

УДК 534.23, 519.6

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ГЕНЕРАЦИИ ЗВУКА ТОНКИМ КРЫЛОМ. ЧАСТЬ I. ОБЩАЯ СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

П. В. ЛУКЬЯНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 21.06.2010 ◊ Пересмотрено 14.09.2011

Предложен численно-аналитический метод решения задач акустики. Выполнен его сравнительный анализ с родственными методами и рассмотрена детализированная схема использования на примерах решения плоских задач для уравнений Гельмгольца, Кармана – Гудерлея. Обсуждены особенности применения данного метода в различных ситуациях.

Запропоновано чисельно-аналітичний метод для розв'язання задач акустики. Виконано його порівняльний аналіз зі спорідненими методами й розглянуто деталізовану схему використання на прикладах розв'язання плоских задач для рівнянь Гельмгольца, Кармана – Гудерлея. Обговорено особливості застосування даного методу в різних ситуаціях.

A numerical-analytical method for solving of acoustical problems is offered. A comparative analysis of the method with relative ones is carried. A detailed scheme of its application for two-dimensional problems for Helmholtz and von Kármán – Gooderley equations is presented. The peculiarities of using of the given method for different situations are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач математической физики зачастую приходится иметь дело с ограниченными областями с криволинейной границей. Кроме того, в ряде случаев оказывается, что рассматриваемый физический процесс описывается нелинейным уравнением в частных производных. В обеих ситуациях, за редкими исключениями, не удастся получить искомое решение в аналитическом виде и должны использоваться различные численные методы и схемы.

Ввиду огромного многообразия физических задач численные методы их решения также существенно отличаются друг от друга. Очевидно, что универсальной численной схемы не существует и каждая из них пригодна лишь для отдельных классов задач для конкретных уравнений в частных производных. Как только возникает нестандартная ситуация (новое уравнение или иные граничные условия), существующие методы часто приходится дорабатывать или создавать новые численные схемы.

В данной работе предлагается численно-аналитический метод, разработанный для решения задачи генерации звука тонким крылом. По структуре расчетной схемы наш подход –

многошаговый типа “up-wind” (вверх по течению), поскольку в расчетной схеме используются значения в предыдущих (пройденных течением) точках для продвижения численной процедуры по сетке. В частности, для плоской стационарной задачи рассмотрена шеститочечная схема применения предлагаемого численно-аналитического подхода.

Если же при решении задачи искомое решение оказывается зависимым лишь от одной координаты, то можно использовать трехточечную схему. Для некоторых упрощенных задач применение численно-аналитического подхода может привести к аналитическому представлению решения по рекуррентным соотношениям. Заметим, однако, что подобного рода задачи не представляют особого интереса, решаются лишь для тестирования данного подхода и здесь приведены не будут.

Данное исследование целесообразно разделить на две части. Цель первой части, вошедшей в эту статью, состоит в изложении теоретической основы метода и его математической структуры на простых задачах. Что касается второй части, в ней будет представлено дальнейшее развитие численно-аналитического метода и применение его для решения задачи генерации звука тонкой лопастью при обтекании ее нестационарным течением в различных режимах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Возьмем некоторую ограниченную область $D \in R^m$. Пусть в ней задана функция $f = f(x, y)$, описывающая некоторый физический процесс, который удовлетворяет оператору

$$\mathcal{N}f = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (1)$$

($x_1 \equiv x, x_2 \equiv y$) и граничным условиям первого или второго рода [2]:

$$f|_{\Gamma} = f_0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f_1. \quad (2)$$

В общем случае, когда уравнение (1) нелинейно, коэффициенты a_{ij}, a_i могут содержать в себе как непосредственно функцию f , так и ее производные в точке (x_0, y_0) , а коэффициент a_0 может зависеть от функции f . Пример такого нелинейного оператора рассмотрим ниже при решении плоской стационарной задачи обтекания тонкой лопасти.

