

УДК 539.3

ДЕМПФИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ ЖЕСТКО ЗАЦЕМЛЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ СОВМЕСТНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СЕНСОРОВ И АКТУАТОРОВ

В. Г. КАРНАУХОВ^{1*}, А. Ю. ШЕВЧЕНКО¹, Т. В. КАРНАУХОВА²

¹Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина

²Национальный технический университет Украины “КПИ”
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина

*karn@inmech.kiev.ua

Получено 02.04.2011 ◊ Пересмотрено 08.09.2011

Методом Бубнова–Галеркина решена задача об активном демпфировании вынужденных изгибных резонансных термомеханических колебаниях жестко заземленной гибкой круглой пассивной вязкоупругой пластины с помощью распределенных пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Исследовано влияние геометрической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность активного демпфирования резонансных колебаний такой пластины с помощью пьезоэлектрических включений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: вязкоупругая пластина, резонансные колебания, диссипативный разогрев, пьезоэлектрический сенсор, актуатор, метод Бубнова–Галеркина

Методом Бубнова–Гальоркіна розв’язано задачу про активне демпфування вимушених згинальних резонансних термомеханічних коливань жорстко закріпленої гнучкої круглої пасивної в’язкопружної пластини за допомогою розподілених п’єзоелектричних сенсорів і актуаторів. Досліджено вплив геометричної нелінійності й температури дисипативного розігріву на ефективність активного демпфування резонансних коливань такої пластини за допомогою п’єзоелектричних включень.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: в’язкопружна пластина, резонансні коливання, дисипативний розігрів, п’єзоелектричний сенсор, актуатор, метод Бубнова–Гальоркіна

A problem on active damping of bending forced resonance thermomechanic vibration of a rigidly clamped flexible viscoelastic circular plate by distributed sensors and actuators is solved by the Bubnov–Galerkin method. An influence of geometric nonlinearity and dissipative heating on an effectiveness of active damping of plate resonant vibration by piezoelectric inclusions is studied.

KEY WORDS: viscoelastic plate, resonance vibrations, dissipative heating, piezoelectric sensor, actuator, the Bubnov–Galerkin method

ВВЕДЕНИЕ

Тонкие круглые пластины из пассивных и активных (с пьезоэффектом) вязкоупругих материалов были и остаются одними из наиболее распространенными элементов конструкций современной техники. Исследованию колебаний таких объектов посвящено большое количество работ [1–4]. При действии на них гармонических во времени нагрузок с частотой, близкой к резонансной, возникает опасность разрушения из-за усталости, высокого уровня напряжений, температуры диссипативного разогрева и пр. В связи с этим появляется необходимость в демпфировании резонансных колебаний таких пластин. Для этого используются как пассивные [5–8], так и активные [9–13] методы. Одним из основных не-

достатков пассивных методов, базирующихся на включении в систему компонент с высокими демпфирующими характеристиками, является невозможность управлять коэффициентом демпфирования после изготовления конструкции. Этого недостатка лишены активные методы, предусматривающие использование пьезокомпонент, выполняющих функции сенсоров и актуаторов. При этом становится возможным изменять коэффициент демпфирования уже в процессе эксплуатации конструкции. Сущность метода активного демпфирования колебаний, основанного на совместном использовании сенсоров и актуаторов, заключается в том, что к актуатору подводится разность потенциалов, пропорциональная первой производной по времени от разности потенциалов или тока, зафиксированным сенсором. Как следствие, в

электромеханической системе возникает дополнительное затухание, пропорциональное первой производной от поперечного перемещения.

Главная возникающая при этом проблема – правильно оценить влияние различных факторов на коэффициент демпфирования (в частности, механических и электрических граничных условий, геометрической нелинейности и температуры). Необходимость в учете геометрической нелинейности возникает при резонансных колебаниях, высоких уровнях механической нагрузки, а также для тонких пластин, когда амплитуда колебаний может стать сравнимой с толщиной. Обзор исследований по активному демпфированию колебаний круглых пластин с помощью актуаторов представлен в [14]. В этой работе не учитывались диссипативные свойства материалов и обусловленная ими температура диссипативного разогрева. Кроме того, не рассмотрено активное демпфирование колебаний при совместном использовании сенсоров и актуаторов. Обзор исследований по круглым пластинам с размещенными на них сенсорами представлен в [15].

