

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНЕЧНЫХ УПРУГИХ ДИСКОВ

Д. Ю. ЛИБОВ, В. В. МЕЛЕШКО

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка

Получено 15.06.2011

Цель статьи – систематизация высокочастотных спектров конечных дисков в окрестности толщинно-сдвиговой и толщинной мод слоя. Изучение спектра резонансных частот основывается на решении граничной задачи методом суперпозиции, состоящем в представлении вектора перемещения через сумму частных решений уравнения движения в цилиндрических координатах, разложенных по полным и ортогональным системам функций. Экспериментальное исследование проводилось на пьезокерамическом диске, к электродированным поверхностям которого было приложена гармоническая во времени разность потенциалов. Резонансные частоты фиксировались по максимальным значениям напряжения на амплитудно-частотной характеристике. Несмотря на трансверсальную анизотропию свойств пьезокерамики, модель изотропного диска описывает экспериментальные частоты с высокой точностью. Это позволяет подробно изучить характерные типы перемещений на частотах, близких к толщинно-сдвиговому резонансу, а также найти новый тип мод в области толщинного резонанса.

Мета статті – систематизація високочастотних спектрів скінчених дисків в околі товщинно-зсувної й товщинної мод шару. Вивчення спектру резонансних частот базується на розв'язку граничної задачі методом суперпозиції, який полягає в представленні вектора переміщення через суму часткових розв'язків рівняння руху в циліндричних координатах, розкладених по повних і ортогональних системах функцій. Експериментальне дослідження проводилося на п'єзокерамічному диску, до електродованих поверхонь якого було прикладено гармонічну в часі різницю потенціалів. Резонансні частоти фіксувалися за максимальними значеннями напруження на амплітудно-частотній характеристиці. Незважаючи на трансверсальну анізотропію властивостей п'єзокераміки, модель ізотропного диска описує експериментальні частоти з високою точністю. Це дозволяє детально вивчити характерні типи переміщень на частотах поблизу товщинно-зсувного резонансу, а також знайти новий тип мод в області товщинного резонансу.

The paper deals with systematization of high-frequency spectra for the finite disks in the vicinity of the thickness-shear and thickness modes. The studying of resonant frequencies is based on solving of the boundary problem by a superposition method that consists in presenting of displacement vector as a sum of partial solutions in the cylindrical coordinates expressed as series containing the complete and orthogonal functional systems. The experimental study was carried out for the piezoceramic disk, the electrodes on which surfaces were supplied with a harmonic electric voltage. The resonant frequencies in the experiment were determined after the maximum of voltage on the amplitude-frequency response. Despite the transversal anisotropy of piezoceramics, the model of isotropic body predicts the experimental frequencies with high accuracy. This allows thorough investigation of typical displacements in the vicinity of the thickness-shear resonance and discovering of new type of mode in frequency range of the thickness resonance.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе анализируются гармонические колебания с осевой симметрией и симметричные относительно срединной плоскости дисков конечных размеров. Динамика диска в области высоких частот проявляется в специфических формах перемещений и сложной зависимости резонансных частот от геометрии [1]. К таким частотам следует отнести моды в окрестности толщинного резонанса слоя [2]:

$$f_T = \frac{1}{4H} \sqrt{\frac{2G}{\rho} \frac{1-\nu}{1-2\nu}},$$

и поблизости толщинно-сдвигового резонанса [2]:

$$f_S = \frac{1}{2H} \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Здесь G и ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно; ρ – плотность материала;

H – полутолщина слоя. Существование этих мод следует из решения дисперсионного уравнения Рэлея–Лэмба (рис. 1), если предположить, что для частоты $\Omega = 4Hf\sqrt{\rho/G}$ длина волны становится бесконечной, т. е. нормирована к полутолщине слоя постоянная распространения $\lambda \rightarrow 0$.

