

УДК 539.3

РАССЕЯНИЕ ВОЛН РЭЛЕЯ – ЛЭМБА НА ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ТРЕЩИНЕ В УПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ. I. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В. Т. ГРИНЧЕНКО, Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ*,
Е. А. НЕДИЛЬКО, И. В. СТАРОВОЙТ

Институт гидромеханики НАН Украины
ул. Желябова, 8/4, 03680, ГСП, Киев-180, Украина

*E-mail: nsgihm@gmail.com

Получено 12.01.2012

На основе метода суперпозиции проведен расчет рассеяния волн Рэлея – Лэмба на вертикальной открытой трещине в упругом волноводе. Хорошая сходимость решения обеспечивается учетом характера особенности по напряжениям, существующей в вершине трещины. Приведены численные результаты, подтверждающие эффективность метода.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: упругий волновод, волны Рэлея – Лэмба, трещина, сингулярность, метод суперпозиции

На базі методу суперпозиції проведено розрахунок розсіяння хвиль Релея – Лемба на відкритій тріщині у пружному хвилеводі. Хороша збіжність методу забезпечується урахуванням характеру особливості по напруженням, яка існує у вершині тріщини. Наведені чисельні результати, які підтверджують ефективність методу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: пружний хвилевід, хвилі Релея – Лемба, тріщина, сингулярність, метод суперпозиції

A scattering of the Rayleigh – Lamb waves on a vertical crack in an elastic waveguide is calculated by a method of superposition. A good convergence of solution is provided by the allowance for singularity on stresses arising at the angular point of the crack. The numerical results confirming the efficiency of the method are presented.

KEY WORDS: elastic waveguide, the Rayleigh – Lamb waves, crack, singularity, a method of superposition

ВВЕДЕНИЕ

Обнаружение трещины в упругих телах ограниченных размеров уже многие десятилетия остается одной из наиболее актуальных проблем механики разрушения, дефектоскопии, акустической эмиссии. Наличие даже небольшой трещины в упругих телах, подверженных механическим нагрузкам или расположенных в агрессивных средах, приводит к ее росту и, в конечном итоге, к разрушению конструкций. Кроме того, в окрестности дефекта возникает локальная концентрация напряжений, информация о которой становится определяющей при принятии решения о возможности дальнейшей эксплуатации конструкции. Особенно опасны концентраторы напряжений на границе раздела материалов с различными механическими свойствами или в ее окрестности. Для обнаружения поверхностных или внутренних трещин используются различные методы неразрушающего контроля, наиболее распространенными из которых являются ультразвуковая, рентгено- и гамма-дефектоскопия, а также визуальное наблюдение. При разработке методик обнаружения и локализации трещин методами неразрушающе-

го контроля приходится решать ряд модельных задач, позволяющих сделать некоторые предварительные выводы о их влиянии на сопутствующее распределение физико-механических полей в объекте. Одна из наиболее простых таких задач сводится к анализу отражения P- и SV-волн от трещины в неограниченной упругой среде или упругом полупространстве [1, 2]. Учет ограниченности объекта приводит к значительному усложнению процесса отражения от трещины.

Для контроля механических свойств протяженных структур (например, трубопроводов) используют нормальные волны в упругих волноводах – SH-волны и волны Рэлея – Лэмба. Рассеянию SH-волн на трещине в упругом волноводе посвящено много работ. Отметим некоторые из них. В статье [3] методом однородных решений решена задача о рассеянии нормальных волн на трещине в полуполосе, возбуждаемой нагрузкой на торце. Трещина перпендикулярна распространению волн, симметрична относительно оси волновода и ее берега выходят на свободные границы. В работе получены энергетические коэффициенты отражения и прохождения и предложен метод учета особенности в вершине трещины. В публикации [4]

также методом однородных решений изучалось рассеяние падающей SH-волны на трещину конечных размеров, расположенную параллельно оси волновода и смещенную относительно оси. Рассеяние SH-волн на выемке при симметричных и антисимметричных колебаниях полосы рассматривалось в статьях [5, 6]. Здесь и в ряде других работ показана существенная зависимость коэффициентов отражения от длины неоднородности.

Анализ процесса рассеяния волн Рэлея – Лэмба на трещине конечной длины более информативен с точки зрения обнаружения и локализации неоднородности, по сравнению со случаем распространения SH-волн. Однако эта задача значительно более сложна, поскольку нормальная волна Рэлея – Лэмба образована продольной и поперечной волнами, которые взаимодействуют на границах.

