ISSN 1028-7507 Акустичний вісник. 2011. Том 14, N 3. С. 53 – 59

УДК 517.9; 537.8; 538.566

ДИФРАКЦІЯ ПРУЖНОЇ SH-ХВИЛІ НА МІЖФАЗНІЙ ТРІЩИНІ В АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОМУ З'ЄДНАННІ ПЛАСТИНИ З ПІВПРОСТОРОМ

З. Т. НАЗАРЧУК, Д. Б. КУРИЛЯК, М. В. ВОЙТКО, Я. П. КУЛИНИЧ

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів

Одержано 30.05.2011

Розв'язано задачу дифракції пружної SH-хвилі на міжфазній тріщині, яка утворилась на межі абсолютно жорсткого з'єднання пластини з півпростором. Методом Вінера – Хопфа задачу зведено до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Досліджено власні значення оператора динамічної задачі, які визначають комплексні резонансні частоти. Наведені залежності власних частот і коливань від параметрів структури.

Решена задача дифракции упругой SH-волны на межфазной трещине, образовавшейся на границе абсолютно жесткого соединения упругой пластины с полупространством. Методом Винера – Хопфа задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Исследованы собственные значения оператора динамической задачи, определяющие комплексные резонансные частоты. Приведены зависимости собственных частот и колебаний от параметров структуры.

The paper deals with solving of a problem on SH wave diffraction by the interface crack in a junction of an elastic plate and a half-space. By the Wiener – Hopf technique, the problem is reduced to solving of the infinite system of linear algebraic equations. The eigenvalues of an operator of the dynamic problem that determines the complex resonant frequencies are studied. The examples of dependencies of eigen frequencies and vibration modes from the parameters of structure are presented.

ВСТУП

У зв'язку з розвитком сучасних технологій візуалізації динамічних полів зміщень виникає потреба у вивченні особливостей їхнього розподілу за наявності міжфазних дефектів. Теоретичну основу таких досліджень складають розв'язки задач теорії поширення й дифракції хвиль у хвилеводних структурах [1 – 4]. У працях [5, 6] розглянуто дифракцію SH-хвиль на тріщинах у пластині. Вивчення поведінки полів у околі резонансних частот пружних пластини з внутрішніми тріщинами проводилось у працях [7, 8], а резонансні властивості багатошарових періодичних структур із тріщиною за їх опромінення хвилею досліджені в [9].

Однією з проблем діагностування матеріалів є виявлення розшарувань. Її розв'язання базується на вивченні взаємодії пружних хвиль з міжфазними тріщинами. У [10] методом Вінера – Хопфа розв'язано задачу дифракції SH-хвилі на міжфазній тріщині, яка утворилась на межі ідеального з'єднання пластини з півпростором, а у працях [11, 12] – задачу дифракції цієї хвилі на міжфазній тріщині у з'єднанні двох півпросторів.

Тут буде розв'язано задачу дифракції пружної SH-хвилі на тріщині, утвореній на межі абсолютно жорсткого з'єднання пластини з півпростором. Дослідимо формування власних комплексних частот і коливань такої структури з метою визначення оптимальних режимів зондування.

Загальновідомо, що вивчення поведінки матричних композитів при динамічних навантаженнях зводиться до задач присутності множинних включень у полі пружних хвиль. При поширенні в таких структурах нестаціонарних хвиль на початковій часовій стадії можна обійтися розв'язками відповідних задач для поодинокого включення [1 – 5], однак після приходу дифрагованих хвиль від сусідніх включень необхідно враховувати ефекти взаємодії розсіювачів. У двовимірних постановках нестаціонарні процеси деформування пружних тіл з системами включень і тріщин досліджено у працях [6 – 8]. Розглянутий раніше тривимірний випадок стосується ситуації падіння нестаціонарної пружної хвилі на множинні сферичні включення [9]. Розв'язки тривимірних задач щодо інших форм наповнювачів, зокрема, важливих з точки зору концентрації нестаціонарних напружень тонких включень, досі у літературі не наводились.