В этой статье рассматривается задача о вынужденных изгибных термомеханических колебаниях жестко зашпеленной круглой пассивной вязкоупругой пластины, на поверхности которой нанесены одинаковые пьезослои, отличающиеся лишь направлением поляризации и выполняющие функции сенсоров и актуаторов. Пластина нагружена равномерным поверхностным давлением, изменяющимся во времени по гармоническому закону с частотой, близкой к резонансной. Рассматриваются электрические граничные условия, отвечающие коротко замкнутым электродам, нанесенным на поверхности пьезослоев. Задача решается в одномодовом приближении методом Бубнова – Галеркина в сочетании с методом гармонического баланса. Получена формула для коэффициента демпфирования, обусловленного вязкоупругими свойствами пассивного материала при совместном использовании сенсоров и актуаторов с учетом влияния геометрической нелинейности и температуры диссипативного разогрева. Исследовано влияние геометрической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность активного демпфирования колебаний пластины. Определено критическое значение параметра механического нагружения, после превышения которого температура достигает точки Кюри и пьезоэлементы перестают выполнять свое функциональное назначение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При постановке задачи об активном демпфировании вынужденных резонансных колебаний вязкоупругой круглой пластины с жестким зашпелением торцов используем результаты, представленные в статьях [16, 17], где рассмотрены задачи о колебаниях круглой пластины с шарнирным закреплением торца. Заметим, что при шарнирном зашпелении работа сенсора и актуатора будет наиболее эффективной в случае полного покрытия пассивной пластины пьезоэлектрическими слоями. При жестком зашпелении торца такой способ покрытия не дает возможности управлять колебаниями пластины с помощью пьезоэлектрических вставок и приходится наносить на пластину пьезоэлектрические “пятна”. По аналогии с результатами упомянутых статей получим следующую нелинейную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно безразмерных поперечного прогиба w и функции усилий Φ для описания колебаний пластины с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами:

$$D_{11}^0 \vec{D}_M * \Delta \Delta w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\Phi \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - q - \Delta M_0 + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$A_{11}^0 \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) - \frac{\Phi}{\rho} \right] = -\frac{1}{2} \vec{D}_N * \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2. \quad (2)$$

Граничные условия жесткого зашпеления принимают вид:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (3)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \nu_N \frac{1}{\rho} \Phi = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (5)$$

Граничное условие (4) соответствует свободному торцу в плоскости пластины ($N_r = 0$ при $\rho = 1$), а граничное условие (5) – жесткому зашпелению этого торца ($u = 0$ при $\rho = 1$). Постановку задачи необходимо дополнить стандартными начальными условиями.

В работе [17] представлено выражение для электрического заряда, накапливающегося на сенсоре:

$$Q = 2\pi(h_0 + h_1)\gamma_{31} \int_0^{\rho_1} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (6)$$

При постановке задачи об активном демпфировании колебаний круглой пластины при совместном использовании сенсоров и актуаторов к представленным выше соотношениям необходимо добавить уравнение обратной связи:

$$V_A = -\hat{G}Q, \quad (7)$$

где \hat{G} – коэффициент обратной связи.

Используя соотношения (6), (7), найдем выражение для V_A :

$$V_A = -2\pi(h_0+h_1)\gamma_{31}\hat{G} \int_0^{\rho_1} \left(\frac{d^2\dot{w}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\dot{w}}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (8)$$

Подстановка выражений (7) и (8) в уравнение (1) приводит к модифицированному интегродифференциальному уравнению, в котором появляется дополнительное затухание, пропорциональное скорости изменения поперечного прогиба.