Отмеченные физические особенности привели к тому, что к настоящему времени при решении задач рассеяния упругих волн на ограниченных трещинах в волноводах доминируют численные методы. Так, в работах [5 – 7] для анализа рассеивания волн Рэлея – Лэмба на выемке в упругом волноводе использовался метод конечных элементов. Кроме того, приведены экспериментальные данные, подтверждающие проведенные расчеты. Обнаружено, что при увеличении глубины выемки коэффициенты отражения могут как увеличиваться, так и уменьшаться в зависимости от частоты. В работах [8, 9] развит подход к описанию рассеяния волн на трещине с использованием метода граничных элементов.

В сожалению, использование численных методов для изучения рассеяния волн Рэлея – Лэмба на трещинах конечной длины в упругих телах и волноводах порождает существенные сложности при проведении качественного анализа рассматриваемых процессов и выделении таких факторов, определяющих специфику процесса, как амплитуды или фазы отдельных нормальных волн. Исходя из этого, следует признать актуальной разработку численно-аналитических подходов к решению соответствующих граничных задач. Среди работ, посвященных этому вопросу, следует выделить статьи [10, 11], где при изучении рассеяния на горизонтальной трещине, расположенной на оси упругого слоя, применялся метод Винера – Хопфа. Методы на основе интегральных соотношений развивались в работах [12] для анализа дифракции волн на наклонной внутренней трещине в безграничном слое и [13] для анализа дифракции волн на горизонтальных трещинах в полупространстве и слое. Здесь использовано интегральное представление волнового поля для скачка смещений на трещине,

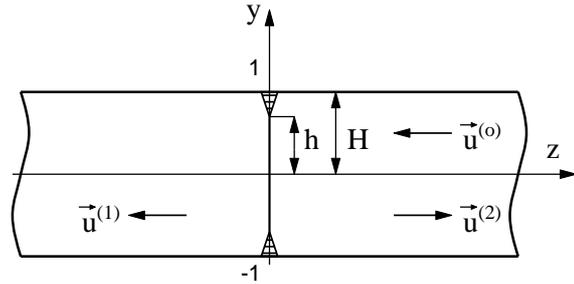


Рис. 1. Геометрия задачи

представленное в виде комбинации излучаемых ею и переотраженных от границ волн. В публикации [14] развиты численно-аналитические методы решения граничных интегральных уравнений, к которым сводится граничная задача о взаимодействии тонких криволинейных трещин с матрицей.

Кроме того, заслуживают внимания комбинированные методы, в которых волновое поле вблизи трещины определяется численно (методом конечных элементов или конечных разностей), а вдали представляется в виде нормальных распространяющихся волн. Подобный подход применялся в статье [15] для изучения рассеяния волн на горизонтальной трещине, расположенной на оси волновода. Метод однородных решений с использованием условия обобщенной ортогональности использован в [16] для анализа особенностей рассеяния на горизонтальной трещине, смещенной относительно оси волновода. В работе [17] методом однородных решений решена задача рассеяния волн на вертикальной, симметричной трещине в слое (рассматривался только низкочастотный диапазон). Отметим, что в обеих публикациях особенность в вершине трещины не выделялась. В статье [19] для анализа рассеяния волн на вертикальной трещине в упругом слое модифицирован метод проекций, позволяющий учесть характер сингулярности в вершине трещины.

Эта статья посвящена дальнейшему развитию метода суперпозиции для решения граничной задачи о рассеянии волн на вертикальной трещине в упругом волноводе. При этом особенность по напряжениям, имеющая место в вершине трещины, учитывается через асимптотические свойства неизвестных.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарное волновое поле в упругом волноводе высотой $2H$, в котором имеется

открытая трещина, расположенная на расстоянии h от оси волновода (рис. 1). Исследуемое поле антисимметрично относительно плоскости $Y=0$ и возбуждается первой нормальной волной, приходящей из бесконечности в правой полуполосе $(+\infty)$. В дальнейшем падающей волне присвоим индекс 0, а индексы 1 и 2 – прошедшим и отраженным волнам соответственно. Свойства заполняющей волновод изотропной среды характеризуются модулем сдвига μ , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Предполагается, что трещина бесконечно тонкая и ее берега не взаимодействуют между собой. Эти допущения оправданы, поскольку толщина трещины существенно меньше поперечного размера волновода $2H$, а длина падающей волны значительно превышает упругие смещения на берегах трещины.

