ СЛУЧАЕВ ЖЕСТКИХ И МЯГКИХ МАТЕРИАЛОВ ЦИЛИНДРА

Поверхностные волны – бездисперсионные монохроматические и характеризуются локализацией волновых движений вблизи поверхности упругого тела или поверхности контакта тел, а также определенным соотношением продольных и поперечных компонент вектора смещений. Современный уровень понимания явления локализации волновых движений изложен в [2, 19].

В публикациях [14, 15] рассмотрены свойства поверхностных волн в заполненных жидкостью цилиндрах из жестких ( $V_S/C_0 > 1$ ) и мягких ( $V_S/C_0 < 1$ ) материалов. Анализ дисперсионных, кинематических и энергетических поверхностных волн проводился отдельно для каждого из указанных типов. Обусловлено это тем, что в случае жесткого цилиндра прямая  $\chi=0$  ( $OC$ ) на плоскости  $(\zeta, \gamma_2)$  расположена ниже прямых  $\alpha=0$  ( $OD$ ) и  $\beta=0$  ( $OE$ ).

В случае мягкого материала прямая  $\chi=0$  расположена выше прямых  $\alpha=0$  и  $\beta=0$ . Выше прямой  $\chi=0$  расположены дисперсионные кривые акустического волновода, а выше прямой  $\beta=0$  – дисперсионные кривые пустого цилиндра. В случае жесткого материала пересечение дисперсионных кривых парциальных подсистем происходит в секторе,

ограниченном осью частот и прямой  $\beta=0$ , а в случае мягкого материала – в секторе, ограниченном осью частот и прямой  $\chi=0$ . Следовательно, для жесткого цилиндра все нормальные волны составного волновода, за исключением низшей, асимптотически стремятся к скорости звука в жидкости. Для мягкого цилиндра все нормальные волны составного волновода, за исключением низшей, стремятся к скорости волны сдвига упругого материала [14].

Проведенные в [14] исследования позволили установить предельные значения всех фазовых скоростей нормальных волн в составном волноводе, за исключением первых двух. Кроме того, показано, что в цилиндре с жидкостью имеется две нормальные волны, имеющие нулевую частоту записания. Фазовая скорость первой из них, являющейся жидкостной на низких частотах, определяется по формуле Кортвега. Для второй же фазовая скорость в области низких частот и значений постоянной распространения  $\zeta \leq 1$  совпадает со скоростью продольной стержневой волны.

С уменьшением толщины стенки цилиндра фазовые скорости первой из них снижаются, а второй – растут. Следовательно, для тонкостенных цилиндров ( $r_1 \geq 0.9$ ) фазовая скорость волны Кортвега будет меньше скорости стержневой волны. Таким образом, низшая нормальная волна составного волновода оказывается связанной с волновым движением в жидкости, а вторая – в упругом цилиндре. Следует однако иметь в виду, что разделение на жидкостную и упругую волну имеет смысл только в области низких частот. При повышении частоты упруго-жидкостное взаимодействие становится существенным и проявляется во всем исследуемом диапазоне.

Ниже будет проведен анализ дисперсионного уравнения цилиндра с жидкостью в области больших частот и волновых чисел.

Табл. 5. Дисперсионные характеристики первых четырех нормальных волн волновода жесткая резина – вода с  $r_1 = 0.3$

№	ДИСП. КР. 1		ДИСП. КР. 2		ДИСП. КР. 3		ДИСП. КР. 4	
	$\zeta$	$\gamma_2$ $C/C_{St}$	$\gamma_2$ $C/C_R$	$C/C_R$	$\gamma_2$ $C/V_S$	$C/V_S$	$\gamma_2$ $C/V_S$	$C/V_S$
10	8.45083	1.03612	9.61683	1.02067	12.68254	1.26825	15.54342	1.55434
30	24.70547	1.00968	28.21410	0.99816	30.61566	1.02052	32.12140	1.07071
40	32.83561	1.00646	37.63042	0.99847	40.40737	1.01084	41.47711	1.03693
50	40.97332	1.00471	47.04919	0.99871	50.30132	1.00603	51.11466	1.02229
100	81.7156	1.00188	94.15298	0.99929	100.1287	1.00129	100.4840	1.00484

**5.1. Асимптотический анализ дисперсионного уравнения цилиндра с жидкостью**

Рассмотрим вначале диапазон частот и волновых чисел, в котором для цилиндра с жидкостью существует поверхностная волна Стоунли. В этой области волновых параметров ( $\zeta, \gamma_2$ ) все величины  $\alpha, \beta$  и  $\chi$  – мнимые.

При стремлении постоянной распространения к бесконечности,  $\zeta \rightarrow \infty$ , с учетом асимптотики модифицированных функций Бесселя дисперсионное уравнение (4) вырождается в два алгебраических уравнения:

$$\frac{\beta^2}{4} \zeta^4 \left[ \left( 2 - \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \right)^2 - 4\alpha^* \beta^* + 2 \frac{\alpha^*}{\zeta} \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \right] = 0 \tag{10}$$

и

$$\left[ \left( 2 - \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \right)^2 - 4\alpha^* \beta^* - \frac{2}{\zeta r_1} \alpha^* \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \right] \chi^* + G_1 \alpha^* \left( \frac{C}{V_S} \right)^4 = 0, \tag{11}$$

где

$$\alpha^* = \sqrt{1 - \left( \frac{C}{V_S} K \right)^2}; \quad \beta^* = \sqrt{1 - \left( \frac{C}{V_S} \right)^2};$$

$$\chi = \sqrt{1 - \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \frac{V_S}{C_0}}.$$

Соотношение (10) совпадает с уравнением, полученным в [18] и определяющим фазовую скорость волны Рэлея на внешней свободной поверхности пустого цилиндра. Соотношение (11) отличается от классического уравнения Стоунли наличием в

квадратных скобках третьего слагаемого и определяет фазовую скорость нормальной волны, которая немного превышает скорость волны Стоунли. Так, для составного волновода сталь – вода с  $r_1 = 0.3$  для  $\zeta = 100$  фазовая скорость волны типа Стоунли составляет  $C/V_S = 0.46716$ . При этом фазовая скорость волны Стоунли при контакте двух полупространств для пары сталь – вода будет  $C/V_S = 0.46715$ , а  $C/C_0 = 0.9997$ .