2. ВЫВОД ОБЫКНОВЕННОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Как и в работах [16, 17], ограничимся исследованием вынужденных гармонических колебаний круглой пластины на наиболее энергоемкой первой моде. Решение задачи будем искать методом Бубнова – Галеркина [18]. Для этой цели поперечный прогиб w и резонансные составляющие механической и электрической нагрузок представим в виде

$$w = \eta(\tau)w_1(\rho), \quad (9)$$

$$q = q_1w_1(\rho), \quad \Delta M_0 = M_1w_1(\rho). \quad (10)$$

Здесь $w_1(\rho)$ – некоторая аппроксимация формы колебаний пластины. В качестве таковой выберем функцию

$$w_1(\rho) = (1 - \rho^2)^2, \quad (11)$$

тождественно удовлетворяющую однородным граничным условиям (3).

Применяя одномодовое приближение (9)–(11), из формулы (8) находим

$$V_A = 8\pi(h_0 + h_1)\gamma_{31}\hat{G}(\rho_1^2 - \rho_1^4) \frac{d\eta(\tau)}{d\tau}. \quad (12)$$

Подставляя соотношение (12) в выражение

$$M_0 = \frac{1}{2}\gamma_{31}(h_0 + h_1)V_A, \quad (13)$$

получаем

$$M_0 = 4\pi\gamma_{31}^2(h_0 + h_1)^2\hat{G}(\rho_1^2 - \rho_1^4) \frac{d\eta(\tau)}{d\tau}. \quad (14)$$

При использовании для решения системы интегродифференциальных уравнений (1), (2) с граничными условиями (3)–(5) метода Бубнова – Галеркина в уравнении движения появляется член, содержащий дельта-функции и их производные:

$$\Delta M_0(\rho) = M_0 \left\{ [\delta'(\rho) - \delta'(\rho - \rho_1)] + \frac{1}{\rho} [\delta(\rho) - \delta(\rho - \rho_1)] \right\}. \quad (15)$$

При вычислении интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho_1} \Delta M_0(1 - \rho^2)^2 \rho d\rho &= \\ &= M_0 \int_0^{\rho_1} \left\{ [\delta'(\rho) - \delta'(\rho - \rho_1)] + \frac{1}{\rho} [\delta(\rho) - \delta(\rho - \rho_1)](1 - \rho^2)^2 \right\} \rho d\rho \end{aligned} \quad (16)$$

используем свойства дельта-функций

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\delta'(x - a)]dx &= -f'(a), \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\delta(x - a)]dx &= f(a). \end{aligned}$$

С учетом соотношения (15) найдем

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho_1} \Delta M_0(1 - \rho^2)^2 \rho d\rho &= \\ &= -16\pi(h_0 + h_1)^2\gamma_{31}^2\hat{G}(\rho_1^2 - \rho_1^4)^2 \frac{d\eta}{d\tau}. \end{aligned} \quad (17)$$

По аналогии с [16, 17] приходим к следующему модифицированному интегродифференциальному уравнению относительно $\eta(\tau)$:

$$m\ddot{\eta} + \mu_1\bar{D}_M * \eta - \mu_2\eta D_N * \eta^2 + \mu_3\dot{\eta} = P. \quad (18)$$

Здесь

$$\mu_3 = 16\pi(h_0 + h_1)^2\gamma_{31}^2\hat{G}(\rho_1^2 - \rho_1^4)^2; \quad P = \frac{q}{6}. \quad (19)$$

Остальные обозначения совпадают с обозначениями, приведенными в [16, 17].

3. РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Как и в работах [16, 17], для решения обыкновенного нелинейного интегро-дифференциального уравнения (18) применяем метод гармонического баланса [19], полагая

$$\begin{aligned} q &= q' \cos \omega \tau - q'' \sin \omega \tau, \\ M_0 &= M' \cos \omega \tau - M'' \sin \omega \tau, \end{aligned} \quad (20)$$

где частота механической и электрической нагрузки близка к резонансной частоте упругой пластины, определяемой из соотношения