В дальнейшем математическая постановка и решение осуществляются в безразмерных координатах $y=Y/H$, $z=Z/H$, $\alpha=h/H$. Поверхности $y=\pm 1$ свободны от напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_y(\pm 1, z) &= 0, \\ \tau_{yz}(\pm 1, z) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В зоне контакта $z=0$, $|y| \leq \alpha$ выполняются условия жесткого сцепления

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(y, 0) &= \sigma_z^{(2)}(y, 0) + \sigma_z^{(0)}(y, 0), \\ \tau_{zy}^{(1)}(y, 0) &= \tau_{zy}^{(2)}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0), \\ u_y^{(1)} &= u_y^{(2)} + u_y^{(0)}, \\ u_z^{(1)} &= u_z^{(2)} + u_z^{(0)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Берега трещины также свободны от напряжений, т. е. при $z=0$, $|y| \geq \alpha$ справедливо

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(y, 0) &= 0, \\ \sigma_z^{(2)}(y, 0) + \sigma_z^{(0)}(y, 0) &= 0, \\ \tau_{zy}^{(1)}(y, 0) &= 0, \\ \tau_{zy}^{(2)}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее опущен временной множитель $e^{-i\omega t}$ (ω – круговая частота), т. е. мы работаем с амплитудными значениями физических величин.

Необходимо найти вектора смещений в отраженном и прошедшем полях, удовлетворяющих векторному уравнению Ламе:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где $\Omega_2 = \omega H / c^{(s)}$ – безразмерная частота; $c^{(s)}$ – скорость поперечной волны.

Дополнительно к условиям сопряжения (2), (3) должны выполняться условия излучения, заключающиеся в том, что каждая распространяющаяся нормальная волна в прошедшем и отраженном поле уносит энергию от границы $z=0$, $|y| \leq 1$ на бесконечность.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Применим метод суперпозиции [20], позволяющий учесть особенности по напряжениям в вершине трещины. В рамках этого подхода построим решения для отраженного и прошедшего полей при антисимметричных колебаниях рассматриваемой системы, представив компоненты вектора смещений в областях 1 и 2 как решение векторного уравнения (4) в полуполосе. Согласно общей схеме метода суперпозиции [20], компоненты вектора смещений в полуполосе образуются из двух составляющих. Первая из них обладает достаточным произволом для удовлетворения граничных условий на поверхностях $y=\pm 1$. Этим требованиям отвечает общее решение граничной задачи для бесконечной полосы. Вторую составляющую решения принимаем в виде известного решения граничной задачи для $2H$ -периодически деформируемой полуплоскости. Оно записывается как сумма, представляющая собой ряд Фурье по полным системам тригонометрических функций. Это обеспечивает выполнение двух произвольных граничных условий при $z=0$. Таким образом, прошедшее поле ($z < 0$) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_y^{(1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k \beta_k e^{q_1 z} - D_k q_2 e^{q_2 z} \right) \cos \beta_k y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(\tau) U_y^{(1)}(\tau, y) e^{-i\tau z} d\tau, \\ u_z^{(1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k q_1 e^{q_1 z} - D_k \beta_k e^{q_2 z} \right) \sin \beta_k y + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(\tau) U_z^{(1)}(\tau, y) e^{-i\tau z} d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

с неизвестными постоянными C_k , D_k ($k=1, 2, \dots$) и функцией $x^{(1)}(\tau)$. Выполнение граничных условий для $\tau_{yz}(\pm 1, z)$ приводит к выражениям

$$U_y(\tau, y) = \tau^2 \frac{\text{ch } p_2 y}{\text{ch } p_2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{2} \frac{\text{ch } p_1 y}{\text{ch } p_1},$$

$$U_z(\tau, y) = \tau \left(-p_2 \frac{\text{sh } p_2 y}{\text{ch } p_2} + \frac{\tau^2 + p_2^2}{2p_1} \frac{\text{sh } p_1 y}{\text{ch } p_1} \right),$$

$$p_j = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & |\tau| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & |\tau| < \Omega_j; \end{cases}$$

$$q_j = \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & |\beta_k| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & |\beta_k| < \Omega_j; \end{cases}$$

$$\beta_k = \frac{2k-1}{2\pi}.$$

Здесь $\Omega_1^{(1)} = \omega H / c^{(l)}$; $c^{(l)}$ – скорость продольной волны в первой полуплоскости. Решение для отраженного поля (при $z > 0$) получаем из соотношений (5) путем замены индекса 1 на 2, неизвестных C_k – на A_k и D_k – на $-B_k$, а также смены знаков при z , u_z и $D_k^{(2)}$.