Для цилиндра из жесткого материала на плоскости ( $\zeta, \gamma_2$ ) область, в которой  $\alpha, \beta$  и  $\chi$  являются мнимыми, расположена ниже прямой  $\chi = 0$  и здесь уравнение (10) не имеет действительного корня – он находится между прямыми  $\chi = 0$  и  $\beta = 0$ . В то же время, уравнение (11) имеет действительный корень, расположенный ниже прямой  $\chi = 0$ . Таким образом, в случае жесткого материала цилиндра асимптотический анализ дисперсионного уравнения не позволил выяснить возможность формирования волны Рэлея в цилиндре с жидкостью. Если материал цилиндра мягкий, то области на плоскости ( $\zeta, \gamma_2$ ), в которой существуют волны Стоунли и Рэлея, совпадают. Объясняется это тем, что прямая  $\chi = 0$  расположена выше прямой  $\beta = 0$ . Следовательно, в цилиндре с жидкостью из мягкого материала существуют две поверхностные волны – Стоунли и Рэлея, которые формируют первые две нормальные волны составного волновода.

Представление о характере стремления фазовых скоростей к предельным значениям дает табл. 5. Здесь для ряда значений постоянной распространения  $\zeta$  приведены частоты и относительные фазовые скорости первых четырех нормальных волн составного волновода вода – жесткая резина с  $r_1 = 0.3$ . Видно, что с увеличением постоянной распространения фазовая скорость первой нормальной волны приближается к скорости волны Стоунли сверху ( $C_{St}/V_S = 0.815624$ ), а второй – к скорости волны Рэлея снизу ( $C_R/V_S = 0.9422$ ). Фазовые скорости третьей, четвертой и всех последующих нормальных волн стремятся сверху к ско-

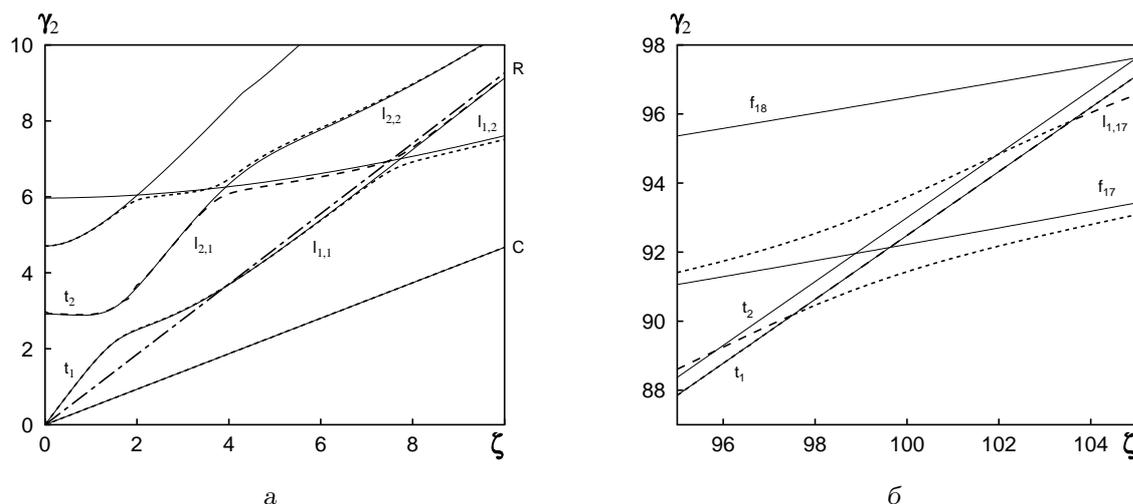


Рис. 7. Дисперсионные ветви нормальных волн волновода сталь – вода с  $r_1 = 0.3$ :  
 а –  $0 \leq \zeta \leq 10$ , б –  $95 \leq \zeta \leq 105$

рости волны сдвига материала цилиндра. Следовательно, при больших волновых числах жидкость не оказывает существенного влияния на свойства нормальных волн, соответствующих указанным дисперсионным кривым.

Возможность формирования поверхностной волны Рэлея в заполненном жидкостью цилиндре из жесткого материала цилиндра следует выяснить на основе качественного анализа структуры дисперсионного спектра.

## 5.2. Анализ дисперсионного спектра цилиндра с жидкостью для случая жесткого материала

В заполненном жидкостью цилиндре существуют две волны с нулевой частотой запертия. Если материал цилиндра – жесткий, то низшая дисперсионная кривая составного волновода расположена несколько ниже прямой  $\chi = 0$ . При этом для цилиндров с  $0.3 < r_1 < 0.8$  фазовая скорость низшей волны остается близкой к скорости звука в жидкости во всем диапазоне частот [9, 11, 12]. Следовательно, низшая волна жесткого толстостенного цилиндра с жидкостью – практически бездисперсионная. Можно полагать, что низшая нормальная волна составного волновода при  $\zeta \rightarrow \infty$  трансформируется в поверхностную волну Стоунли. Этот вывод согласуется с результатами, полученными при асимптотическом анализе дисперсионного уравнения.