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_1}{m}}. \quad (21)$$

В соответствии с методом гармонического баланса примем

$$\eta = \eta' \cos \omega \tau - \eta'' \sin \omega \tau \quad (22)$$

и из уравнения (18) получим систему двух нелинейных алгебраических уравнений относительно η' , η'' :

$$\begin{aligned} -m\omega^2 \eta' + \mu_1 \left[D' \eta' - \left(D'' + \frac{\mu_3}{\mu_1} \omega \right) \eta'' \right] - \\ - f_1 &= P', \\ -m\omega^2 \eta'' + \mu_1 \left[\left(D'' + \frac{\mu_3}{\mu_1} \omega \right) \eta' + D' \eta'' \right] - \\ - f_2 &= P'', \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu_2 \left[\frac{1}{2}(1 - D_\infty) \eta' + \frac{1}{4}(1 - D_\infty) \eta' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} D_S \eta'' \right] |\eta|^2; \\ f_2 &= \mu_2 \left[\frac{1}{2}(1 - D_\infty) \eta'' + \frac{1}{4}(1 - D_C) \eta'' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} D_S \eta' \right] |\eta|^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь приняты обозначения из [16, 17]. Из уравнения (23) видно, что представленные в указанных работах формулы сохраняются и для рассматриваемой в настоящей статье задачи, если в них заменить мнимую составляющую изгибного комплексного модуля D'' на модифицированную величину $\hat{D}'' = D'' + \omega \mu_3 / \mu_1$. Из уравнений (23), (24) легко

получить кубическое уравнение для квадрата амплитуды $x = |\eta|^2$ (амплитудно-частотную характеристику):

$$\begin{aligned} (a_{12}^2 + a_{21}^2)x^3 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})x^2 + \\ + (a_{11}^2 + a_{21}^2)x - [P] = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -m\omega^2 + \mu_1 D' \text{ж}; \\ a_{12} &= \mu_2 \left[\frac{1}{2}(1 - D_\infty) + \frac{1}{4}(1 - D_C) \right], \\ a_{21} &= \mu_1 \hat{D}'', \quad a_{22} = \frac{\mu_2}{4} D_S. \end{aligned}$$

Положив в соотношениях (23) $P' = P'' = 0$, получим следующее нелинейное комплексное уравнение для свободных колебаний:

$$-m\omega^2 \tilde{\eta} + \mu_1 [\tilde{D} \tilde{\eta} - \mu_2 |\eta|^2 \tilde{K} \tilde{\eta}] = 0. \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= D' + i \hat{D}'', \quad \tilde{K} = K' + i K'', \quad \tilde{\eta} = \eta' + i \eta''; \\ K' &= \frac{1}{2}(1 - D_\infty) + \frac{1}{4}(1 - D_C), \quad K'' = \frac{1}{4} D_S; \\ \hat{D}'' &= D'' + \frac{\mu_3}{\mu_1} \omega. \end{aligned}$$

Из уравнения (26) находим выражение для комплексной частоты

$$\omega^2 = \Omega^2 (1 + I \eta_n), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{\mu_1}{m} D' - \frac{\mu_2}{m} |\eta|^2 K'; \\ \eta_n &= \frac{\frac{\mu_1}{m} \hat{D}'' - \frac{\mu_2}{m} |\eta''|^2}{\frac{\mu_1}{m} D' - \frac{\mu_2}{m} |\eta|^2 K'}. \end{aligned} \quad (28)$$

Первая величина в последней формуле дает собственную частоту колебаний пластины, а вторая – коэффициент демпфирования.