Изложим идею предлагаемого метода. Произвольную гладкую функцию от двух переменных $f \in C^\infty(A)$ можно представить в точке $P = (x, y) \in A$ в виде многомерного ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \\ & + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2!} f_{xx}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2!} f_{yy}(y - y_0)^2 + \\ & + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + R_0(P), \end{aligned} \quad (3)$$

где $R_0(P) = o[(x - x_0)(y - y_0)]$ – остаточный член ряда.

Это представление, согласно существующей классификации, при малом шаге сетки приближает функцию $f(x, y)$ в точке (x, y) с точностью до величин второго порядка малости. В выражении (3) присутствуют шесть неизвестных (функций) $f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ в точке (x_0, y_0) , для определения которых необходимо задать шесть независимых условий (уравнений). Идея метода состоит в том, что пять из шести необходимых уравнений – это представление функции $f(x, y)$ на границе или вблизи нее в виде ряда (3) в пяти точках $(x_i, y_i), i = 1, 5$. Шестое условие заключается в том, что искомая функция принудительно удовлетворяется оператору (1) в текущей расчетной точке (x_0, y_0) . Мы фактически заставляем ее подчиняться уравнению (1), описывающему изучаемый физический процесс.

Таким образом получаем замкнутую систему алгебраических уравнений. В ней в расчетной точке искомая функция и ее производные неявно выражены через значения функции в соседних точках. Кроме того, требование удовлетворения уравнения (1) позволяет выполнить условие согласования. В других же схемах проверка его выполнения происходит лишь после выражения, явного или неявного, производных через значения функции в соседних узлах.

Линейность или нелинейность системы получаемых алгебраических уравнений зависит от соответствующих свойств оператора (1). Основное ограничение данного метода заключается в разрешимости этой системы уравнений.

Однако не всегда одним лишь уравнением, включенным в расчетную систему, можно обойтись. В сложных нестационарных задачах граничное условие также необходимо включать в расчетную систему вместе с решаемым уравнением, поскольку оно будет корректировочным для приближенно заданных в начальный момент счета данных. В плоской стационарной задаче, рассмотренной в данной работе, в этом нет необходимости, так как граничное условие выполняется автоматически.

Используя известную схему метода Гаусса с выбором главного элемента, можно свести решение нелинейной системы уравнений к решению одного нелинейного уравнения, в котором входящие неизвестные системы выражены через остальные компоненты искомого решения.

Применение данного подхода выполнено для случая плоской стационарной задачи для уравнения Кармана – Гудерлея. Несмотря на то, что решенная в данной части задача в стационарной постановке, выявленное зарождение слабой ударной волны говорит о наличии источника звукообразования.

2. СРАВНЕНИЕ С БЛИЗКИМИ ПО СТРУКТУРЕ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Рассмотренная только что численная схема решения задач для дифференциальных уравнений в частных производных по своей природе очень близка к конечно-разностной неявной схеме. Напомним, что применение конечно-разностного метода также предполагает, что искомая функция может быть разложена в многомерный степенной ряд по степеням шага дискретной сетки. Для большей конкретности приведем хорошо известный пример реализации конечно-разностного подхода на примере первой краевой задачи для урав-

нения теплопроводности [3].

Пусть имеем первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} Lu &= \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq t_0; \\ u(0, t) &= \mu_1, \quad u(1, t) = \mu_2(t), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где $u(x, t)$ – температура.

Для равномерной сетки по (x, t) получается разностная схема на основе четырехточечного шаблона:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} &= \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j, \\ 1 \leq i \leq N_i - 1, \quad 0 \leq j \leq N_2 - 1; \\ u_0^j &= \mu_1(t_j), \quad u_{N_1}^j = \mu_2(t_j), \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \end{aligned} \quad (5)$$

где τ, h – шаги по времени и координате соответственно.