Представленная в [9, 11] общая структура дисперсионного спектра жесткого цилиндра с жидкостью (сталь – вода) приведена на рис. 1, а и б.

Эти данные указывают на существенные методические трудности, возникающие при изучении возможностей формирования поверхностной волны Рэлея в составном волноводе. На рис. 7 показаны дисперсионные кривые, соответствующие действительным корням дисперсионного уравнения (4) в системе сталь – вода с  $r_1 = 0.3$ .

Исходя из принципа непрерывности дисперсионных кривых, заключаем, что в заполненном жидкостью цилиндре свойствами поверхностных волн Рэлея могут обладать практически все нормальные волны – в тех диапазонах частот и постоянных распространения, где соответствующие участки их дисперсионных кривых приближаются к первым двум дисперсионным кривым пустого цилиндра (кривые  $t_1$  и  $t_2$  на рис. 7, а). На кривой  $t_1$  показаны два таких участка –  $l_{1,1}$  и  $l_{1,2}$ , а на кривой  $t_2$  –  $l_{2,1}$  и  $l_{2,2}$ . Волну Рэлея на внешней поверхности цилиндра формируют нормальные волны, соответствующие участкам  $l_{1,j}$ , а на внутренней – участкам  $l_{2,j}$ .

Проведем анализ поведения дисперсионных кривых в области больших значений постоянных распространения ( $95 \leq \zeta \leq 105$ ), в которой уже сформировались поверхностные волны. На рис. 7, б показаны дисперсионные кривые составного волновода в окрестности пересечения первых двух дисперсионных кривых пустого цилиндра ( $t_1$  и  $t_2$ ) с семнадцатой дисперсионной кривой акустического волновода  $f_{17}$ . Дисперсионные кривые составного волновода в области их сближения не пересекаются [14]. В то же время, длина участка дисперсионной кривой составного волновода  $l_{1,17}$ ,

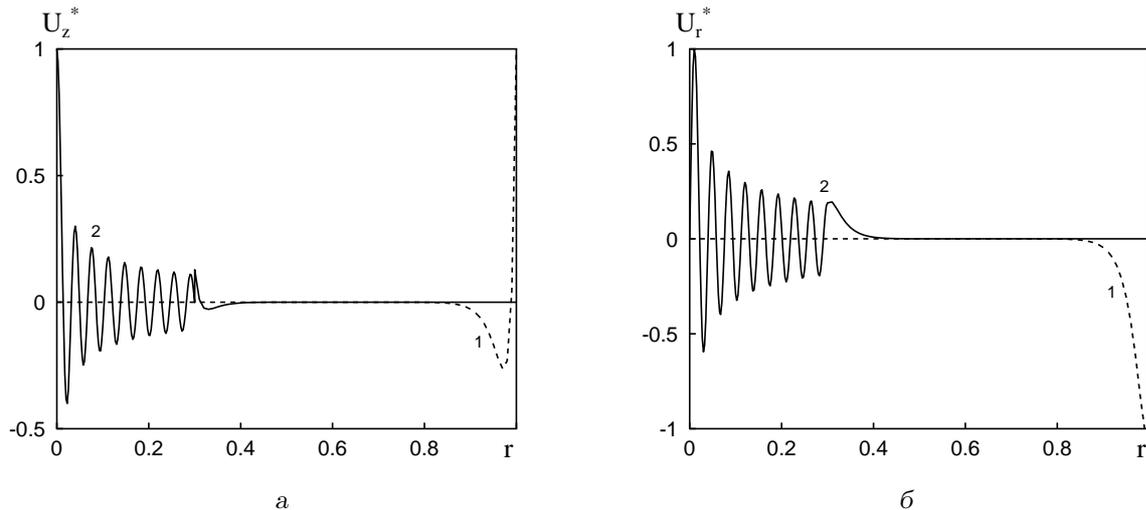


Рис. 8. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений в нормальных волнах волновода сталь – вода с  $r_1=0.3$ , соответствующих дисперсионным ветвям на рис. 7, б:

а – продольные смещения, б – радиальные смещения;

1 – точка ( $\zeta=102, \gamma_2=94.33346$ ) на участке  $l_{1,17}$ ,  
2 – точка ( $\zeta=102, \gamma_2=94.83586$ )

прилегающая к первой дисперсионной кривой пустого цилиндра  $t_1$ , оказывается довольно значительной.

Поэтому можно полагать, что на участках типа  $l_{1,17}$  нормальные волны составного волновода могут формировать поверхностную волну типа Рэлея на внешней поверхности цилиндра, которая практически не чувствует наличия жидкости внутри него. Слабое взаимодействие с жидкостью выражается в том, что разрывы между отдельными участками типа  $l_{1,j}$  практически отсутствуют. Поэтому можем считать, что при больших значениях постоянных распространения волна типа Рэлея вблизи внешней поверхности цилиндра существует для всех частот.

На второй дисперсионной кривой пустого цилиндра  $t_2$  нет участков дисперсионных кривых составного волновода, которые бы прилегали к кривой  $t_2$ . Имеются только точки пересечения кривой  $t_2$  и дисперсионных кривых составного волновода. Отсутствие здесь участков типа  $l_{2,j}$  свидетельствует о том, что сильное упруго-жидкостное взаимодействие на внутренней поверхности цилиндра не позволяет сформироваться на ней волне типа Рэлея. Однако данный вопрос может быть решен окончательно только после анализа кинематических и энергетических характеристик нормальных волн.