У цій праці для дослідження нестаціонарних коливань дискових жорстких включень у тривимірній пружній матриці використовувався метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР), виведених у часовій області. Запропоновано покроковий за часом алгоритм розв'язування ГІР, що забезпечує прямий (без переходу до трансформант часових інтегральних перетворень) аналіз інерційних явищ взаємодії включень. Як результат отримано часо-

© З. Т. Назарчук, Д. Б. Куриляк, М. В. Войтко, Я. П. Кулинич, 2011

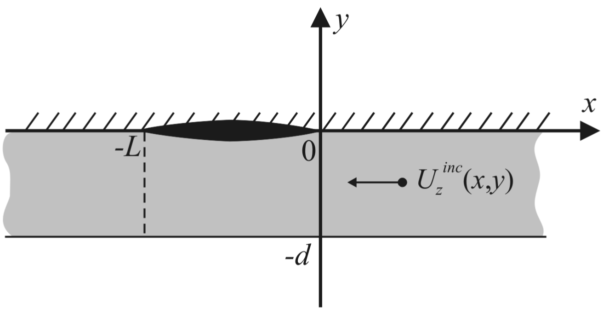


Рис. 1. З'єднання пружної пластини з півпростором

ві залежності поступальних переміщень і поворотів включень, параметрів концентрації напружень у матриці при її нестаціонарному хвильовому збуренні.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо тріщину на плоскій межі абсолютно жорсткого з'єднання пластини P

$$x \in (-\infty, \infty), \qquad y \in (-d, 0), \qquad z \in (-\infty, \infty)$$

з поверхнею S

$$x \in (-\infty, \infty), \qquad y = 0, \qquad z \in (-\infty, \infty)$$

півпростору $y > 0$, де $Oxyz$ – декартова система координат. Нехай тріщина займає область Γ

$$x \in (-L, 0), \qquad y = 0, \qquad z \in (-\infty, \infty)$$

(рис. 1). Така структура опромінюється однією з незгасальних хвилеводних мод, які поширюються у пластині при її абсолютно жорсткому з'єднанні з півпростором, за відсутності дефекту.

Розглядаємо монохроматичне опромінення, яке описується гармонічною часовою залежністю $e^{-i\omega t}$ (цей множник надалі опускаємо). Дифракційні процеси в розглянутій системі визначає одна скалярна функція $u = u(x, y)$, пов'язана з полем зміщень ($\vec{u} \equiv \vec{e}_z u(x, y)$). Тоді відповідну крайову дифракційну задачу сформулюємо так:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{1}$$

$$\tau_{zy} = \mu \frac{\partial(u + u^i)}{\partial y} = 0, \qquad y = -d, \qquad x \in (-\infty, \infty), \tag{2}$$

$$\tau_{zy} = \mu \frac{\partial(u + u^i)}{\partial y} = 0, \qquad y = 0, \qquad x \in (-L, 0), \tag{3}$$

$$u^t = u + u^i = 0, \qquad y = 0, \qquad x \in (-\infty, -L) \cup (0, \infty). \tag{4}$$

Тут $u^i(x, y) = e^{\gamma_j x} \sin(\beta_j y)$ – збуджувальна хвиля, яка поширюється у від'ємному напрямі осі x; $\beta_j = \pi(2j-1)/2d$, $j = 1, 2, 3\ldots$; $\gamma_j = \sqrt{\beta_j^2 - k^2}$, $\mathbf{Re}\,\gamma_j > 0$; $k = k' + ik''$ – хвильове число (k', $k'' > 0$, $k' \gg k''$).

Розв'язок крайової задачі (1) – (4) необхідно знайти у класі функцій, які забезпечують граничне поглинання, коли $|x| \to \infty$, а також виконання на вершинах тріщини таких умов:

$$u \sim \rho^{1/2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \sim \rho^{-1/2}$$
$$\text{при} \qquad \rho = [x^2 + y^2]^{1/2} \to 0, \tag{5}$$
$$i\rho = [(x+L)^2 + y^2]^{1/2} \to 0.$$

Розглянемо трансформанту Фур'є дифрагованого поля $u(x, y)$:

$$U(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx, \tag{6}$$

де $\alpha = \mathbf{Re}\,\alpha + i\mathbf{Im}\,\alpha \equiv \sigma + i\tau$.

Застосовуючи перетворення Фур'є до рівняння (1), подамо трансформанту (6) у вигляді

$$U(\alpha, y) = B(\alpha) e^{\gamma y} + C(\alpha) e^{-\gamma y}. \tag{7}$$

Тут $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ – невідомі функції; $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$, $\mathbf{Re}\,\gamma > 0$; функція $U(\alpha, y)$ – регулярна у смузі $\alpha \in \Pi$: $\{-\tau_0 < \tau < \tau_0\}$, де $\tau_0 \le \min(\mathbf{Im}\,k, \mathbf{Re}\,\gamma_1)$, $\mathbf{Re}\,\gamma_1 < \mathbf{Re}\,\gamma_j$, коли $j > 1$.

Уведемо інтеграли Фур'є

$$U'^{-}(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-L} u'_y(x, 0) e^{i\alpha(x+L)} dx,$$
$$U'^{+}(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} u'_y(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \tag{8}$$

$$\Phi'(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-L}^{0} u'_y(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \tag{9}$$

де $U'^{-}(\alpha, 0)$, $U'^{+}(\alpha, 0)$ – регулярні функції параметра α відповідно у півплощинах $\tau < \tau_0$ і $\tau > -\tau_0$ зі спільною смугою регулярності Π; $\Phi'(\alpha, 0)$ – ціла функція.