Толщинно-сдвиговый резонанс (частота запираания $\Omega_S = 2$ на рис. 1) не зависит от коэффициента Пуассона и отличается перемещениями, параллельными плоским поверхностям пластины. Толщинный резонанс (частота запираания $\Omega_T \approx 2.14$ на рис. 1) – функция двух упругих констант и соответствует перемещениям, нормальным к поверхностям пластины. Частотный спектр конечного диска для $\nu < 1/3$ в окрестности Ω_T проанализирован в работах [1, 3]. Для $\nu > 1/3$ спектр в окрестностях Ω_T и Ω_S ранее не рассматривался, поэтому его исследование будет главной целью этой статьи.

Актуальность анализа колебаний дисков обусловлена широким их использованием в пьезоке-

рамических преобразователях, резонаторах, частотных фильтрах [4–8]. Особенно важным при этом оказывается выбор интенсивного резонанса в окрестности Ω_T . В монографии [9] отмечено, что при колебании дисков из титаната бария по толщине вблизи основного резонанса на несколько более высокой частоте наблюдается второй интенсивный резонансный пик. В [10] было найдено три максимума в окрестности толщинного резонанса. Анализ частотного спектра в цитируемой работе показал, что “добавочный” резонанс сосредоточен в окрестности толщинно-сдвиговой моды. Это согласуется с предположением Т. Хютера [11] о том, что “... боковой резонанс возбуждается вследствие неполного выравнивания ячеек в поляризованном титанате бария. Ячейки выравниваются под углом к генерируемому полю, возбуждая симметричную сдвиговую моду...”

Закономерности поведения частотного спектра конечного диска в окрестностях Ω_T и Ω_S по существу определяются свойствами распространения нормальных мод в упругом слое. Отметим, что уравнение для периодически деформируемого слоя, полученное в фундаментальных работах Рэля [12] и Лэмба [13], вообще говоря, не позволяет точно удовлетворить граничные условия отсутствия напряжений на поверхности диска конечных размеров, хотя в частном случае мод Кри–Лэмба решение представляется в замкнутом виде. Такие моды характеризуются нулевыми значениями объемного расширения и касательных напряжений, вызванных падением эквиволлюминальных волн на границу под углом 45° и появлением волн того же типа при отражении [1].

Поскольку уточненные теории колебаний пластин [14, 15] приводят к значительным погрешностям в интересующей нас области частот (длины нормальных волн – порядка толщины диска), будем использовать метод суперпозиции. Корректное усечение бесконечной системы (метод улучшенной редукции), возникающей при его использовании, основывается на ее регулярности и выполнении условий существования решения задачи [16]. Методом суперпозиции с улучшенной редукцией в работе Г. Л. Комиссаровой [17] рассмотрена изгибная задача и оценены пределы применимости приближенных теорий. Планарные колебания до и в окрестности частоты Ω_T анализировались В. В. Мелешко [18, 19], а также В. В. Мелешко и В. Т. Гринченко [1, 3, 20]. В [18] изучены возможности приближенной теории “второго порядка” Р. Миндлина [21] и установлены значительные отклонения в частотах краевых резонансов. Эти расхождения подтверждались также экспери-

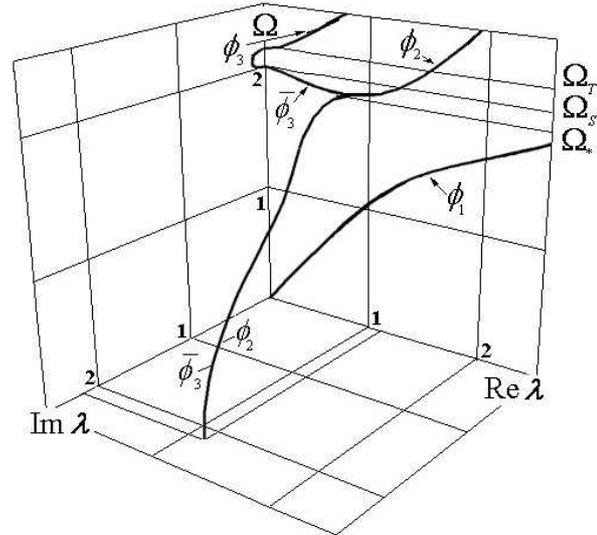


Рис. 1. Нижние ветви ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 дисперсионного соотношения Рэля–Лэмба (коэффициент Пуассона $\nu=0.361$)