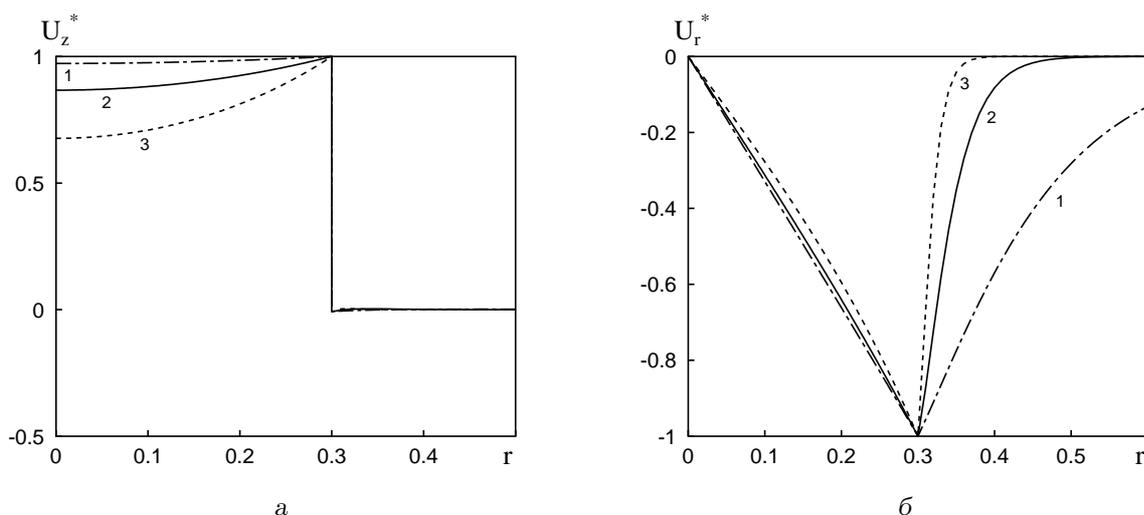
### 5.3. Кинематические и энергетические характеристики поверхностных волн в заполненном жидкостью цилиндре из жесткого материала

Формально процедура определения компонент вектора смещений весьма проста. Она состоит в том, что для заданных значений частоты  $\gamma_2$  и постоянной распространения  $\zeta$  произвольные постоянные  $A_j, B_j, D$  ( $j=1, 2$ ) в выражениях (1) и (2) вычисляются с точностью до модуля одной из них, принимаемого за единицу. Для этого используется система уравнений, полученная после удовлетворения граничных условий. Естественно, при этом следует исключить одно из уравнений. Заметим, что при определении кинематических характеристик всех нормальных волн, за исключением поверхностных, не имеет значения, какое уравнение будет исключено.

На рис. 8 показано распределение нормированных амплитуд осевых и радиальных смещений связанной нормальной волны  $U_j^*(r) = U_j(r) / |U_{j \max}|$  в области больших значений  $(\zeta, \gamma_2)$ . Кривые 1 (штриховые) соответствуют точке на первой дисперсионной кривой пустого цилиндра ( $\zeta=102, \gamma_2=94.33346$ ). Они представляют собой волну Рэлея, локализованную вблизи внешней поверхности цилиндра. Кривые 2 (сплошные) соответствуют точке пересечения второй

Табл. 6. Дисперсионные характеристики первых двух нормальных волн волновода сталь – вода

$r_1$	$\zeta$	$\gamma_2^{(1)}$	$C/V_S$	$\zeta$	$\gamma_2^{(2)}$	$C/V_S$
0.3	10	4.643366	0.464336	10	9.131664	0.913167
0.3	30	13.981700	0.466057	30	27.687625	0.922921
0.3	40	18.653097	0.466327	40	36.940509	0.923513
0.3	100	46.684334	0.466843	100	92.481889	0.924819
0.9	50	23.347694	0.466954	50	40.387689	0.807754
0.9	100	46.707068	0.467071	190	175.9558	0.925818
0.9	150	70.065971	0.467106	250	231.49612	0.925980

Рис. 9. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений в первой нормальной волне волновода сталь – вода с  $r_1=0.3$ :

а – продольные смещения, б – радиальные смещения;

1 –  $\zeta=10$ , 2 –  $\zeta=40$ , 3 –  $\zeta=100$ 

дисперсионной кривой пустого цилиндра и 17-ой кривой акустического волновода с координатами ( $\zeta=102$ ,  $\gamma_2=94.83586$ ). Они показывают кинематические характеристики связанной нормальной волны, характер распределения смещений в которой соответствует сильному упруго-жидкостному взаимодействию. В жидкости распределение смещений соответствует семнадцатой дисперсионной кривой акустического волновода, а в цилиндре – волне Рэлея вблизи его внутренней поверхности. Амплитуда смещений принимает максимальное значение в жидкости. Значения смещений на внутренней поверхности цилиндра значительно меньше:  $U_z^*(r=0.3)=0.13$ ,  $U_r^*(r=0.3)=0.19$ .