Пусть волновое поле в волноводе возбуждается первой нормальной волной, распространяющейся во второй полуплоскости в отрицательном направлении (влево по оси z). В этом случае выражения для смещений в падающей волне имеют следующий вид:

$$u_z^{(0)} = C^0 \xi \left(p_2 \frac{\text{sh } p_2 y}{\text{ch } p_2} - \frac{\xi^2 + p_2^2}{2p_1} \frac{\text{sh } p_1 y}{\text{ch } p_1} \right) e^{-i\xi z},$$

$$u_z^{(0)} = C^0 i \left(\xi^2 \frac{\text{ch } p_2 y}{\text{ch } p_2} - \frac{\xi^2 + p_2^2}{2} \frac{\text{ch } p_1 y}{\text{ch } p_1} \right) e^{-i\xi z}.$$

Здесь ξ – постоянная распространения. Она равна действительному корню дисперсионного уравнения, которое для антисимметричных колебаний изотропного бесконечного слоя со свободными поверхностями записывается как

$$\Delta(\xi) = \xi^2 p_2 \text{th } p_2 - (2\xi^2 - \Omega_2^2)^2 \frac{\text{th } p_1}{4p_1} = 0. \quad (7)$$

Выполнение условия отсутствия нормальных напряжений на поверхностях $y = \pm 1$ определяет связь между неизвестными постоянными C_k , D_k

($k=1, 2, \dots$) и функцией $x^{(1)}(\tau)$ для прошедшего поля с неизвестными постоянными A_k , B_k ($k=1, 2, \dots$) и функцией $x^{(2)}(\tau)$ для отраженного поля, которые будут приведены ниже. При дальнейших рассуждениях используем условия сопряжения (2), (3). При этом напряжения и смещения для отраженного и прошедшего полей в формуле (2) приравниваются на интервале $|y| \leq \alpha$, составляющем только часть ширины волновода $|y| \leq 1$, на которой напряжения разложены в ряды Фурье по полным и ортогональным системам базисных функций. Для того, чтобы преодолеть эту трудность, объединим условия сопряжения для напряжений (2) и (3), подобно тому, как это было сделано в [21, 22]:

$$\sigma_z^{(1)}(y, 0) = \sigma_z^{(2)}(y, 0) + \sigma_z^{(0)}(y, 0),$$

$$\tau_{zy}^{(1)}(y, 0) = \tau_{zy}^{(2)}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0), \quad |y| \leq 1. \quad (8)$$

Кроме того, по аналогии с [21, 22] напряжение в прошедшем поле представим по полному интервалу как некоторую неизвестную функцию в области жесткого сцепления $|y| \leq \alpha$ и выполним условия отсутствия напряжений на берегах трещины:

$$\sigma_z^{(1)}(y, 0) = \begin{cases} \sigma_z^{(3)}(y, 0), & |y| \leq \alpha, \\ 0, & |y| > \alpha, \end{cases}$$

$$\tau_{zy}^{(1)}(y, 0) = \begin{cases} \tau_{zy}^{(3)}(y, 0), & |y| \leq \alpha, \\ 0, & |y| > \alpha. \end{cases} \quad (9)$$

Неизвестные функции $\sigma_z^{(3)}$ и $\tau_{zy}^{(3)}$ зададим как решение граничной задачи для периодически деформируемой полуплоскости с периодом $2h$. Для нормальных напряжений оно имеет вид:

$$\sigma_z^{(3)}(y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\beta_k y}{\alpha} \times \left(H_k \frac{2\beta_k^2 - \alpha^2 \Omega_2^2}{2} - G_k \beta_k \tilde{q}_2 \right).$$

Здесь

$$\tilde{q}_2 = \begin{cases} \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 \Omega_2^2}, & |\beta| \geq \alpha \Omega_2, \\ -i\sqrt{\alpha^2 \Omega_2^2 - \beta^2}, & |\beta| < \alpha \Omega_2. \end{cases}$$