ментально – 12 % для BaTiO_3 [21] и 16 % для PbTiO_3 [22] и $\text{Pb}(\text{ZrTi})\text{O}_3$ [23]. Метод суперпозиции использовался Д. Хатчинсоном [24] и Д. Эбнезером [25] с использованием простой редукции бесконечной системы, что позволило им описать только низкочастотную область $0 < \Omega < \Omega_*$ (Ω_* – частотный минимум на рис. 1). В то же время, метод улучшенной редукции дает возможность эффективно находить частоты, лежащие значительно выше диапазона $\Omega_* < \Omega < \Omega_T$.

Суть метода суперпозиции состоит в представлении решения для конечного диска через сумму волноводных решений для бесконечного цилиндра [26] и для слоя [12, 13], разложенных по полным и ортогональным системам тригонометрических и Бесселевых функций соответственно. Такое решение обладает достаточной функциональной полнотой для удовлетворения заданных граничных условий в напряжениях. Установленная асимптотика [16] позволяет находить собственные частоты с необходимой точностью.

1. ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОГО ИЗОТРОПНОГО ДИСКА

Рассмотрение линейной задачи об осесимметричных гармонических колебаниях конечных упругих дисков состоит в решении соответствующей граничной задачи и систематизации спектра резонансных частот.

Как правило, первый этап выполняется анали-

тически с помощью метода суперпозиции [1, 3, 17–20] или численно, например, на базе вариационных подходов. В последнее время широко используется метод Рэлея–Ритца [27–29], хотя численная минимизация функционала, выражающего разность максимума кинетической и потенциальной энергий за цикл колебаний, проблематична даже при использовании квадрупольной точности в современных вычислительных устройствах [27].

Что же касается второго этапа, будем исходить из приближенных решений, чтобы выявить преобладающий тип движений в необходимом частотном диапазоне и далее использовать точное решение граничной задачи.

1.1. Постановка граничной задачи

Рассмотрим сплошной диск толщиной $2H$ и диаметром $2a$. Его однородный изотропный материал характеризуется плотностью ρ и двумя упругими постоянными – коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига G . Совместим начало цилиндрической системы координат (ξ, θ, ζ) с центром диска. Будем использовать безразмерные нормированные к радиусу координаты $(r = \xi/a, \theta, z = \zeta/a)$ и нормированную толщину $h = H/a$. Диск совершает гармонические колебания с круговой частотой ω ; $f = \omega/2\pi$ – частота колебаний в Гц. Гармонический множитель $\sin(\omega t)$ далее опущен. Ограничимся анализом осесимметричных колебаний, т.е. перемещение $u_\theta \equiv 0$. Уравнение движения Ламе бесконечно малого объема [26] для вектора перемещения $\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_z \vec{e}_z$, разложенного по единичным ортам цилиндрической системы координат (\vec{e}_r, \vec{e}_z) , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \gamma_2^2 u_r &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \gamma_2^2 u_z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\gamma_1 = \omega a/c_1$ и $\gamma_2 = \omega a/c_2$ – безразмерные частоты; $c_1 = c_2 \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$ – скорость волны расширения; $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ – скорость волны сдвига. Через

$$\Theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

обозначено объемное расширение.

Вектор перемещения связан с тензором напряжения законом Гука и соотношениями Коши [26]. Последние выражают зависимость между тензором бесконечно малых деформаций и вектором перемещений.