Продиференціювавши вираз (7) за змінною і застосувавши інтегральне перетворення Фур'є до граничної умови (2), знаходимо:

$$C(\alpha)=B(\alpha)e^{-2\gamma d}. \qquad (10)$$

При $y\to 0$, врахувавши позначення (6) – (10), отримаємо співвідношення:

$$\begin{gathered} e^{-i\alpha L}U'^{-}(\alpha,0)+\Phi'(\alpha,0)+U'^{+}(\alpha,0)= \\ =\gamma B(\alpha)[1-e^{-2\gamma d}]. \end{gathered} \qquad (11)$$

З граничної умови (3) знаходимо, що

$$\Phi'(\alpha,0)=\frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha-i\gamma_j)}\left[1-e^{-\gamma_j L}e^{-i\alpha L}\right]. \qquad (12)$$

Враховуючи вирази (10), (11), рівняння (7) перетворимо у вигляд

$$\begin{gathered} U(\alpha,y)=[e^{-i\alpha L}U'^{-}(\alpha,0)+\Phi'(\alpha,0)+ \\ +U'^{+}(\alpha,0)]\frac{\mathrm{ch}\,\gamma(y+d)}{\gamma\mathrm{sh}\,(\gamma d)}. \end{gathered} \qquad (13)$$

Використовуючи подання (13) і застосовуючи Фур'є перетворення граничної умови (4), приходимо до рівняння Вінера – Хопфа, яке запишемо у формі

$$\begin{gathered} [\Psi^{(+)}(\alpha,0)+e^{-i\alpha L}\Psi^{(-)}|(\alpha,0)]M(\alpha)+ \\ +J_1(\alpha)=0, \qquad \alpha\in\Pi. \end{gathered} \qquad (14)$$

Тут $\Psi^{(-)}(\alpha,0)$, $\Psi^{(+)}(\alpha,0)$, $J_1(\alpha)$ – шукані функції: $\Psi^{(-)}(\alpha,0)$ – регулярна у комплексній півплощині $\tau<\tau_0$; $\Psi^{(+)}(\alpha,0)$ – регулярна в області $\tau>-\tau_0$, за винятком точки $\alpha=i\gamma_j$ ($\mathbf{Re}\,\gamma_j>\tau_0$), де вона має простий полюс; $J_1(\alpha)$ – ціла функція; $M(\alpha)$ – відома функція, регулярна у смузі $\alpha\in\Pi$, а за її межами допускає прості нулі й полюси:

$$\Psi^{(-)}(\alpha,0)=U'^{-}(\alpha,0)-\frac{i\beta_j e^{-\gamma_j L}}{\sqrt{2\pi}(\alpha-i\gamma_j)}, \qquad (15)$$

$$\Psi^{(+)}(\alpha,0)=U'^{+}(\alpha,0)+\frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha-i\gamma_j)}, \qquad (16)$$

$$J_1(\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-L}^{0}U(x,0)e^{i\alpha x}dx, \qquad (17)$$

$$M(\alpha)=\frac{\mathrm{ch}\,(\gamma d)}{\gamma\mathrm{sh}\,(\gamma d)}. \qquad (18)$$

Функція (18) допускає факторизацію методом нескінченних добутків і може бути подана у вигляді

$$.M(\alpha)=M_+(\alpha)M_-(\alpha). \qquad (19)$$

Тут

$$M_-(\alpha)=M_+(-\alpha),$$

$$\begin{gathered} M_+(\alpha)=\frac{\sqrt{\cos(kd)}}{i\sqrt{k\sin(kd)}\left(1+\dfrac{\alpha}{i\gamma_{0s}}\right)}\times \\ \times\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{\alpha}{i\gamma_{nc}}\right]e^{i\alpha d/(n\pi)}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{\alpha}{i\gamma_{ns}}\right]e^{i\alpha d/(n\pi)}}, \end{gathered} \qquad (20)$$

$$\gamma_{nc}=\sqrt{\left(\frac{\pi(2n-1)}{2d}\right)-k^2};$$

$$\gamma_{ns}=\sqrt{\left(\frac{\pi n}{d}\right)^2-k^2};$$

$$\gamma_{0s}=-ik.$$

У формулах (19), (20) функції $M_\pm(\alpha)$ – регулярні й не мають нулів у півплощинах $\tau>-\tau_0$ і $\tau<\tau_0$ відповідно. При $|\alpha|\to\infty$ в областях регулярності справедлива асимптотична оцінка $M_\pm(\alpha)=O(\alpha^{-1/2})$. За межами цих областей функції $M_\pm(\alpha)$ мають прості нулі й полюси у точках $\alpha=\mp i\gamma_{nc}$ і $\alpha=\mp i\gamma_{ns}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ відповідно, а також простий полюс при $\alpha=\mp k$.