Энергетические характеристики этих волн представлены в табл. 6. Здесь для заданных значений постоянных распространения  $\zeta$  приведены значения частот и относительных фазовых скоростей

$C/V_S$ , соответствующих поверхностным волнам типа Стоунли и Рэлея (вблизи внешней поверхности) для заполненного водой стального цилиндра с  $r_1=0.3$  и  $r_1=0.9$ . Видно, что фазовая скорость нижней волны приближается к скорости волны Стоунли  $C_{St}/V_S=0.467151$  (при контакте соответствующих полупространств). Дисперсионные характеристики второй нормальной волны составного волновода и первой волны пустого цилиндра при  $\zeta=40$  уже совпадают [18]. Фазовая скорость второй нормальной волны составного волновода с увеличением  $\zeta$  стремится к скорости волны Рэлея  $C_R/V_S=0.925843$ . Приведенные значения  $\zeta$  определяют на дисперсионных кривых составного волновода точки, принадлежащие участкам  $l_{1,7}$ , ( $\zeta=40$ ) и  $l_{1,17}$  ( $\zeta=100$ ).

Для данных из табл. 6 на рис. 9 дано распределение по радиальной координате нормированных

Табл. 7. Относительное распределение осевой энергии по поперечному сечению волновода сталь–вода с  $r_1=0.3$ 

№	$\zeta$	$\gamma_2$	$C/V_S$	$W_{z0}$	$W_{z1}$	$W_z$	$W_{z0}/W_z$	$u_{zr}$
1	40	18.65310	0.46633	1.736	0.0052	1.741	0.9970	43.49
2	100	46.68433	0.46684	14.37	0.0231	14.39	0.9984	41.92
3	40	36.94051	0.92351	0.09455	$0.2714 \cdot 10^7$	$0.2714 \cdot 10^7$	$0.348 \cdot 10^{-7}$	0.609
4	100	92.48189	0.92482	0.2313	$0.6472 \cdot 10^{20}$	$0.6472 \cdot 10^{20}$	$0.357 \cdot 10^{-20}$	0.631
5	16.5	15.85554	0.96095	0.0366	1.366	1.403	0.2612	0.956
6	17	15.66064	0.92121	0.03926	71.26	71.30	$0.55 \cdot 10^{-3}$	0.585
7	102	94.33346	0.92484	0.2365	$0.1077 \cdot 10^{21}$	$0.1077 \cdot 10^{21}$	$0.22 \cdot 10^{-20}$	0.633
8	102	94.83586	0.92977	0.2346	1.229	1.463	0.1603	1.01
9	100	93.59815	0.93598	0.2315	0.955	1.187	0.1951	0.994

амплитуд осевых и радиальных смещений нижней нормальной волны для волновода сталь–вода с  $r_1=0.3$ . Кривые 1, 2 и 3 соответствуют постоянным распространения  $\zeta=10, 40$  и  $100$ . Представленные результаты показывают трансформацию этой волны в поверхностную волну типа Стоунли с ростом  $\zeta$ . Естественно, при уменьшении длины волны возрастает неравномерность распределение смещений по радиусу в жидком ядре. Осевые смещения в упругом цилиндре практически отсутствуют, что указывает на малость потока энергии в упругой составляющей, по сравнению с жидкостью. Такая ситуация характерна для волны Стоунли в случае пары жесткое полупространство–жидкость. Отсутствие существенного упруго-жидкостного взаимодействия подтверждается также очень высокой степенью локализации радиальных смещений в упругом цилиндре.

В работе [11] показано, что при фиксированном соотношении физических характеристик материала цилиндра и жидкости упруго-жидкостное взаимодействие более сильно проявляется для тонкостенных цилиндров. При рассмотрении свойств поверхностных волн уменьшение толщины цилиндра менее существенно. Как показывают расчеты, оно приводит лишь к увеличению значений волновых чисел, при которых нормальные волны составного волновода трансформируются в поверхностные.

Проанализируем энергетические характеристики поверхностных волн составного волновода. В табл. 7 приведены данные о распределении среднего за период значения потока мощности по поперечному сечению жидкого ядра  $W_{z0}$  и упругого цилиндра  $W_{z1}$  в волноводе сталь–вода, а также отношения  $W_0^* = W_{z0}/W_z$  ( $W_z = W_{z0} + W_{z1}$ ), определяющем часть мощности, переносимую жидким ядром. Соотношения для определения этих величин содержатся, например, в [11]. В таблице также

приведено отношение продольных и поперечных смещений  $u_{zr} = |U_{z \max}|/|U_{r \max}|$ .

Согласно табл. 7, волна типа Стоунли характеризуется тем, что почти вся энергия здесь переносится жидкостью (первая и вторая строки), а отношение продольных смещений к поперечным составляет  $u_{zr} = 41.92$  ( $\zeta = 100$ ). Напомним, что при контакте двух полупространств для пары сталь–вода оно равно  $40.9$  [20]. Для волны типа Рэлея, локализованной вблизи внешней поверхности цилиндра, почти вся энергия переносится в упругом материале (третья, четвертая, шестая и седьмая строки), а  $u_{zr} = 0.631$  при  $\zeta = 100$ . Для волны Рэлея на поверхности упругого полупространства из стали это отношение равно  $0.661$ , а на внешней свободной поверхности пустого стального цилиндра –  $0.5917$  [20]. При контакте упругого слоя (сталь) и жидкого полупространства (вода) для волны Рэлея на свободной поверхности слоя получаем  $u_{zr} = 0.6378$  [20].

Таким образом, вблизи внешней поверхности заполненного жидкостью цилиндра действительно формируется поверхностная волна типа Рэлея. Следует, однако, заметить, что она существует только в определенных диапазонах частот и волновых чисел – там, где на дисперсионных кривых высоких порядков расположены участки типа  $l_{1j}$ , прилегающие к первой дисперсионной кривой пустого цилиндра. Соответственно, вблизи точек пересечения парциальных подсистем имеются диапазоны частот и волновых чисел, в которых волна типа Рэлея не может быть сформирована. Тем не менее, поскольку эти частотные полосы весьма узкие, то можно считать, что в составном волноводе поверхностная волна типа Рэлея существует вблизи внешней поверхности цилиндра практически во всей высокочастотной области.