Функцию φ_i^j можно задавать различным образом, т. е. в разных узлах сетки [3]. Данная разностная схема – явная, поскольку значения на последующем шаге по времени определяются по значениям на предыдущем шаге по явным формулам:

$$u^{j+1} = u^j + \tau(u_{\bar{x}x} + \varphi^j), \quad (6)$$

где черта над x в записи функции $u_{\bar{x}x}$ обозначает левую производную.

Неявная схема решения задачи (4) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_t &= \hat{u}_{\bar{x}x} + \varphi, \\ 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq t_0; \\ u(0, t) &= \mu_1, \quad u(1, t) = \mu_2(t), \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения значений $\hat{u} = u_{j+1}$ на $(j+1)$ -ом слое получается система алгебраических уравнений

$$\frac{u^{j+1}}{\tau} - u_{\bar{x}x}^{j+1} = F^j, \quad (8)$$

$$F^j = \frac{u^j}{\tau} + \varphi^j$$

с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки.

Таким образом, в явной схеме все производные, входящие в решаемое дифференциальное уравнение, заранее выражаются через значения искомой функции в узлах конечно-разностного шаблона. В неявной схеме производную $\hat{u} = u_{j+1}$ нужно еще определить на основе системы уравнений (8).

В то же время, в предлагаемом численно-аналитическом методе представление производных через значение в соседних узлах сетки происходит полностью неявно в процессе решения совокупной системы уравнений на основе процедуры, описанной выше. Точность можно регулировать количеством уравнений системы, урезая в нужном месте многомерный ряд Тейлора. В конечно-разностных схемах, по сути дела, также меняют расчетные шаблоны по сетке до тех пор, пока не получат наиболее подходящий.

На основании известных трудов Роуча [4] и коллектива Андерсон, Танненхилл и Плетчер [5] можно прийти к выводу о том, что предлагаемый подход очень близок к методике выражения производных в виде конечных разностей с помощью рядов Тейлора. Однако в стандартном конечно-разностном методе из разложения в ряд Тейлора в соседних точках сразу же получают явный вид производных, а потом лишь проверяют, насколько точно будет удовлетворять полученные представления решаемому дифференциальному уравнению. Таким образом, при классическом подходе во время представления в виде конечных разностей производные еще не подчиняются условию согласования с решаемым уравнением, а сходимость полученной схемы исследуется лишь после их подстановки в уравнение. Вот почему порой хорошо работающая схема для одного уравнения может оказаться неустойчивой для другого, что достаточно часто и случается (вспомним, например, схему Рундсона [5]).

Сегодня известно, что неявные схемы, применяемые в численных методах, более устойчивы, чем явные. Это объясняется тем, что неявная схема как бы дополнительно выполняет процедуру общей настройки на конкретную задачу с конкретным дифференциальным оператором при решении образующейся системы алгебраических уравнений. В явных схемах этого не происходит, поскольку производные представляются стандар-

тним образом еще до подстановки их в решаемое дифференциальное уравнение. Таким образом, они не могут заранее учесть специфику того или иного дифференциального оператора. В этом явные схемы проигрывают неявным. Однако если удалось найти конечно-разностное представление, которое с достаточной точностью аппроксимирует искомое решение задачи, явная схема выигрывает по быстродействию – количество необходимых расчетных операций здесь существенно меньше, чем в неявной схеме.

Конечно-разностный подход довольно часто используется в вычислительной механике жидкости, газа, аэроакустике. Следует отметить, что он является мощным средством для решения указанных задач, если искомая функция ведет себя “хорошо”: решение уравнения при различных комбинациях параметров монотонно и не содержит локальных неустойчивостей. Однако существуют задачи, в которых при определенных параметрах течения данное условие не всегда выполняется, так что стандартные конечно-разностные схемы не работают. Тогда приходится использовать различные ухищрения. Например, в схеме Лакса – Вендрофа [6] в рамках модели идеальной среды применяют искусственную вязкость, которая делает расчетную схему устойчивой: введение искусственной вязкости позволяет “сгладить” течение в проблемных точках, не усложняя тем самым физическую модель в целом. При этом наблюдаемые крупномасштабные физические явления в течении продолжают присутствовать, а введенная искусственная вязкость математически позволяет решить задачу более корректно.