Выполнение условий сопряжения для напряжений (9), (10) и для смещений (2) приводит к системе интегро-алгебраических уравнений относительно неизвестных A_k , B_k , C_k , D_k , H_k , G_k ($k=1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned}
 x_1(\tau)\Delta(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \frac{q_1(\beta_k^2 + \Omega_0^2)}{\tau^2 + q_1^2} - d_k \frac{\beta_k q_2^2}{\tau^2 + q_2^2} \right) &= 0, \\
 x_{(2)}(\tau)\Delta(\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{2q_1(\beta_k^2 + \Omega_0^2)}{\tau^2 + q_1^2} + b_k \frac{2\beta_k q_2^2}{\tau^2 + q_2^2} \right) = 0, \\
 a_k q_1 \beta_k + b_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} + c_k q_1 \beta - d_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} &= -\xi \beta_k (2\xi^2 - \Omega_2^2) \left(\frac{1}{\beta_k^2 + \xi^2 - \Omega_2^2} - \frac{1}{\beta_k^2 + \xi^2 - \Omega_1^2} \right), \\
 a_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} + b_k \beta_k q_2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) Z_k(\tau) d\tau - c_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} + d_k \beta_k q_2 - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) Z_k(\tau) d\tau = -i Z_k(\xi), \\
 c_k q_1 \beta_k - d_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} - \frac{2 \cos \beta_k \alpha}{\alpha} (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\beta_k^2 - \beta_n^2 / \alpha^2} \left(h_n \beta_n \tilde{q}_1 - g_n \frac{2\beta_k^2 - \alpha^2 \Omega_2^2}{2} \right) &= 0, \\
 c_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} - d_k \beta_k q_2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) Z_k(\tau) d\tau - \\
 &\quad - (-1)^k 2 \cos \beta_k \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_n \frac{2\beta_n^2 - \alpha^2 \Omega_2^2}{2(\beta_k^2 - \beta_n^2 / \alpha^2)} - g_n \frac{\beta_n^2 \tilde{q}_2}{\beta_k^2 - \beta_n^2 / \alpha^2} \right) = 0, \\
 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(a_n q_1 + b_n \beta + c_n q_1 + d_n \beta \right) \frac{\beta \cos \beta_n \alpha}{\beta_n^2 - \beta_k^2 / \alpha^2} &= \\
 &= -\xi \left(\frac{p_2^2(\xi)}{\xi^2 + \beta_k^2 / \alpha^2 - \Omega_2^2} \frac{\operatorname{ch} p_2(\xi) \alpha}{\operatorname{ch} p_2(\xi)} - \frac{2\xi^2 - \Omega_2^2}{\xi^2 + \beta_k^2 / \alpha^2 - \Omega_1^2} \frac{\operatorname{ch} p_1(\xi) \alpha}{\operatorname{ch} p_1(\xi)} \right), \\
 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-a_n \beta_n - b_n q_2 + c_n \beta_n - d_n q_2 \right) \frac{\cos \beta_n \alpha}{\beta_n^2 - \beta_k^2 / \alpha^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) T_k(\tau) d\tau + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) T_k(\tau) d\tau = -i T_k(\xi).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$Z_k(\tau) = \frac{2\tau^2 p_2^2}{\beta_k^2 + p_2^2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{\beta_k^2 + p_1^2}; \quad T_k(\tau) = \frac{\tau^2}{p_2^2 + \beta_k^2 / \alpha^2} \frac{\operatorname{ch} p_2 \alpha}{\operatorname{ch} p_2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{2(p_2^2 + \beta_k^2 / \alpha^2)} \frac{\operatorname{ch} p_1 \alpha}{\operatorname{ch} p_1};$$

$$a_k = (-1)^k A_k; \quad b_k = (-1)^k B_k; \quad c_k = (-1)^k C_k; \quad d_k = (-1)^k D_k; \quad h_k = (-1)^k H_k; \quad g_k = (-1)^k G_k.$$

Структура системы (11) указывает на важную особенность алгебраических соотношений, вытекающих из условий сопряжения на поверхности $z=0$ – она относится к системам первого рода. Как правило, такие системы плохо обусловлены, что значительно усложняет их численную реализацию. Кроме того, при вычислении рассеянного на трещине волнового поля применение простой редукции интегро-алгебраических уравнений может порождать значительные погрешности. Это обусловлено наличием в вершине трещины корневой особенности по напряжениям [23, 24], существование которой приводит к тому, что в рамках метода суперпозиции интегралы и ряды для напряжений на поверхности $z=0$ сходятся медленно.

Для получения решения, адекватно описывающего рассеяно на трещине волновое поле, следует использовать асимптотические свойства неизвестных. Анализ асимптотического их поведения в суммах основан на свойствах сходимости рядов для напряжений вблизи вершины трещины.

Представим нормальное и касательное напряжения на промежутке $z=0, |y| \leq \alpha$ в виде

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(3)}(y, 0) &= \frac{y\sigma_0}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}, \\ \tau_{zy}^{(3)}(y, 0) &= \frac{\tau_0}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}, \end{aligned} \quad y \rightarrow \alpha. \quad (12)$$

Здесь σ_0 и τ_0 – неизвестные амплитуды напряжений. Используя стандартные интегралы [25]

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha (\alpha^2 - y^2) \cos by \, dy &= \frac{\pi}{2} J_0(b\alpha), \\ \int_0^\alpha y(\alpha^2 - y^2) \sin by \, dy &= \frac{\pi}{2} \alpha J_1(b\alpha), \end{aligned}$$

алгебраизуем соотношения (12) и получим уравнения для нахождения асимптотики неизвестных $H_n, G_n, n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} H_k \frac{2\beta_k^2 - \alpha^2 \Omega_2^2}{2} - G_k \beta_k \tilde{q}_2 &= \pi \sigma_0 J_1(\beta_k), \\ H_k \beta_k \tilde{q}_1 - G_k \frac{2\beta_k^2 - \alpha^2 \Omega_2^2}{2} &= \frac{\pi}{\alpha} \tau_0 J_0(\beta_k). \end{aligned} \quad (13)$$