При исследовании волновых процессов в одинаковой мере интересны как рассмотрение собственных частот и форм, так и анализ задачи о вынужденных колебаниях при определенных типах нагрузки. Решение задачи в одной из указанных постановок дает возможность получить решение в другой, однако задача о вынужденных колебаниях является в некоторой степени более общей. При ее решении величины собственных частот определяются как те, на которых не имеет конечного решения задача про вынужденные колебания. Характеристики форм колебаний и напряжений при анализе волнового поля проводятся на частоте, близкой к собственной. Поэтому далее будем рассматривать задачу о вынужденных колебаниях.

Симметричная и антисимметричная относительно срединной плоскости $z=0$ задачи решаются по отдельности. Поскольку экспериментально возбуждались только симметричные моды, будем рассматривать симметричную задачу. Ее граничные условия описывают наличие равномерной периодической нагрузки на плоских поверхностях диска, отсутствие касательных напряжений на всей поверхности и свободную от напряжений боковую поверхность:

$$\begin{aligned} \sigma_r(1, z) = 0, \quad \tau_{rz}(1, z) = 0, \\ \sigma_z(r, \pm h) = 2Gg_0, \quad \tau_{rz}(r, \pm h) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Постоянная величина g_0 моделирует разность потенциалов $\varphi^+ - \varphi^-$ на электродированных поверхностях $\pm h$, задаваемую в эксперименте.

1.2. Точное решение граничной задачи методом суперпозиции

Решение задачи (1), (2) в рамках метода суперпозиции строим в виде суммы частных решений уравнения движения Ламе:

$$\begin{aligned} u_r &= u_r^{(1)} + u_r^{(2)}, \\ u_z &= u_z^{(1)} + u_z^{(2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u_r^{(1)}$ и $u_z^{(1)}$ – решения для бесконечного цилиндра $0 \leq r \leq 1, -\infty < z < \infty$ [26]:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= [A_1 q_1 I_1(q_1 r) - B_1 k I_1(q_2 r)] \cos(kz), \\ u_z^{(1)} &= [-A_1 k I_0(q_1 r) + B_1 q_2 I_0(q_2 r)] \sin(kz), \end{aligned} \quad (4)$$

а $u_r^{(2)}$ и $u_z^{(2)}$ представляют решения для бесконечного слоя $0 \leq r < \infty$, $-h \leq z \leq h$ [12, 13]:

$$u_r^{(2)} = [A_2 \lambda \operatorname{ch}(p_1 z) + B_2 p_2 \operatorname{ch}(p_2 z)] J_1(\lambda r),$$

$$u_z^{(2)} = [A_2 p_1 \operatorname{sh}(p_1 z) + B_2 \lambda \operatorname{sh}(p_2 z)] J_0(\lambda r). \quad (5)$$

Здесь введены обозначения $p_i^2 = \lambda^2 - \gamma_i^2$; $q_i^2 = k^2 - \gamma_i^2$; k, λ – волновые числа; A_i, B_i ($i=1, 2$) произвольные константы; J_l, I_l – обычная и модифицированная функции Бесселя первого рода l -го порядка соответственно.

Выбирая в качестве возможных значений k последовательность $k_n = \pi n/h$ ($n=1, 2, \dots$), раскладываем решение для бесконечного цилиндра в ряды Фурье по полным и ортогональным системам функций $\{1, \cos(k_n z)\}$, $\{\sin(k_n z)\}$ в осевом направлении на отрезке $-h \leq z \leq h$. Заменяя константу λ последовательностью ненулевых корней уравнения $J_1(\lambda) = 0$ – λ_j ($j=1, 2, \dots$), представляем решение для слоя через ряды Бесселя и Дини – Бесселя по полным и ортогональным системам функций $\{1, J_0(\lambda_j r)\}$ и $\{J_1(\lambda_j r)\}$ соответственно в круге $0 \leq r \leq 1$. Соотношения (4), (5) дополняются членами $A_0 J_1(\gamma_1 r)$ и $C_0 \sin(\gamma_1 z)$ для обеспечения полноты систем функций $\cos(k_n z)$ и $J_0(\lambda_j r)$ соответственно. Полученные представления для перемещений позволяют выполнить граничные условия (2) для касательных напряжений и дают однозначные зависимости между A_i и B_i , $i=1, 2$ [1]. Выполнение граничных условий по нормальным напряжениям (2) приводит к системе функциональных соотношений. Используя разложения в ряды Фурье

$$\frac{\operatorname{ch}(qz)}{\operatorname{ch}(qh)} = \frac{1}{qh} + \frac{2q}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n^2 + q^2} \cos(k_n z)$$