Уравнение (18) можно упростить, считая влияние геометрической нелинейности и вязкости величинами одного порядка малости. Тогда оно принимает вид

$$\ddot{\eta} + 2\tilde{\mu}_1 \dot{\eta} + \omega_0^2 \eta + K_1 \eta^3 = q_1, \quad (29)$$

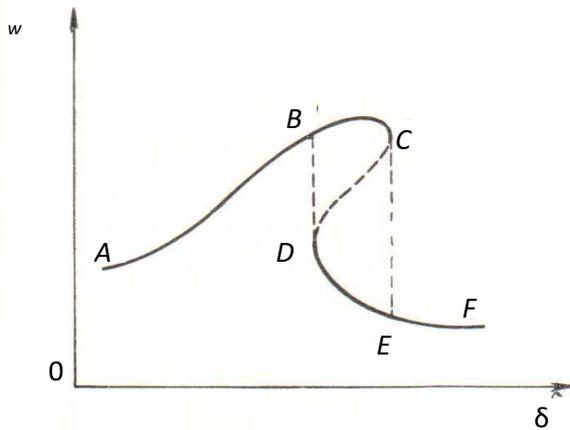


Рисунок. Амплитудно-частотная характеристика

где

$$2\tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_1 D''}{m\omega} + \frac{\mu_3}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{\mu_1 D'}{m};$$

$$K_1 = \frac{|\mu_2| D'}{m}, \quad q_1 = \frac{P}{m}.$$

Пусть $\omega = \omega_0 + \delta$, где

$$\delta/\omega_0 \ll 1. \quad (30)$$

Амплитуда колебаний находится из уравнения для $X = |\eta|^2$ [1]:

$$X \left[\left(\delta - \frac{3K_1}{8\omega_0} X \right)^2 + \tilde{\mu}_1^2 \right] = \frac{q_1^2}{4\omega_0^2}. \quad (31)$$

Решение кубического уравнения (27) дает амплитудно-частотную характеристику, типичную для жестких нелинейных систем (см. рисунок). Максимальная амплитуда находится из этой характеристики и соответствует точке C .

Уравнение (27) имеет три действительных корня при $q_1 > q^*$ [1], где

$$(q^*)^2 = \frac{64\omega_0^3 \tilde{\mu}_1^3}{3K_1}. \quad (32)$$

Границы области с тремя действительными корнями определяются из соотношения [1]

$$\delta^2 + \tilde{\mu}_1^2 - 3K_1 \delta \frac{X^2}{2\omega_0} + 27K_1^2 \frac{X^4}{64\omega_0^2} = 0. \quad (33)$$

Решая совместно уравнения (28) и (29), найдем точки C и D на графике амплитудно-частотной характеристики. Максимальная безразмерная амплитуда будет

$$\tilde{\mu}|\eta|_{\max} = \frac{q_1}{2\tilde{\mu}_1\omega_0}. \quad (34)$$

Ей соответствует размерная амплитуда

$$|w|_{\max} = \frac{p_0 a^4}{64\hat{D}''_M}. \quad (35)$$

Как видно, геометрическая нелинейность не влияет на значение $|w|_{\max}$.

В отличие от случая, рассмотренного в [20], в знаменателе выражения (35) вместо D''_M стоит величина \hat{D}''_M , которой можно управлять за счет выбора коэффициента обратной связи \hat{G} .

4. РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРЫ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА

Как и в [16, 17, 20], для расчета температуры диссипативного разогрева принимаем гипотезу о малости влияния геометрической нелинейности и вязкости. При этом установившаяся (максимальная) температура диссипативного разогрева находится из решения уравнения энергии

$$\frac{\tilde{\lambda}h}{a^2} \Delta\theta - \alpha\theta + Ax(d_0 + d_2\rho^2 + d_4\rho^4) = 0. \quad (36)$$

Здесь $\tilde{\lambda}$ – приведенный коэффициент теплопроводности трехслойной пластины; α – коэффициент, характеризующий теплообмена с внешней средой;

$$A = 4\omega D''; \quad d_0 = 4(1 + \nu_M);$$

$$d_2 = -16(1 + \nu_M); \quad d_4 = (20 + 12\nu_M).$$

Пусть на торце пластины $\rho=1$ задана постоянная температура T_C . Решение задачи получим сначала методом Бубнова – Галеркина, положив

$$\theta = T - T_C = \theta_0(1 - \rho^2). \quad (37)$$

Применяя к уравнению (29) процедуру Бубнова – Галеркина, получим решение, представленное в [20]:

$$\theta_0 = \frac{Bx}{1 + \beta/6} \left(\frac{d_0}{4} + \frac{d_2}{4} + \frac{d_4}{12} \right). \quad (38)$$