Асимптотична поведінка функцій (15), (16) в областях регулярності, коли $|\alpha|\to\infty$, така: $\Psi^{(+)}(\alpha)=O(\alpha^{-1/2})$, $\Psi^{(-)}(\alpha)=O(\alpha^{-1/2})$. Ціла функція (17) в області $\tau<\tau_0$ при $|\alpha|\to\infty$ спадає до нуля: $J_1(\alpha)=O(\alpha^{-3/2})$, а в області $\tau>-\tau_0$ при $|\alpha|\to\infty$ спадає до нуля добуток $e^{i\alpha L}J_1(\alpha)=O(\alpha^{-3/2})$.

Далі функціональне рівняння (14) переписуємо у вигляді:

$$\begin{gathered} M_+(\alpha)\Psi^{(+)}(\alpha,0)+e^{-i\alpha L}M_+(\alpha)\Psi^{(-)}(\alpha,0)+ \\ +\frac{J_1(\alpha)}{M_-(\alpha)}=0, \qquad \alpha\in\Pi, \end{gathered} \qquad (21)$$

$$\begin{gathered} M_-(\alpha)e^{i\alpha L}\Psi^{(+)}(\alpha,0)+M_-(\alpha)\Psi^{(-)}(\alpha,0)+ \\ +\frac{e^{i\alpha L}J_1(\alpha)}{M_+(\alpha)}=0, \qquad \alpha\in\Pi. \end{gathered} \qquad (22)$$

Факторизуючи співвідношення (21) і (22), приходимо до системи інтегральних рівнянь другого роду, які після заміни інтегралів рядами лишків зводимо до таких виразів:

$$
\begin{gathered}
M_+(\alpha)\Psi^{(+)}(\alpha)- \\
-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n d^{-1}e^{-\gamma_{ns}L}\Psi^{(-)}(-i\gamma_{ns})}{i\gamma_{ns}M_+(i\gamma_{ns})(i\gamma_{ns}+\alpha)}= \\
=\frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}}\frac{M_+(i\gamma_j)}{\alpha-i\gamma_j}\,,
\end{gathered}
\tag{23}
$$

$$
\begin{gathered}
M_-(\alpha)\Psi^{(-)}(\alpha)+ \\
+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\frac{e^{-\gamma_{ns}L}\Psi^{(+)}(i\gamma_{ns})}{i\gamma_{ns}dM_+(i\gamma_{ns})(\alpha-i\gamma_{ns})}=0.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Тут $\varepsilon_n=1/2$, коли $n=0$ і $\varepsilon_n=1$, коли $n>0$.

Поклавши у першому рівнянні $\alpha=i\gamma_{ls}$, а у другому $\alpha=-i\gamma_{ls}$, $l=0,1,2,\ldots$, з функціональних співвідношень (23) і (24) отримуємо нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР), які у кінцевому результаті запишемо так:

$$
[I+A]X=F. \tag{25}
$$

Тут $X=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_n=M_+(i\gamma_{ns})\Psi^{(+)}(i\gamma_{ns})$, $x_n=O(n^{-1})$, коли $n\to\infty$; I – одинична матриця, $A=\{a_{ln}\}_{n,l=0}^{\infty}$, $F=\{f_l\}_{l=0}^{\infty}$;

$$
\begin{gathered}
a_{ln}=-\frac{\varepsilon_n d^{-2}e^{-\gamma_{ns}L}}{\gamma_{ns}[M_+(i\gamma_{ns})]^2}\times \\
\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m e^{-\gamma_{ms}L}}{[M_+(i\gamma_{ms})]^2\gamma_{ms}(\gamma_{ls}+\gamma_{ms})(\gamma_{ms}+\gamma_{ns})}\,,
\end{gathered}
\tag{26}
$$

$$
f_l=\frac{\beta_j}{\sqrt{2\pi}}\frac{M_+(i\gamma_j)}{\gamma_{ls}-\gamma_j}\,. \tag{27}
$$

Для матричних елементів (26) при $n,\,p\to\infty$ виконується оцінка

$$
|a_{ln}|\le C\frac{e^{-\pi nL/d}}{ln}\,, \tag{28}
$$

де C – відома стала.

Отже,

$$
\|A\|_{l^2}=\sum_{l,n}|a_{ln}|^2<\infty
$$

і НСЛАР (25) має єдиний розв'язок, за виключенням дискретних значень хвильового параметра, для яких однорідне рівняння (25) допускає ненульові розв'язки.