Найдя асимптотику неизвестных H_n, G_n при $n \rightarrow \infty$ с использованием пятого и шестого уравнений системы (11), запишем уравнения для на-

хождения асимптотики для $C_n, D_n, n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} C_k \frac{2\beta_k^2 - 2\Omega_2^2}{2} - D_k \beta_k q_2 &= \pi \sigma_0 \alpha J_1(\beta_k \alpha), \\ C_k \beta_k q_1 - D_k \frac{2\beta_k^2 - \Omega_2^2}{2} &= \pi \tau_0 J_0(\beta_k \alpha). \end{aligned} \quad (14)$$

Определив асимптотическое поведение неизвестных c_k и d_k при $k \rightarrow \infty$ с использованием третьего и четвертого уравнений системы (11), запишем асимптотику для a_k и b_k .

Построение конечной системы, соответствующей бесконечной системе (11), выполнено по аналогии с работой [20] с учетом асимптотического поведения неизвестных коэффициентов и функций $x^{(1)}(\tau), x^{(2)}(\tau)$. Последующее построение алгоритма решения связано со способом ее замыкания. Мы использовали традиционный подход, основанный на задании асимптотических выражений для двух неизвестных c_k и d_k . В этом случае σ_0 и τ_0 также становятся неизвестными, а коэффициенты $c_k^{(i)}, d_k^{(i)}$ для всех $k > K$ задаются в асимптотическом виде.

Заканчивая описание метода суперпозиции применительно к решению задачи рассеивания нормальных волн на вертикальной приповерхностной трещине в упругом волноводе, подчеркнем еще раз, что основное его преимущество заключается в возможности учета локальных особенностей по напряжениям в вершине трещины. Это позволяет построить эффективный алгоритм для вычисления характеристик рассеянного поля при учете конечного числа слагаемых в рядах системы (11).

3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАСЧЕТОВ

При определении порядка линейной системы, соответствующей соотношениям (11), необходимо оценить качество приближенного решения, описывающего рассеянное на трещине волновое поле. Для этого существует ряд критериев. В нашем случае контролировались точность выполнения условий сопряжения на поверхности $z=0$, точность выполнения закона сохранения энергии и скорости приближения неизвестных к их асимптотическим значениям. При выполнении расчетов количество удерживаемых в суммах неизвестных составляло $N_K = 20$. Для величин с $k > N_K$ использовались их асимптотические значения. Интегрирование на интервале $(-\infty, +\infty)$ с учетом четности подынтегральных функций сводилось к интегрированию в пределах $(0, T)$ с добавлением оценки интеграла на $(T, +\infty)$, полученного при

использовании асимптотических разложений подынтегральных выражений по τ . При расчетах принималось $T=200$.

Для величины трещины, соответствующей $\alpha=0.9$, закон сохранения энергии выполнялся с точностью до 99.8 % энергии падающей волны. Условия сопряжения по смещениям выполнялись с точностью до 95 % смещения падающей волны, а условия сопряжения по напряжениям – с погрешностью до 10 % всюду, кроме малой окрестности вершины трещины. Кроме того, при вычислениях было установлено, что при сохранении более двадцати членов значения неизвестных a_k, b_k, c_k, d_k ($k=1, \dots, 4$) практически не изменяются (сохраняются три значащие цифры). Этим обеспечивается высокая точность оценок интегральных характеристик волновых полей.

Для достижения указанной точности решения задачи при увеличении длины трещины необходимо увеличивать число N_K членов ряда исходной системы. В частности, при $\alpha=0.8$ это может быть обеспечено при $N_K \geq 25$.

Одним из критериев достоверности решения был контроль за точностью выполнения закона сохранения энергии. В свою очередь, сумма энергий отраженного и прошедшего полей равна энергии падающей волны. Энергия отраженного поля равна сумме энергий, переносимой каждой распространяющейся волной, которая может существовать на данной частоте. Она определяется соотношением

$$W = \sum_{j=1}^J W_j, \quad (15)$$

$$W_j = |K_j|^2 \frac{\mu\omega\Omega_2^2}{2} \Delta'(\xi_j).$$

Здесь J – число распространяющихся волн в отраженном поле; K_j – коэффициент возбуждения j -ой нормальной волны.