Здесь

$$\beta = \frac{a^2\alpha}{\tilde{\lambda}h}; \quad B = \frac{a^2A}{\tilde{\lambda}h}.$$

Температура диссипативного разогрева достигает своего максимального значения в центре пластины и равна $\theta_{\max} = \theta_0$. Принципиальное отличие выражения (38) от аналогичного выражения для максимальной температуры для пластины с сенсорами, представленного в [20], состоит в наличии в

знаменателе для величины \hat{D}'' . Как уже указывалось, за счет выбора коэффициента обратной связи можно управлять максимальной температурой.

Выше получено приближенное решение уравнения энергии (36). Однако можно получить и точное его решение. Для этого сделаем замену переменных $\rho = x\sqrt{\lambda_1/\alpha}$, $\lambda_1 = \lambda h/a^2$, после чего соотношение (36) примет вид

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + x \frac{d\theta}{dx} - x^2\theta = \tilde{d}_0x^2 + \tilde{d}_2x^4 + \tilde{d}_4x^4. \quad (39)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{d}_0 &= \hat{d}_0|\eta|^2; & \hat{d}_0 &= \frac{A}{\lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{\alpha} \right) d_0; \\ \tilde{d}_2 &= \hat{d}_2|\eta|^2; & \hat{d}_2 &= \frac{A}{\lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{\alpha} \right)^2 d_2; \\ \tilde{d}_4 &= \hat{d}_4|\eta|^2; & \hat{d}_4 &= \frac{A}{\lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{\alpha} \right)^3 d_4. \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнение (39) – неоднородное уравнение Бесселя. Легко показать, что его общее решение имеет вид

$$\theta = D_1 I_0(x) - \tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_2 x^2 - \tilde{\theta}_4 x^4, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_0 &= \tilde{d}_0 + 4\tilde{d}_2 + 64\tilde{d}_4 = \hat{\theta}_0|\eta|^2; \\ \hat{\theta}_0 &= (\hat{d}_0 + 4\hat{d}_2 + 64\hat{d}_4); \\ \tilde{\theta}_2 &= \tilde{d}_2 + 16\tilde{d}_4 = \hat{\theta}_2|\eta|^2; \\ \hat{\theta}_2 &= (\hat{d}_2 + 16\hat{d}_4); \\ \tilde{\theta}_4 &= \tilde{d}_4 = \hat{\theta}_4|\eta|^2, & \hat{\theta}_4 &= \hat{d}_4. \end{aligned} \quad (42)$$

Если на контуре пластины задана постоянная температура ($\theta=0$), то постоянная D_1 определяется из соотношения

$$D_1 = (\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2 x_0^4 + \hat{\theta}_4 x_0^4) \frac{|\eta|^2}{I_0(x_0)}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_1}}. \quad (43)$$

При теплоизолированном торце, когда $d\theta/dx=0$, постоянная D_1 будет

$$D_1 = (2\hat{\theta}_2 x_0 + 4\hat{\theta}_4 x_0^3) \frac{|\eta|^2}{I_1(x_0)}. \quad (44)$$

Максимальная температура достигается в центре пластины. Приравнивая ее к точке Кюри, находим критическую амплитуду колебаний:

$$|\eta_{cr}| = \sqrt{\frac{\theta_K}{\theta^0}}, \quad (45)$$

где для заданной на контуре температуры

$$\theta^0 = (\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2 x_0^4 + \hat{\theta}_4 x_0^4) \frac{|\eta|^2}{I_0(x_0)} - \hat{\theta}_0, \quad (46)$$

а для теплоизолированного контура

$$\theta^0 = (2\hat{\theta}_2 x_0 + 4\hat{\theta}_4 x_0^3) \frac{|\eta|^2}{I_1(x_0)} - \hat{\theta}_0. \quad (47)$$

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Подставляя выражение (45) в формулу (25), находим критическое значение параметра нагружения $|P|_{cr}$. Минимальная критическая нагрузка находится путем подстановки выражения (35) в (45):

$$(p_{cr})_{min} = \frac{64\hat{D}''}{a^4} \sqrt{\frac{\theta_K}{\theta^0}}. \quad (48)$$

Здесь θ^0 определяется по формулам (46) или (47) в зависимости от типа тепловых граничных условий.