Другим примером может служить схема Годунова [7], основанная на свойствах характеристик дифференциального уравнения. Однако она достаточно сложна даже в одномерном случае, не говоря уже о двух и более переменных. Поэтому в начале 1970-ых гг. Годунов отказался от дальнейшего развития этой схемы, отдав предпочтение более простым подходам.

Ни схема Лакса – Вендрофа, ни схема Годунова не прижилась в аэроакустике. Причина этого заключается в том, что в каждой конкретной задаче обычно приходится либо придумывать новую расчетную схему, либо усовершенствовать уже имеющиеся. При этом зачастую первое требует меньших усилий, чем второе. Поэтому рядом исследователей (например, [8, 9]) предпринимались попытки найти свою конечно-разностную схему под каждую отдельно взятую нестандартную задачу, т. е. задачу, где функция может вести себя не монотонно.

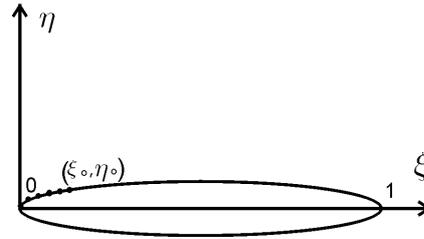


Рис. 1. Симметричный крыловой профиль

3. ОБТЕКАНИЕ ЛОПАСТИ ВЕРТОЛЕТА ПЛОСКИМ ТРАНСЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

3.1. Постановка задачи

Некоторые особенности данного метода иллюстрирует известная задача, представляющая интерес как тестовая для проверки работы предлагаемого метода в сравнении с решениями других авторов. Рассмотрим плоское сечение тонкого симметричного крыла (рис. 1). Считаем, что набегающий на крыло поток газа – однородный ($U=U_\infty$) и стационарный, а поле течения – плоское потенциальное. Тонкая вихревая пелена, сходящая с крыла, в рассмотрение не принимается.

Уравнение, описывающее распространение малых возмущений в плоском стационарном трансзвуковом потоке, есть уравнение Кармана – Гудерлея [10]:

$$\left[1 - \frac{1}{M_1^2} + (1 + \gamma)\epsilon f_\xi \right] f_{\xi\xi} + \frac{\lambda^2}{M_1^2} f_{\eta\eta} = 0, \quad (9)$$

где $f(\xi, \eta) = \epsilon^{-1} \phi'(x, y)$ – безразмерный потенциал малых возмущений плоского течения; $\phi'(x, y)$ – размерный потенциал малых возмущений; M_1 – число Маха.

Как видно из уравнения (9), f – функция двух безразмерных координат $\xi = x/c$ и $\eta = \lambda y$. Для рассматриваемого течения $\gamma = 1.4$, а ϵ, λ – малые параметры, характеризующие соответственно порядок возмущения потенциала течения и размер крыла по вертикали (см. рис. 1). Как правило, последние две величины уточняются в процессе решения задачи, поскольку связаны с безразмерной величиной δ , которая постоянна для каждого крыла и представляет собой отношение толщины крыла к его хорде.

Набегающий поток до взаимодействия с крылом не возмущен, т. е. $f=0$ при $\xi < 0$. Для симметричного крылового профиля достаточно рассмотреть верхнюю полуплоскость $\eta \geq 0$. На верхней кромке крыла, задаваемой функцией $g(\xi) = h(x)/\delta$,

ставится граничное условие (непротекания):

$$\begin{aligned} f_\eta &= \delta g_\xi, \\ 0 < \xi < 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что в классической постановке задачи граничное условие (10) сносится с верхней кромки на прямую $\eta = 0$. Это необходимо для решения задачи методом годографа. Однако для применения метода, рассматриваемого в данной работе, в этом ограничении нет необходимости.