Коэффициенты K_j для j -ой нормальной волны в отраженном поле находились из соотношения

$$K_j^{(\text{от})} = \text{Re } s_{\tau=\xi_j} x(\tau), \quad (16)$$

где $\text{Re } s$ обозначают вычеты функции $x(\tau)$ при $\tau=\xi_j$. Используя значения неизвестных, найденных в рамках метода суперпозиции с учетом особенности по напряжениям в вершине трещины, запишем

$$K_j^{(\text{от})} \Delta'(\xi_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \frac{2q_1(\beta_k^2 + \Omega_0^2)}{\xi_j^2 + q_1^2} - d_k \frac{2\beta_k q_2^2}{\xi_j^2 + q_2^2} \right) + \tau_0 S_K^{(1)}(\xi_j) + \sigma_0 S_K^{(2)}(\xi_j). \quad (17)$$

Здесь $S_K^{(i)}(\xi_j)$ определяются как

$$S_K^{(1)}(\xi) = 4 \sum_{k=K+1}^{\infty} (-1)^k J_0(\beta_k \alpha) \left(\frac{\beta_k}{2(\xi^2 + q_1^2)} + \frac{\beta_k \xi^2}{(\xi^2 + q_1^2)(\xi^2 + q_2^2)} + \frac{4\Omega_1^4 - 2\Omega_1^2 \Omega_2^2 + \Omega_2^4}{8\beta_k((\xi^2 + q_1^2)(\Omega_2^2 - \Omega_1^2))} - \frac{\Omega_2^4}{8\beta_k^3(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)} + \frac{\xi^2(\Omega_2^4 + \Omega_1^4)}{4\beta_k(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)(\xi^2 + q_1^2)(\xi^2 + q_2^2)} \right);$$

$$S_K^{(2)}(\xi) = -4 \sum_{k=K+1}^{\infty} \left(\frac{\beta_k \xi^2}{(\xi^2 + q_1^2)(\xi^2 + q_2^2)} + \frac{\Omega_2^2(\Omega_2^2 + 2\Omega_1^2)}{8\beta_k(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)(\xi^2 + q_1^2)} + \frac{\Omega_2^2(2\Omega_1^2 - 3\Omega_2^2)}{8\beta_k^3(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)} + \frac{\xi^2(3\Omega_1^4 + 3\Omega_2^4 - 4\Omega_2^2 \Omega_1^2)}{4\beta_k(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)(\xi^2 + q_1^2)(\xi^2 + q_2^2)} \right) (-1)^k J_1(\beta_k \alpha).$$

Энергия прошедшего поля определяется аналогично.

При числе неизвестных, удерживавшихся в конечной системе при расчетах, закон сохранения энергии выполнялся с точностью до 0.2 % энергии падающей волны. Следует отметить, что учет особенности по напряжениям практически не сказывался на точности выполнения закона сохранения энергии. Это обусловлено тем, что коэффициенты возбуждения распространяющихся волн определяются в основном первыми коэффициентами системы (11). Поэтому анализ энергетических особенностей процесса рассеяния нормальной волны на вертикальной трещине в упругом волноводе может быть проведен даже при использовании метода простой редукции по отношению к системе (11).

Частотная зависимость энергии отраженного поля для трещин с $h=0.8H$ (кривая 1) и $h=0.7H$ (кривая 2), нормированная на энергию падающей волны, представлена на рис. 2. Все величины увеличены на графике в сто раз. Рассматривался диапазон частот, в котором существует только одна распространяющаяся волна. Здесь для указанных размеров трещины практически вся энергия проходит в первый полуслой. С ростом частоты отраженная энергия возрастает, то же происходит при увеличении размера трещины. Эти закономерности хорошо согласуются с результатами других авторов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен численно-аналитический метод расчета волнового поля рассеянного на вертикальной трещине в упругом волноводе при его антисимметричных колебаниях. Основой построения алгоритма вычислений был метод суперпозиции, примененный к решению граничных задач с конечными границами при наличии в волновом поле локальных особенностей. С использованием найденных методом суперпозиции значений неизвестных, входящих в ряды, описывающие распределения механических величин, определены коэффициенты возбуждения нормальных волн в отраженном и прошедшем полях.