Анализ энергетических характеристик нормальных волн, соответствующих участкам дисперси-

Табл. 8. Дисперсионные характеристики первых двух нормальных волн волновода жесткая резина – вода с  $r_1=0.9$

$\zeta$	$\gamma_2^{(1)}$	$C/V_S$	$\gamma_2^{(2)}$	$C/V_S$
70	56.901545	0.812879	67.231629	0.960452
80	65.200464	0.815006	76.045242	0.950566
100	81.590645	0.815906	94.373767	0.943738

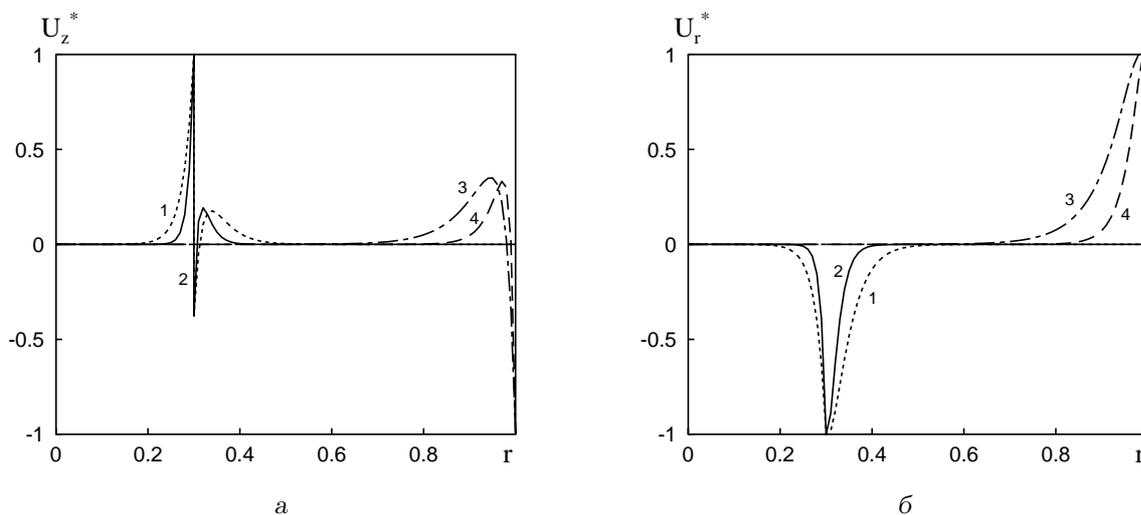


Рис. 10. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений в первых двух нормальных волнах волновода жесткая резина – вода с  $r_1=0.3$ :

а – продольные смещения, б – радиальные смещения;

1 –  $\zeta=50$  (волна Стоунли), 2 –  $\zeta=100$  (волна Стоунли), 3 –  $\zeta=50$  (волна Рэлея), 4 –  $\zeta=100$  (волна Рэлея)

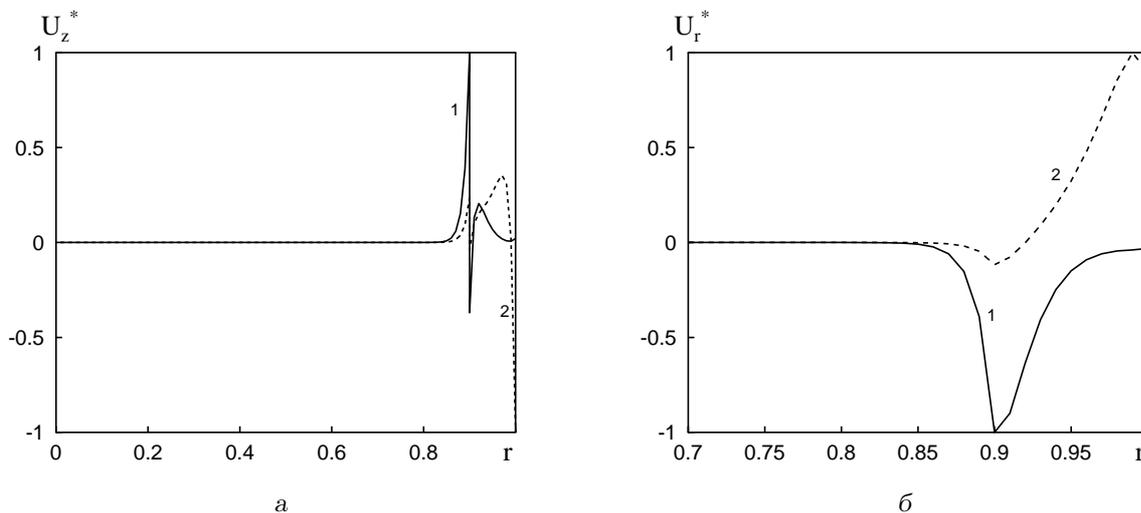


Рис. 11. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений в нормальных волнах волновода жесткая резина – вода с  $r_1=0.9$  и  $\zeta=100$ :

а – продольные смещения, б – радиальные смещения;

1 – волна Стоунли, 2 – волна Рэлея

Табл. 9. Относительное распределение осевой энергии по поперечному сечению волновода жесткая резина – вода