3.2. Особенности применения метода

Описанная в предыдущем разделе задача нелинейна по постановке, поэтому есть ряд особенностей реализации численно-аналитического метода. Во-первых, решение представляется как функция двух независимых координат $f = f(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= f(\eta_0) + \\ &+ f_\xi(\xi_0, \eta_0)(\xi - \xi_0) + f_\eta(\xi_0, \eta_0)(\eta - \eta_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} [f_{\xi\xi}(\xi_0, \eta_0)(\xi - \xi_0)^2 + \\ &+ f_{\eta\eta}(\xi_0, \eta_0)(\eta - \eta_0)^2] + \\ &+ f_{\xi\eta}(\xi_0, \eta_0)(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) + \\ &+ o[(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Во-вторых, если представление выбирается второго порядка точности, количество удерживаемых членов многомерного ряда Тейлора должно равняться шести.

Таким образом, разрешающая система уравнений будет состоять из шести уравнений. Пять из них приближают искомую функцию рядом Тейлора в пяти точках, в которых значения функции (точные или приближенные) нам известны. Шестое уравнение должно выполняться в расчетной точке, где искомая функция до начала счета неизвестна. В данной задаче разрешающая система уравнений будет иметь следующие компоненты:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 1 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 1 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & a_{62} & 0 & a_{64} & a_{65} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_{i2} &= (\xi_i - \xi_0), & a_{i3} &= (\eta_i - \eta_0), \\ a_{i4} &= \frac{1}{2}(\xi_i - \xi_0)^2, & a_{i6} &= \frac{1}{2}(\eta_i - \eta_0)^2, \\ a_{i5} &= (\xi_i - \xi_0)(\eta_i - \eta_0), \\ i &= \overline{1, 5}. \end{aligned}$$

$$a_{62} = \epsilon(\gamma + 1)f_{\xi\xi}, \quad a_{64} = 1 - \frac{1}{M_1^2}, \quad a_{65} = -\frac{\lambda}{M_1^2},$$

Компоненты векторов \bar{x} и \bar{b} имеют вид

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} f(\xi_0, \eta_0) \\ f_\xi(\xi_0, \eta_0) \\ f_\eta(\xi_0, \eta_0) \\ f_{\xi\xi}(\xi_0, \eta_0) \\ f_{\xi\eta}(\xi_0, \eta_0) \\ f_{\eta\eta}(\xi_0, \eta_0) \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} f(\xi_1, \eta_1) \\ f(\xi_2, \eta_2) \\ f(\xi_3, \eta_3) \\ f(\xi_4, \eta_4) \\ f(\xi_5, \eta_5) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в рамках рассматриваемого метода искомая функция задана в неявной форме, а ее производные выражаются через значения функции в известных пяти точках. Согласно существующей классификации, данная схема является пятишаговой.

Кроме того, поскольку решаемое уравнение нелинейно, использовать метод Гаусса напрямую здесь нельзя. Поэтому следует поступить так: прямым ходом метода Гаусса прийти к нелинейному уравнению, решить его, а лишь затем использовать схему обратного хода.