Якщо тепер формулу (13) переписати, використовуючи співвідношення (15), (16), а пізніше отримати обернене перетворення Фур'є від виразу (6), то поле зміщень матиме вигляд:

$$
\begin{gathered}
u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\Psi^{(-)}(\alpha,0)e^{-i\alpha L}+ \\
+\Psi^{(+)}(\alpha,0)]\frac{\operatorname{ch}\gamma(y+d)}{\gamma\operatorname{sh}(\gamma d)}e^{-i\alpha x}d\alpha.
\end{gathered}
\tag{29}
$$

Тут функції $\Psi^{(-)}(\alpha,0)$, $\Psi^{(+)}(\alpha,0)$ визначаються формулами (23) і (24), де значення $\Psi^{(-)}(-i\gamma_{ns})$ і $\Psi^{(+)}(i\gamma_{ns})$ відомі з розв'язку рівняння (25).

Інтеграл (29) можна замінити рядами лишків підінтегральної функції. Наприклад, для визначення поля в області $-L<x<0$, $-d<y<0$ при обчисленні інтеграла від першого доданка контур інтегрування замикаємо у нижню півплощину, а від другого – у верхню. Остаточний вираз для поля зміщень у цій області подамо так:

$$
\begin{gathered}
u^{(t)}(x,y)=\frac{\sqrt{2\pi}}{d}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_q}{\gamma_{qs}}\cos\frac{\pi qy}{d}\times \\
\times[\Psi^{(+)}(i\gamma_{qs},0)e^{\gamma_{qs}x}- \\
-\Psi^{(-)}(-i\gamma_{qs},0)e^{-\gamma_{qs}(x+L)}].
\end{gathered}
\tag{30}
$$

Характеристичне рівняння для визначення спектра вихідної дифракційної задачі запишемо у вигляді

$$
\det[I+A(\Omega)]=0. \tag{31}
$$

Тут $\Omega=kd=\omega d/c$, де c – швидкість поширення SH-хвилі у пластині, ω – комплексна частота.

Рівняння (31) розглядаємо на рімановій поверхні як функцію спектрального параметра Ω з точками галуження $\Omega=\pm\pi n$ і $\Omega=\pm\pi(2n-1)/2$, $n=1,2\ldots$ на дійсній осі. Необхідні розрізи комплексної площини Ω вибираємо з умови, яка забезпечує формування на першому листі рімановової поверхні згасаючих із часом власних коливань [13, 14].

Комплексні корені рівняння (31) знаходимо в області $0<\mathbf{Re}\,\omega<\min\omega_k$, де $\min\omega_k=\pi c/(2d)$ – мінімальна критична частота напівнескінченних хвилеводів

$$
\begin{gathered}
-\infty<x<-L, \qquad -d<y<0, \\
0<x<\infty, \qquad -d<y<0.
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Кількість комплексних коренів рівняння (31) в області $0<\mathbf{Re}\,\omega<\min\omega_k$ залежить від величини параметра $p=L/d$. При малих значеннях p ($p<2.8$) існує тільки один корінь.

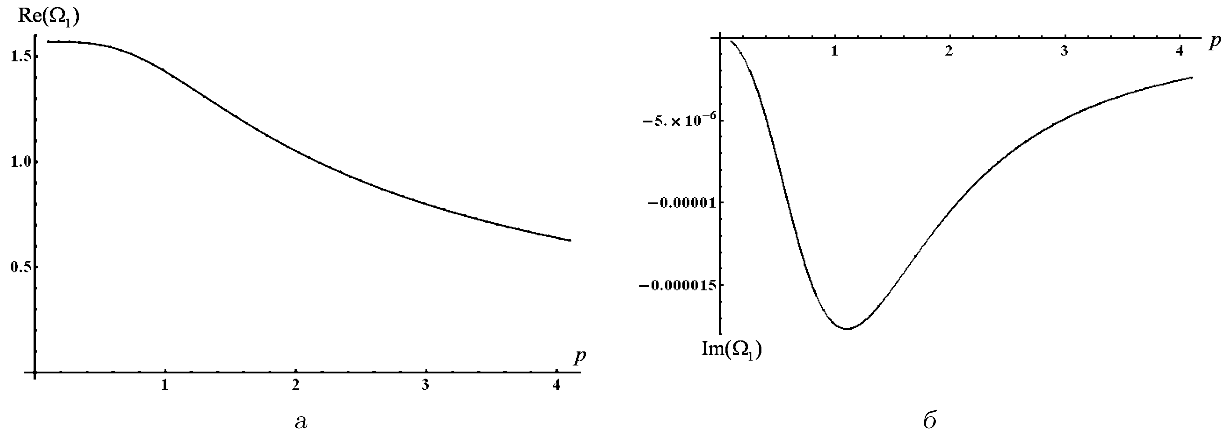


Рис. 2. Залежність комплексного кореня рівняння (31) від відношення довжини тріщини до товщини пластини ($p\!=\!L/d$):
а – дійсна частина; б – уявна частина

2. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

На рис. 2 наведені залежності дійсної ($\mathbf{Re}\,\Omega_1>0$) і уявної ($\mathbf{Im}\,\Omega_1<0$) частин комплексного кореня рівняння (31) від p. Усі корені розміщені на першому листі ріманової поверхні. На відповідних комплексних частотах спостерігаємо резонанс основної моди ($u(x,y)\sim e^{\pm\gamma_{0s}x}$) у хвилеводній області $\{x,y\,:\,-L<x<0;\,-d<y<0\}$ (критична частота для цієї моди – нульова).

У зв'язку з малим значення модуля уявної частини комплексного спектрального параметра $|\mathbf{Im}\,\Omega_1|/|\mathbf{Re}\,\Omega_1|\sim 10^{-5}$ (див. рис. 2, б) добротність таких коливань буде високою, про що свідчить утворення резонансного піку в точці, яка відповідає дійсній частині резонансної частоти на графіку залежності $|\Psi^{(+)}(i\gamma_{0s})|$ від безрозмірної довжини тріщини (рис. 3). Аналогічну картину спостерігаємо для $|\Psi^{(-)}(-i\gamma_{0s})|$.

Наведені на рис. 2, а дані можна використати для вибору частоти зондування при діагностуванні тріщин у з'єднаннях пластин з півпростором. Оскільки $0<\mathbf{Re}\,\omega<\min\omega_k$ і хвиля такої частоти не може поширюватися без згасання у хвилеводних областях (32), то зондування дефекту можна провести, скануючи вільну від напружень зовнішню поверхню пластини локальним випромінювачем.

Поведінка кривих на рис. 3 показує, що добротний резонансний ефект в області $\{x,y:-L<x<0;\ -d<y<0\}$ можна спостерігати при $p\geq 0.1$. Ця умова накладає обмеження на співвідношення між довжиною тріщини і товщиною пластини, за яких можна отримати резонансний відгук при діагностуванні.

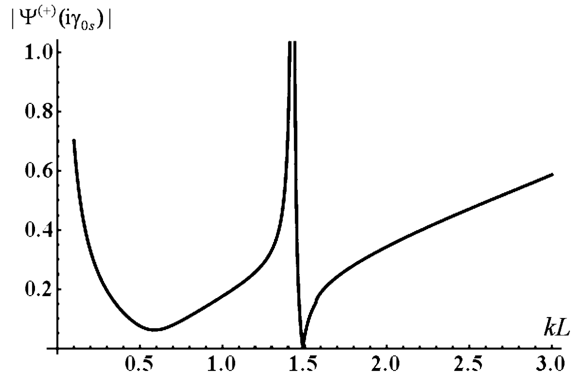


Рис. 3. Залежність модуля комплексної амплітуди основної моди від безрозмірної довжини тріщини при $p\!=\!1$

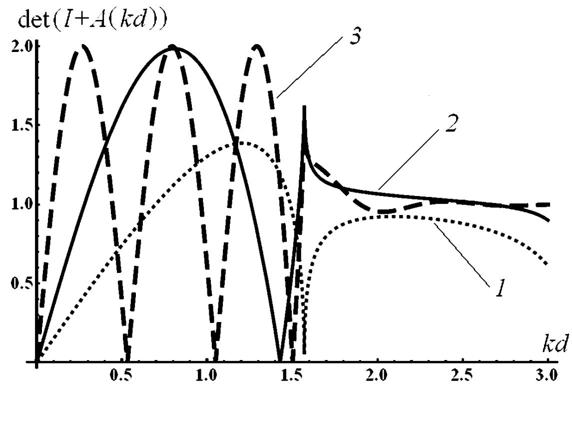
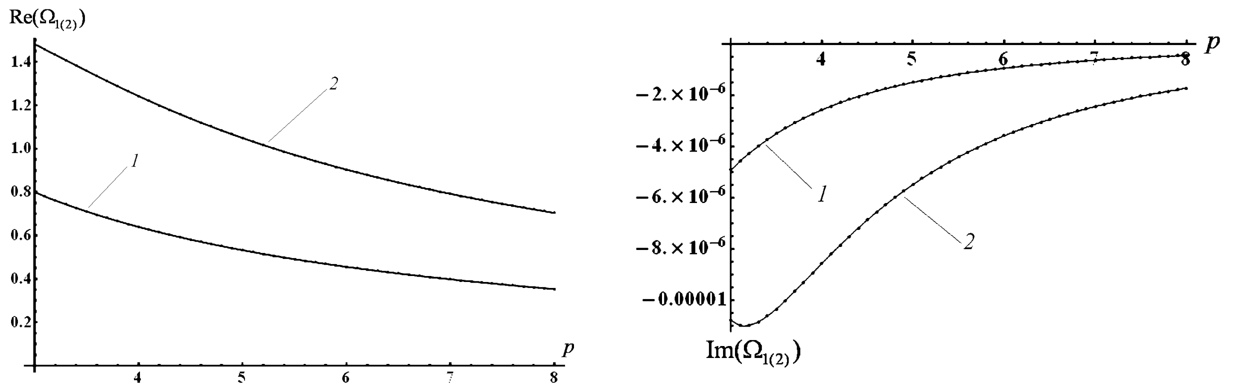