Анализ существенно упрощается при использовании полученного выше методом Бубнова – Галеркина приближенного решения. Можно показать, что $\mu_2 \ll 0$. Поэтому из соотношений (27), (28) следует, что амплитудно-частотная характеристика, как и для прямоугольной пластины [20], – неоднозначная и жесткая, а коэффициент демпфирования зависит от амплитуды колебаний нелинейно, причем, в зависимости от значений фигурирующих в этой формуле параметров, может как уменьшаться, так и увеличиваться с ростом амплитуды. Из соотношения (14) вытекает, что эффективность активного демпфирования будет самой высокой при следующих размерах сенсоров и актуаторов: $\rho_1 = \sqrt{2}/2$.

Из формул (30), (31) следует, что при достижении температурой точки Кюри $\theta_K = T - T_K$, работа сенсора ухудшается, поскольку при этой температуре $\gamma_{31}(T_K) = 0$ и пьезоактивный материал становится пассивным. Из (27) имеем выражение для критической амплитуды колебаний: $x_{cr} = A_2 \theta_K$, где

$$A_2 = \frac{1 + \theta/6}{B(d_0/4 + d_2/2 + d_4/12)}.$$

Критическая механическая нагрузка определяется из соотношения (21):

$$\begin{aligned} P_{cr}^2 &= (a_{12}^2 + a_{21}^2) A_2^3 \theta_K^3 + \\ &+ 2(a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22}) \left(\frac{C_0}{C_1} \right)^2 A_2^2 \theta_K^2 + \\ &+ (a_{11}^2 + a_{21}^2) A_2 \theta_K. \end{aligned} \quad (49)$$

Более точное значение критической нагрузки найдем, полагая, что температура диссипативного разогрева достигается в точке $\rho = \rho_1$. При этом во всей активной области $0 \leq \rho \leq \rho_1$ температура диссипативного разогрева превышает точку Кюри. Тогда критическая нагрузка определяется из приведенной выше формулы (32), если в ней заменить величину θ_K на величину $\hat{\theta}_K = \theta_K / (1 - \rho_1^2)$. При оптимальных размерах актуатора $\rho_1^2 = 1/2$ получаем $\hat{\theta}_K = 2\theta_K$. При соответствующем этой температуре значении механической нагрузки управлять колебаниями пластины становится невозможным.

По аналогии с изложенным в [20] получим выражения для минимального критического значения параметра нагружения:

$$P_1 = \frac{q_{\min} a^4}{64(1 + \tilde{\beta})} \sqrt{\frac{\omega_0(d_0 + d_2 + d_4/3)}{\alpha D''}} = \sqrt{1 + \frac{1}{(a/h)^2} \text{Bi}}. \quad (50)$$

Здесь число Био Bi изменяется за счет варьирования коэффициента теплопроводности, а коэффициент теплообмена остается постоянным.

При изменении числа Био за счет варьирования коэффициента теплообмена получаем следующий минимальный параметр нагружения:

$$P_2 = \frac{q_{\min} a^4 (a/h)}{64(1 + \tilde{\beta})} \sqrt{\frac{h\omega_0(d_0 + d_2 + d_4/3)}{\tilde{\lambda} D''}} = \sqrt{1 + (a/h)^2 \text{Bi}}. \quad (51)$$

Детальный анализ влияния изменения числа Био на минимальный параметр нагружения представлен в [20].

Принципиальная особенность рассмотренного в данной работе случая состоит в том, что в выражениях для P_1 и P_2 в знаменателе появилась величина $\tilde{\beta}$, которую можно изменять за счет изменения коэффициента обратной связи. Таким образом, минимальным критическим значением параметра нагружения можно управлять. Так как температура отличается от квадрата амплитуды колебаний только постоянным множителем (см. соотношение (30)), то температурно-частотная характеристика для рассматриваемой системы также будет неоднозначной и жесткой.