3.3. Анализ расчета

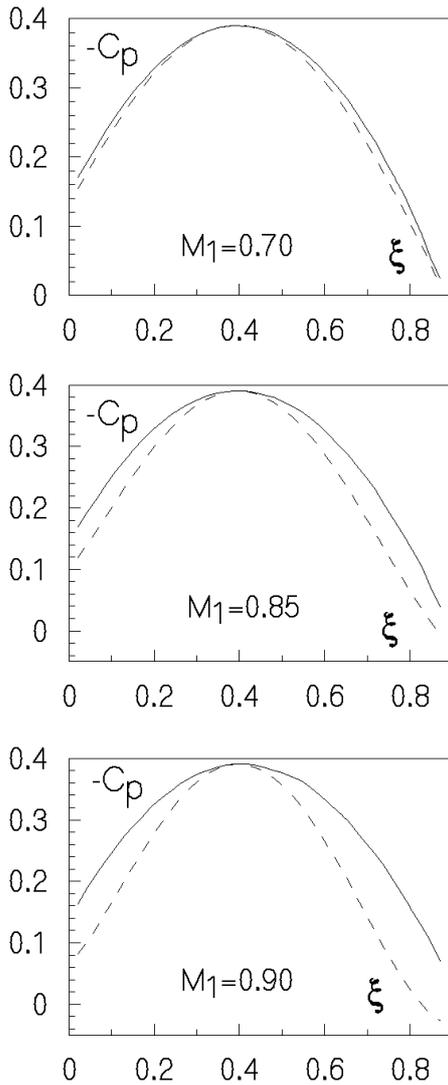
Важной характеристикой течения над крылом является коэффициент давления

$$C_p = 2\delta^{2/3}(\gamma + 1)^{-1/3}f_\xi, \tag{12}$$

фактически показывающий, как изменяется давление в возмущенном течении по отношению к невозмущенному. Будем следить за величиной C_p при анализе полученных численных данных.

Для запуска счета, согласно идее метода, необходимо знать значения искомой функции в первых пяти точках. Их получают в результате приближенного, с точностью до малой константы, интегрирования уравнения (10).

Данные расчета коэффициента давления C_p для различных значений M_1 приведены на рис. 2 и 3. При этом полагалось, что $\delta = 0.06$ и $h(x) = x(1-x)$.

Рис. 2. Коэффициент давления при $M_1 \leq 0.9$

На рис. 2 сплошными кривыми отображено решение на основе численно-аналитического метода, а штриховыми – значения C_p , полученные на основе линеаризованного уравнения (9). Сравнение этих результатов свидетельствует об их удовлетворительном соответствии. Следует обратить внимание на то, что в области $0.9 < M < 1$ вдоль по оси ξ наблюдается появление малых возмущений на кривых C_p (см. рис. 3). Их наличие говорит о зарождении звука над крылом.

Данные расчета C_p достаточно близки к результатам, полученным в работах [11, 12]. Несмотря на то, что здесь не приведен график звукового потенциала на границе, отметим, что граничное условие, как и в предыдущей задаче для уравнения

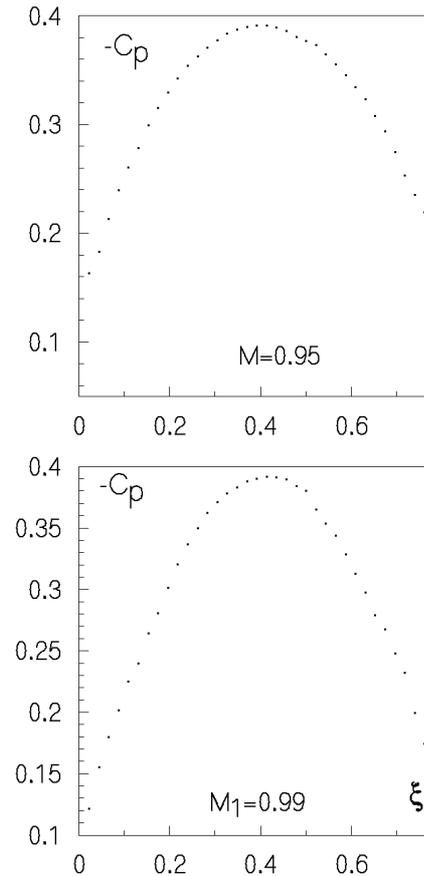


Рис. 3. Коэффициент давления в субзвуковой области

Гельмгольца, выполняется с погрешностью порядка отброшенных малых величин. При этом найденная на границе функция описывает потенциал с точностью до малой аддитивной константы.

Как показали расчеты, метод оказался достаточно эффективным при сравнительно небольшом количестве разбиений сетки, т. е. не требует большого количества вычислений. Это объясняется тем, что многошаговость позволяет, не слишком измельчая шаг (на приведенных графиках Δh составляет порядка 0.02), получать необходимую точность.