Рис. 4. Залежність модуля визначника (31) від дійсного параметра kd:
1 – $p\!=\!0.1$; *2* – $p\!=\!1$; *3* – $p\!=\!5$



а *б*

Рис. 5. Залежність дійсної першого Ω_1 (крива *1*) і другого Ω_2 (крива *2*) комплексних коренів рівняння (31) від p:
а – дійсні частини; *б* – уявні частини

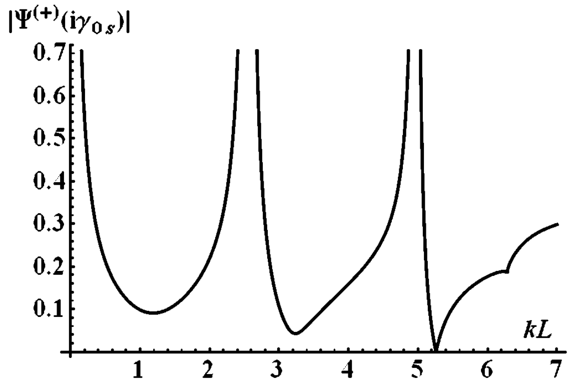


Рис. 6. Залежність модуля комплексної амплітуди основної моди від безрозмірної довжини тріщини при $p=4$

На рис. 4 показано залежність модуля визначника (31) як функції дійсного параметра kd при різних p. У зв'язку з малістю відношення $|\mathbf{Im}\,\Omega_1|/|\mathbf{Re}\,\Omega_1|$, значення локального мінімуму функції $f(kd,p)=|\det[I+A(kd)]|$ близькі до дійсних частин комплексних коренів рівняння (31) при $p=0.1$ і 1 (криві *1*, *2*). Зі зростанням параметра p функція $f(kd,p)$ допускає більше, ніж один мінімум (крива *3*), що дозволяє спрогнозувати існування декількох коренів рівняння (31) при фіксованому значенні p. Приклад цього показано на рис. 5, де наведені дійсні й уявні частин таких коренів. Криві *1* тут продовжують залежності $\mathbf{Re}\,\Omega_1(p)$ і $\mathbf{Im}\,\Omega_1(p)$, подані на рис. 2, а криві *2* відповідають другому кореню $\Omega_2(p)$.

На рис. 6 проілюстровано залежність $|\Psi^{(+)}(i\gamma_{0s})|$ від безрозмірної довжини тріщини при значенні параметра $p=4$. Спостерігаємо два піки у точках, які відповідають дійсним значенням комплексних резонансних частот Ω_1, Ω_2. Зауважимо, що існують також корені Ω рівняння (31), для яких $\mathbf{Re}\,\Omega>0$, $\mathbf{Im}\,\Omega>0$; $\mathbf{Re}\,\Omega<0$, $\mathbf{Im}\,\Omega>0$; $\mathbf{Re}\,\Omega<0$, $\mathbf{Im}\,\Omega<0$ (тут їх не розглядаємо).

Отримані значення резонансних частот можна використати для зондування при селективному діагностуванні міжфазних дефектів (налаштуванні на виявлення тріщин заданої довжини) або при визначенні величини підростання тріщини за зсувом резонансної частоти. Важливо, що для коротких тріщин резонансна частота для діагностування визначається однозначно, а зі зростанням їхньої довжини ($p>2.8$) кількість резонансних частот може бути більшою. На них, як видно з рис. 5, 6, також спостерігаємо високодобротне збудження основної моди.

У табл. 1 і 2 подано значення довжини тріщин і відповідні їм дійсні частини комплексної резонансної частоти, на якій спостерігається резонанс основної моди у з'єднанні залізної ($c=3230$ м/с) і мідної ($c=2250$ м/с) пластин з півпростором. Порівнюючи наведені тут дані, бачимо, що чутливість резонансної частоти до зміни довжини тріщини є вищою для пластин з більшою швидкістю поширення SH-хвиль. Таким чином, саме в таких пластинах можна точніше виявляти зміни довжини міжфазної тріщини за зсувом резонансної частоти.