и Дини – Бесселя

$$\frac{I_0(pr)}{I_1(p)} = \frac{1}{p} + 2p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_j^2 + p^2} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_1(\lambda_j)},$$

сводим задачу к решению бесконечной системы алгебраических уравнений [1] специального вида. В. Т. Гринченко доказано существование ее решения и сделан вывод об асимптотическом свойстве неизвестных [16]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = - \lim_{j \rightarrow \infty} y_j = a_0 = \operatorname{const}, \quad (6)$$

справедливом для частот, которые не совпадают с собственными. Константа a_0 зависит от частоты и внешней нагрузки g_0 . Полагая для неизвестных

$$x_n = x_N \quad (n \geq N) \quad \text{и} \quad y_j = y_J \quad (j \geq J),$$

сводим бесконечную систему к конечной. Константа a_0 определяется из разности нормальных напряжений на реберных окружностях [1]:

$$\sigma_z(1, \pm h) - \sigma_r(1, \pm h) = 2Gg_0.$$

Для определения резонансных частот использовался следующий алгоритм. По соотношению $N \approx hJ$ ($10 \leq J \leq 15$) устанавливалось количество уравнений в корректно редуцированной системе. Для нагрузки g_0 фиксировалось определенное значение толщины h , а частота ω изменялась с наперед заданным шагом $\Delta\omega$. Если в некотором интервале частот все характеристики напряженно-деформированного состояния меняли знак, то считалось, что он содержит резонансную частоту. Требуемая точность достигалась дальнейшим дроблением шага $\Delta\omega$.

1.3. Элементарные типы решений

Рассмотрим приближенные решения задачи о свободных колебаниях конечных дисков и выделим из них те, которые соответствуют точным частотам дисков с определенными значениями геометрических и физических характеристик.

Радиальные колебания

Пусть диск совершает только радиальные перемещения:

$$u_r^R = A J_1(\gamma_1 r), \quad u_z^R \equiv 0, \quad A = \operatorname{const}. \quad (7)$$

Тогда напряжения будут

$$\sigma_r^R = 2GA \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \gamma_1 J_0(\gamma_1 r) - \frac{J_1(\gamma_1 r)}{r} \right],$$

$$\tau_{rz}^R \equiv 0, \quad \sigma_z^R = 2GA \frac{\nu \gamma_1}{1-2\nu} J_0(\gamma_1 r). \quad (8)$$

Отсутствие касательного напряжения τ_{rz}^R указывает на наличие только движения расширения. Коэффициенты при константе A совпадают с коэффициентами при неизвестной x_0 в методе суперпозиции [1].

Частоты $\gamma_1^{(l)}$, ($l=1, 2, \dots$), являющиеся корнями уравнения

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} J_0(\gamma_1) - \frac{J_1(\gamma_1)}{\gamma_1} = 0, \quad (9)$$

позволяют удовлетворить граничное условие отсутствия напряжения σ_r^R на боковой поверхности. В случае $\nu=0$ напряжение σ_z^R равно нулю всюду, а $\gamma_1^{(l)} = 1.84118, 5.33144, 8.53632, \dots$ ($l=1, 2, 3, \dots$) являются собственными радиальными частотами колебаний конечного диска.