ВЫВОДЫ

Методом Бубнова–Галеркина в сочетании с методом гармонического баланса получено аналити-

ческое решение задачи об активном демпфировании вынужденных резонансных колебаниях гибкой круглой вязкоупругой пластины при совместном использовании пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Торце пластины считается жестко заземленным. На поверхности пластины в виде пятен нанесены трансверсально-изотропные пьезоэлектрические слои с противоположной поляризацией, выполняющие функции сенсора и актуатора.

Для исследования влияния геометрической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность активного демпфирования колебаний пластины получено кубическое уравнение. Показано, что, в отличие от линейного случая, амплитудно-частотные и температурно-частотные характеристики будут неоднозначными с типичными для нелинейных систем перескоками с одной устойчивой ветви на другую.

Температура диссипативного разогрева оказывает существенное влияние на эффективность работы сенсора. В частности, при достижении температурой точки Кюри для пьезоматериала имеет место специфический тип теплового разрушения, когда сенсоры и актуаторы теряют свое функциональное назначение из-за потери материалом пьезоэффекта. Найдено выражение для критической механической нагрузки, при которой происходит тепловое разрушение. За счет выбора коэффициента обратной связи в соотношении между показаниями сенсора и подводимой к актуатору разности потенциалов можно в достаточно широких пределах управлять коэффициентом демпфирования пластины.

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1967. – 266 с.
2. Григолюк Э. И. Прочность, колебания и устойчивость круговых пластин. Часть I. – М.: НИИ мех. МГУ, 1997. – 134 с.
3. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины. – М.: Физматгиз, 1959. – 290 с.
4. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 308 с.
5. Матвеев В. В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.
6. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
7. Jones D. I. Handbook of viscoelastic vibration damping. – New York: John Wiley and Sons, 2001. – 412 p.
8. Li Z., Crocker M. J. A review on vibration damping in sandwich composite structures // Int. J. Acoust. Vib. – 2005. – 10, № 4. – P. 159–169.

9. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems.– Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 2001.– 384 p.
10. *Tani J., Takagi T., Qiu J.* Intelligent material systems // Applications of functional materials.– Appl. Mech. Rev.– 1998.– P. 51, № 8.505–521
11. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.– 400 p.
12. *Schwartz M. (ed.)* Encyclopedia of Smart Materials: in 2 vols.– New York: John Wiley and Sons, 2002.– 1176 p.
13. *Kapurja S., Dumir P. C.* Geometrically nonlinear axisymmetric response of thin circular plate piezoelectric actuation // Nonlin. Sci. Num. Sim.– 2005.– 10.– P. 411–423.
14. *Donoso A., Bellido J. C.* Distributed piezoelectric modal sensors for circular plates // J. Sound Vib.– 2009.– 319, № 1-2.– P. 50–57.
15. *Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Зражевская В. Ф.* Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой пластины при помощи пьезоактуаторов // Теор. прикл. мех.– 2009.– 45.– С. 114–123.
16. *Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В.* Резонансные изгибные колебания гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины с пьезоэлектрическими сенсорами // Теор. прикл. мех.– 2009.– 45.– С. 124–130.
17. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина.– М.: Мир, 1988.– 352 с.
18. *Митропольский Ю. А.* Нелинейная механика. Одночастотные колебания.– К.: Ин-т мат. НАНУ, 1997.– 344 с.
19. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В.* Моделювання вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами // Фіз.-мат. модел. інформ, технол.– 2008.– 8.– С. 48–68.
20. *Карнаухов В. Г., Шевченко А. Ю., Карнаухова Т. В.* Диссипативний розогрев и потеря функциональной способности гибкой жестко заземленной вязкоупругой круглой пластины с пьезоэлектрическими сенсорами при вынужденных резонансных колебаниях // Акуст. вісн.– 2011.– 14, № 4.– С. 18–26.