Табл. 1. Дійсні частини резонансних частот досліджуваної структури (залізо, $d=10$ мм)

L, мм	1	1.5	2	2.5	3	4
$\mathbf{Re}\,\omega$, рад/с	507361	507330	507239	507045	506693	505270
L, мм	5	10	15	20	30	50
$\mathbf{Re}\,\omega$, рад/с	502480	461480	397404	339710	258099	172048

Табл. 2. Дійсні частини резонансних частот досліджуваної структури (мідь, $d=10$ мм)

L, мм	1	1.5	2	2.5	3	4
$\mathbf{Re}\,\omega$, рад/с	353425	353403	353340	353204	352959	351968
L, мм	5	10	15	20	30	50
$\mathbf{Re}\,\omega$, рад/с	350025	321465	276830	236640	179790	119848

ВИСНОВКИ

Показано можливість збудження високодобротних резонансних поперечних коливань на основній моді в абсолютно жорсткому з'єднанні пластини з півпростором за наявності міжфазної тріщини. Цей ефект можна використати для вибору оптимальної частоти зондування, орієнтованої на виявлення дефектів фіксованих розмірів, а також для визначення величини підростання тріщин при навантаженні за зсувом резонансної частоти.

Для розглянутої динамічної системи дано оцінку нижньої межі відношення між довжиною тріщини й товщиною пластини, при яких можливе діагностування дефекту на основі збудження резонансного відгуку.

Виявлено властивість розгалуження коренів характеристичного рівняння для визначення спектра дифракційної задачі при зростанні відношення довжини тріщини до товщини пластини. Показано, що відповідні комплексні частоти знаходяться в області, обмеженій зверху мінімальним значенням критичної частоти $\omega_k=\pi c/(2d)$, а відповідні резонансні коливання мають високу добротність.

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.

2. *Гринченко В. Т., Городецкая Н. С.* Краевой резонанс при изгибных колебаниях полуполосы // Докл. АН УССР, Сер. А.– 1985.– № 4.– С. 20–23.

3. *Городецкая Н. С.* Дифракция волн Рэлея – Лэмба на границе раздела двух состыкованных упругих полуполос разной ширины // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, № 3.– С. 32–43.

4. *Wang Y. S., Gross D.* Transfer matrix method of wave propagation in a layered medium with multiple interface cracks: Anti-plane case // J. Appl. Mech.– 2001.– **68**.– P. 499–503.

5. *Zaman F. D.* Diffraction of SH-waves across a mixed boundary in a plate // Mech. Res. Comm.– 2001.– **28**, № 2.– P. 171–178.

6. *Asghar S., Zaman F. D.* Diffraction of SH-waves by a finite crack in a layer overlying a half space // Boll. Di Geofisica Teorica Ed Applicata.– 1987.– **19**, № 113.– P. 43–50.

7. *Glushkov E., Glushkova N., Golub M., Boström A.* Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack // J. Acoust. Soc. Amer.– 2006.– **119**, № 6.– P. 3589–3598.

8. *Rokhlin S. I.* Resonance phenomena of Lamb waves scattering by a finite crack in a solid layer // J. Acoust. Soc. Amer.– 1981.– **69**, № 4.– P. 922–928.

9. *Golub M. V., Zhang C., Wang Y.* SH-wave propagation and resonance phenomena in a periodically layered composite structure with a crack // J. Sound Vib.– 2011.– **330**.– P. 3141–3154.

10. *Kuryliak D. B., Voytko M. V.* Wiener-Hopf analysis of the elastic wave diffraction by the finite crack located at the plane interface between the elastic isotropic slab and half-space medium // Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED).– Lviv – Tbilisi, Oct. 11 – 14, 2004.– P. 22–25.

11. *Pal S. C., Chosh M. L.* High frequency scattering of antiplane shear waves by interface crack // Ind. J. Pure Appl. Math.– 1990.– **21**, № 12.– P. 1107–1124.

12. *Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т., Войтко М. В.* Аналіз поля плоскої SH-хвилі, розсіяної скінченною тріщиною на межі поділу матеріалів // Фіз.-хім. мех. матер.– 2006.– **42**, № 6.– С. 5–16.

13. *Шестопалов В. П.* Спектральная теория и возбуждение открытых структур.– К.: Наук. думка, 1987.– 288 с.

14. *Сиренко Ю. К., Сухаревский И. В., Сухаревский О. И., Яшина Н. П.* Фундаментальные и прикладные задачи теории рассеяния электромагнитных волн.– Харьков: Крок, 2000.– 344 с.