В более сложных нестационарных задачах, которые будут рассмотрены в следующей работе, составляющей вторую часть этого исследования, граничное условие не всегда выполняется автоматически. Это связано с тем, что в этом случае оно по-сути тоже становится уравнением в частных производных, которое невозможно разрешить сразу.

Есть разные пути преодоления этой трудности.

Один из них состоит в том, чтобы для начального этапа расчета задать достаточно мелкую сетку и на этой части сетки взять приближенные значения потенциала. После этого запускается схема предлагаемого метода. Если полученные результаты неудовлетворительны, то необходимо включить граничное условие в расчетную систему уравнений как дополнительное уравнение, расширив тем самым расчетную систему. Однако начальное приближение (нулевое или ненулевое) также придется выбирать. Кстати говоря, в большинстве неявных расчетных схемах так и поступают – в качестве первоначального приближения выбирают нулевое приближение, считая, что численная схема сама подстраивается под задачу.

Однако в таком подходе могут скрываться определенные отрицательные моменты. Действительно, всем известно, что нелинейные уравнения, в отличие от линейных, не обладают свойством восстановления истории процесса при обратном ходе. Скорее всего, этим и объясняется то, что большинство расчетных данных, полученных при решении сложных задач по разным численным схемам, близки качественно, но не количественно. Тем не менее, многообразие численных схем позволяет в каждой конкретной задаче воспользоваться той, которая дает наиболее близкий результат к имеющимся экспериментальным данным.

Раз речь зашла о чувствительности задачи к исходным значениям, следует заметить, что в эксперименте этот момент также может отразиться. Несколько неточные первоначальные параметры установки могут дать сдвиг на кривых: ведь задача нелинейна не только в аналитике, но и в эксперименте.

В заключение отметим, что во второй части исследования будет представлено дальнейшее развитие численно-аналитического подхода для задач, в которых искомая функция зависит от трех пространственных координат и времени. Решение каждой отдельно взятой задачи содержит в себе конкретные особенности реализации подхода, сами по себе представляющие определенный интерес.

ВЫВОДЫ

1. Предложен численно-аналитический метод расчета потенциальных течений для задач акустики. Проведен его сравнительный анализ с конечно-разностным подходом.
 2. Описанный метод в общем случае является неявным многошаговым. Для задачи генерации звука тонким крылом использована его реализация по типу “up-wind”, т. е. аналогично схеме “вверх по потоку”.
1. Лукьянов П. В. Применение численно-аналитического метода для решения задач акустики // 36. праць акустичний симпозиуму “Консонанс-2005”. – Київ: Ін-т гідромех. НАНУ, 2005. – С. 225–230.
 2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
 3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
 4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
 5. Андерсон Д., Танненхилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: том 1. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
 6. Lax P. D., Wendroff B. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – 17. – P. 381–398.
 7. Годунов С. К. Разностный метод расчета ударных волн // УМН. – 12, вып. 1(73). – 1957. – С. 176–177.
 8. Murman E. M., Cole J. D. Calculation of plane steady transonic flows // AIAA J. – 1971. – 9, № 1. – P. 114–121.
 9. Ballhaus W. R., Goorjian P. M. Implicit finite-difference computations of unsteady transonic flows about airfoils including the effect of irregular shock motions // AIAA J. – 1977. – 15, № 12. – P. 1728–1735.
 10. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. – М.: Мир, 1989. – 360 с.
 11. Caradonna F. X., Isom M. P. Subsonic and transonic potential flow over helicopter rotor blades // AIAA J. – 1972. – 10, № 12. – P. 1606–1612.
 12. Soiezky H. Yu., Yu N. J., Fung K.-Y., Seebass A. R. New method for designing shock-free transonic configurations // AIAA J. – 1979. – 17, № 7. – P. 722–729.