№	$r_1$	$\zeta$	$\gamma_2$	$u_{zr}$	$W_{z0}$	$W_{z1}$	$W_z$	$W_{z0}/W_z$
1	0.3	50	40.973317	1.096	$0.1451 \cdot 10^{13}$	$0.6582 \cdot 10^{13}$	$0.8033 \cdot 10^{13}$	0.1807
2	0.3	100	81.714104	1.076	$0.3112 \cdot 10^{25}$	$0.1477 \cdot 10^{26}$	$0.1788 \cdot 10^{26}$	0.1741
3	0.3	50	47.049195	0.526	$0.1016 \cdot 10^{13}$	$0.1087 \cdot 10^{23}$	$0.1087 \cdot 10^{23}$	$0.935 \cdot 10^{-10}$
4	0.3	100	94.152981	0.537	$0.1253 \cdot 10^{25}$	$0.2235 \cdot 10^{45}$	$0.2235 \cdot 10^{45}$	$0.5608 \cdot 10^{-20}$
5	0.9	100	81.590645	1.063	$0.6827 \cdot 10^{74}$	$0.3349 \cdot 10^{75}$	$0.4032 \cdot 10^{75}$	0.1693
6	0.9	100	94.373767	0.538	$0.2847 \cdot 10^{73}$	$0.1247 \cdot 10^{76}$	$0.1262 \cdot 10^{76}$	0.002257

онных кривых  $l_{2j}$  (расположенных вблизи второй дисперсионной кривой пустого цилиндра), показывает, что с увеличением волнового числа доля энергии, уносимой жидкостью, увеличивается. Следовательно, с увеличением волнового числа упруго-жидкостное взаимодействие в этих нормальных волнах усиливается и будет существенно выраженным в точках, на дисперсионных кривых составного волновода, расположенных вблизи второй дисперсионной кривой пустого цилиндра (пятая, восьмая и девятая строки).

#### 5.4. Кинематические и энергетические характеристики поверхностных волн в заполненном жидкостью цилиндре из мягкого материала

В статье [12] кинематические и энергетические характеристики нормальных волн были исследованы в тех областях изменения безразмерных частот и волновых чисел, где поверхностные волны еще не сформировались. В табл. 5 приведены дисперсионные характеристики первых четырех нормальных волн для заполненного водой цилиндра из жесткой резины с  $r_1=0.3$ . В табл. 8 даны дисперсионные характеристики первых двух нормальных волн для составного волновода жесткая резина – вода с  $r_1=0.9$ . Отсюда следует, что в случае тонкостенного цилиндра фазовая скорость первой нормальной волны с увеличением волнового числа стремится к скорости волны Стоунли снизу. Фазовая же скорость второй нормальной волны стремится к скорости волны Рэлея снизу. Кинематические характеристики поверхностных волн, соответствующих табл. 5, приведены на рис. 10, а табл. 8 – на рис. 11.

Кривые 1 и 2 на рис. 10 соответствуют поверхностной волне типа Стоунли, а кривые 3 и 4 – волне типа Рэлея для значений  $\zeta=50$  и 100. На рис. 11 кривые 1 и 2 соответствуют поверхностным волнам типа Стоунли и Рэлея для  $\zeta=100$ . Из графиков видно, что уменьшение жесткости материала

цилиндра вызывает существенное изменение характера волновых возмущений вблизи поверхности контакта для волны типа Стоунли. Волновые возмущения вблизи поверхности контакта в равной степени охватывают жидкую и упругую составляющие волновода. Для волны типа Рэлея уменьшение жесткости материала цилиндра не оказывает заметного влияния на характер распределения смещений вблизи внешней поверхности составного волновода.

Аналогичный характер распределения смещений для поверхностной волны Стоунли (Шолте) получен экспериментально в [8] для случаев жесткого (пара стекло – вода) и мягкого упругого материала (пара плексиглас – вода).

Энергетические характеристики поверхностных волн для волновода жесткая резина – вода представлены в табл. 9. Здесь приведены сведения о распределении среднего за период потока мощности по поперечному сечению волновода для данных табл. 5 и 8, а также отношение продольных и поперечных смещений  $u_{zr}$ . Видно, что уменьшение жесткости материала цилиндра вызвало существенные изменения в распределении потока энергии между жидкой и упругой составляющими волновода для волны типа Стоунли. Для нее при  $r_1=0.3$  жидкость переносит только 18 % энергии на  $\zeta=50$  и 17.4 % на  $\zeta=100$ . Напомним, что в случае жесткого материала цилиндра жидкость переносит почти всю энергию поверхностной волны типа Стоунли.

Для этой волны также существенно изменилось отношение продольных и поперечных компонент вектора смещений ( $u_{zr}=1.076$  для  $\zeta=100$ ,  $r_1=0.3$ ). Отметим, что при контакте двух полупространств из этих же материалов отношение амплитуд продольных и поперечных компонент вектора смещений для волны Стоунли будет 1.04 [20]. Для волны типа Рэлея в составном волноводе имеем  $u_{zr}=0.537$  для  $\zeta=100$ . При контакте же соответствующих упругого слоя и жидкого по-

лупространства отношение продольных смещений к поперечным для волны Рэлея на свободной поверхности упругого слоя равно 0.541 [20].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены данные о свойствах нормальных волн в заполненном жидкостью цилиндре в зависимости от изменения толщины стенки и физических свойств материала цилиндра.

Анализ дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик нормальных волн, а также их фазовых скоростей показал качественное и количественное проявление эффектов взаимодействия волновых движений в жидкости и упругом теле. Для интерпретации результатов расчета важной оказалась возможность выделить в составном волноводе некоторые парциальные подсистемы, свойства которых позволяют определить области частот, где эффекты взаимодействия существенны. Исключение составляет низшая нормальная волна, которая при увеличении частоты превращается в поверхностную волну Стоунли.