1. Dineva P. S., Manolis G. D., Rangelov T. V. Sub-surface crack in an inhomogeneous half-plane: Wave scattering phenomena by BEM // Eng. Anal. Bound. Elem.– 2006.– **30**.– С. 350–362.
2. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах.– М.: Наука, 1981.– 278 с.
3. Дьяконов М. В., Устинов Ю. А. Сдвиговые волны в упругом полубесконечном слое с разрезом // Акуст. ж.– 1995.– **41**, № 3.– С. 421–426.
4. Семкив М. Я. Дифракция нормальных SH-хвиль у хвиеводі з розрізом // Акуст. вісн.– 2011.– **14**, № 2.– С. 57–69.
5. Diligent O., Grahn T., Bostrom A., Cawley P., Lowe M. J. S. The low frequency reflection and scattering of the S_0 Lamb mode from a circular through-thickness hole in a plate: Finite Element, analytical and experimental studies // J. Acoust. Soc. Amer.– 2002.– **112**, № 6.– С. 2589–2601.
6. Lowe M. J. S., Cawley P., Kao J-Y., Diligent O. The low frequency reflection characteristics of the fundamental antisymmetric Lamb wave a_0 from a rectangular notch in a plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 2002.– **112**, № 6.– С. 2612–2622.
7. Alleyne D. N., Cawley P. The interaction of Lamb waves with defects // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.– 1992.– **39**, № 3.– С. 381–397.
8. Cho Y., Hongerholt D. D., Rose J. L. Lamb waves scattering analysis for reflector characterization // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.– 1997.– **44**, № 1.– С. 44–52.
9. Cho Y., Rose J. L. An elastodynamic hybrid boundary element study for elastic guided wave interaction with a surface breaking defect // Int. J. Solid Struct.– 2000.– **37**.– С. 4103–4124.
10. Rokhlin S. Diffraction of Lamb waves by finite crack in an elastic layer // J. Acoust. Soc. Amer.– 1980.– **67**, № 4.– С. 1157–1165.
11. Rokhlin S. Resonance phenomena of Lamb waves scattering by a finite crack in a solid layer // J. Acoust. Soc. Amer.– 1981.– **69**, № 4.– С. 922–928.
12. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В. Дифракция упругих волн на наклонной трещине в слое // Прик. мат. мех.– 2007.– **71**, № 4.– С. 702–715.
13. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В. Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // Акуст. ж.– 2006.– **52**, № 3.– С. 314–325.

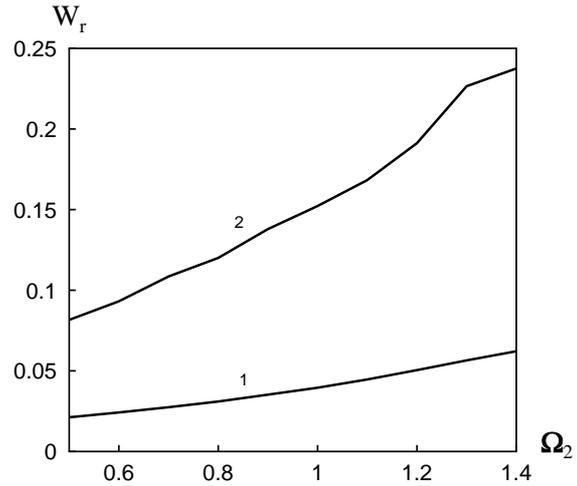


Рис. 2. Частотная зависимость энергии отраженного поля:
1 – $h/H=0.8$; 2 – $h/H=0.7$

14. Кит Г. С., Кунец Я. И., Михаськив В. В. Взаимодействие стационарной волны с тонким дискообразным включением малой жесткости в упругом теле // Изв. РАН. МТТ.– 2004.– № 5.– С. 314–325.
15. Gunawan A., Hirose S. Mode-exciting method for Lamb wave-scattering analysis // J. Acoust. Soc. Amer.– 2004.– **115**, № 3.– С. 996–1005.
16. Shkerdin G., Glorieux C. Lamb mode conversion in a plate with a delamination // J. Acoust. Soc. Amer.– 2004.– **116**, № 4, Pt.1.– С. 2089–2100.
17. Clezio E., Castaings M., Hosten B. The interaction of the S_0 Lamb mode with vertical cracks in an aluminum plate // Ultrasonics.– 2002.– **40**.– С. 187–192.
18. Castaings M., Clezio E., Hosten B. Modal decomposition method for modeling the interaction of Lamb wave with cracks // J. Acoust. Soc. Amer.– 2002.– **112**, № 6.– С. 2567–2582.
19. Flores-Lopez M. A., Gregory R. D. Scattering of Rayleigh-Lamb waves by a surface breaking crack in an elastic plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 2006.– **119**, № 4.– С. 2041–2049.
20. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
21. Гринченко В. Т., Олійник В.Н. Гармонічні коливання в'язко-пружного шару біотканіни при навантаженні круговим гладким штампом // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, № 4.– С. 34–47.
22. Гринченко В. Т., Олійник В.Н. Динамічні властивості в'язко-пружного шару при гармонічному навантаженні круговим штампом // Акуст. вісн.– 2005.– **8**, № 1-2.– С. 42–50.
23. Sinclair G. B. Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis // Appl. Mech. Rev.– 2004.– **57**, № 4.– P. 251–297.
24. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методи фіз.-мех. поля.– 1989.– **41**, № 1.– С. 12–34.
25. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции.– М.: Наука, 1981.– 800 с.