Одним из ключевых параметров, определяющих свойства составного волновода, оказалась толщина упругого цилиндра, контролирующая его жесткость на растяжение. С уменьшением жесткости влияние эффектов взаимодействия распространяются на все более широкую область частот, обуславливая возникновение нормальных волн с экстремально низкими скоростями распространения (по сравнению со скоростями звука в жидкости и упругом материале).

Проанализирован характер трансформации волнового движения в поверхностные волны с ростом частоты и постоянной распространения, обусловленный эффектом упруго-жидкостного взаимодействия. Показано, что последний не только усложняет дисперсионные свойства нормальных волн и их кинематические характеристики, но и существенно изменяет асимптотические свойства соответствующих фазовых скоростей.

В случае жесткого материала цилиндра фазовые скорости всех нормальных волн, за исключением низшей, в пределе стремятся к скорости звука в жидкости, заполняющей цилиндр. Это указывает, что в таком составном волноводе отсутствуют отдельные нормальные волны, преобразующиеся в поверхностные волны типа Рэлея. Показано, что волна Рэлея формируется на внешней поверхности цилиндра за счет трансформации нормальных волн разных порядков на отдельных частотных интервалах. Им соответствуют участки дисперсионных кривых разных порядков, распо-

ложенные вблизи первой дисперсионной кривой пустого цилиндра. Низшая нормальная волна волновода трансформируется в классическую волну Стоунли вблизи внутренней поверхности цилиндра.

В случае волновода из мягкого материала эффекты волнового взаимодействия существенны для всех частот, за исключением весьма узких интервалов вблизи частот запираания сдвиговых волн в упругом цилиндре. Наличие взаимодействия заметно влияет на распределение по радиусу волновода компонент вектора смещений. Фазовые скорости первой (низшей) и второй нормальных волн в качестве предельного значения имеют скорости волн Стоунли и Рэлея соответственно. Скорости всех последующих волн в конечном итоге стремятся к скорости волны сдвига в материале цилиндра.

Для жесткого материала цилиндра фазовая скорость волны Стоунли весьма близка к скорости звука в жидкости, а для мягкого – значительно ниже этой величины. В случае мягкого материала волновое возмущение в равной степени охватывает жидкую и упругую составляющие волновода. При этом значительная часть энергии переносится в стенке цилиндра. В случае жесткого материала волновые возмущения преимущественно сосредоточены в жидкости, а продольные смещения значительно превосходят по амплитуде поперечные.

1. Микер Т., Мейтцлер А. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинах // Физ. акустика: Принципы и методы. Часть 1А.– М.: Мир, 1966.– С. 140–203.
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 288 с.
3. Young T. Hydraulic investigations, subservient to an intended Croonian Lecture on the motion of the blood // Phil. Trans. Roy. Soc.– 1808.– 98.– P. 164–186.
4. Громеко И. С. О скорости распространения волнообразного движения в упругих трубах // Собр. соч.– М.: Изд. АН СССР, 1952.– С. 172–183.
5. Korteweg D. J. Über die Fort pflanzungs geschwindigkeit des Schalles in elastischen Röhren // Annal. Phys. Chem.– 1878.– 5.– S. 525–537.
6. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах // Полн. собр. соч., том 7.– М.-Л.: ОНТИ, 1937.– С. 58–151.
7. Lamb H. On flexure of an elastic plate // Proc. Lond. Math. Soc.– 1889/1890.– 21, № 360.– P. 70–90.
8. Glorieux C., Van de Rostyne R., Nelson K. On the character of acoustic waves at the interface between hard and soft solids and liquids // J. Acoust. Soc. Amer.– 2001.– 10, № 3, Pt. 1.– P. 1299–1306.
9. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью // Прикл. мех.– 1984.– 20, № 1.– С. 21–26.

10. Комиссарова Г. Л. К решению задачи о распространении упругих волн в цилиндре с жидкостью // Прикл. мех.– 1990.– **26**, № 8.– С. 25–29.
11. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Свойства нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, № 3.– С. 44–55.
12. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Особенности распространения волн в заполненных жидкостью цилиндрах с податливыми стенками // Акуст. вісн.– 2001.– **4**, № 3.– С. 22–33.
13. Комиссарова Г. Л. Распространение нормальных волн в заполненных жидкостью тонкостенных цилиндрах // Прикл. мех.– 2002.– **38**, № 1.– С. 124–134.
14. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Свойства локализованных вблизи границ волновых движений в заполненном жидкостью цилиндре // Акуст. вісн.– 2006.– **9**, № 2.– С. 37–55.
15. Комиссарова Г. Л. Свойства поверхностных волн в заполненном жидкостью упругом цилиндре // Акуст. ж.– 2009.– **55**, № 3.– С. 315–325.
16. Болотин В. В. Плотность собственных значений в задачах о колебаниях упругих пластин и оболочек // Труды VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин (Баку, 1966).– М.: Наука, 1966.– С. 161–167.
17. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Особенности динамического деформирования полого цилиндра // Прикл. мех.– 1986.– **22**, № 5.– С. 3–8.
18. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Свойства поверхностных волн в упругом полом цилиндре // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, № 3.– С. 39–48.
19. Викторов И. А. Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах // Акуст. ж.– 1979.– **25**, № 1.– С. 1–17.
20. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Поверхностные волны в системе упругий слой на жидком полупространстве // Акуст. вісн.– 2005.– **8**, № 4.– С. 38–45.