Толщинные колебания

Рассмотрим движение расширения в осевом направлении:

$$u_r^T \equiv 0, \quad u_z^T = B \sin(\gamma_1 z), \quad B = \text{const} \quad (10)$$

с напряжениями

$$\begin{aligned} \sigma_r^T &= 2GB \frac{\nu}{1-2\nu} \gamma_1 \cos(\gamma_1 z), & \tau_{rz}^T &\equiv 0, \\ \sigma_z^T &= 2GB \frac{1-\nu}{1-2\nu} \gamma_1 \cos(\gamma_1 z). \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь коэффициенты при константе B совпадают с коэффициентами при неизвестной y_0 в методе суперпозиции [1].

Частоты

$$\gamma_1^{(m)} = \frac{\pi(2m-1)}{2h}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

удовлетворяют условию отсутствия напряжения σ_z^T на плоских поверхностях диска. Если $\nu=0$, то напряжение σ_r^T равно нулю, а $\gamma_1^{(m)}$ ($m=1, 2, \dots$) – собственные частоты толщинных колебаний диска. Частота $\gamma_1^{(m=1)} \equiv \gamma_1^T$ – основной тон толщинного резонанса.

Моды Кри – Лэмба

$\gamma_1^{(l)}$ для некоторых дискретных значений толщины $h(l, m)$ называют модами Кри – Лэмба. Они соответствуют точным решениям граничной задачи независимо от коэффициента Пуассона, в связи с чем используется термин “универсальные частоты” [28, 30]. Поскольку универсальные частоты детально изучены теоретически и экспериментально в [1, 28, 30], далее рассматривать их не будем.

Толщинно-сдвиговые колебания

Рассмотрим сдвиговые перемещения, симметричные относительно срединной плоскости:

$$u_r^S = Cr \cos(\gamma_2 z), \quad u_z^S \equiv 0, \quad C = \text{const}, \quad (13)$$

определяющие напряженное состояние

$$\begin{aligned} \sigma_r^S &= 2GC \cos(\gamma_2 z), & \Theta^S &\equiv 0, \\ \tau_{rz}^S &= -GCr\gamma_2 \sin(\gamma_2 z), & \sigma_z^S &\equiv 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Частоты

$$\gamma_2^{(q)} = \frac{\pi q}{h}, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

соответствуют толщинно-сдвиговым резонансам слоя и позволяют удовлетворить условие отсутствия касательного напряжения τ_{rz}^S на плоских поверхностях. Частота $\gamma_2^{(q=1)} \equiv \gamma_2^S$ – основной тон толщинно-сдвигового резонанса.

Частоты (15) не удовлетворяют всем граничным условиям для конечного диска ни для каких значений ν и h . Тем не менее, для нас наибольший интерес представляют именно моды в окрестности частоты γ_2^S , связанные с интенсивными “добавочными” резонансами вблизи толщинного резонанса.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальное исследование заключалось в измерении амплитудно-частотной характеристики диска пьезокерамического материала ЦТС-19. Схема экспериментальной установки для возбуждения электромеханических колебаний и записи резонансных частот (рис. 2) включала в себя 1 – генератор функций PCG10/K8016 Velleman instruments, подававший синусоидальный сигнал с искажением менее 0.08 % в диапазоне частот от 0 до 1 МГц; 2 – программный пакет PC-LAB 2000 для варьирования входных параметров и визуализации амплитудно-частотной характеристики; 3 – осциллограф PCS 500 Velleman instruments. Подача возмущающего сигнала генератором осуществлялась одновременно с измерением на осциллографе электрического напряжения. Кроме того, в установку входили 4 – предметный столик с четырьмя резиновыми подставками для установки экспериментального образца; 5 – сопротивление номиналом 1 Ом, подключенное между пьезообразцом и осциллографом и позволившее максимально увеличить напряжение и точнее измерить резонансные частоты. В качестве образца использовался промышленно изготовленный диск 6 из пьезоматериала ЦТС-19 (зарубежный аналог – PZT [5]) диаметром 70 ± 0.01 мм и толщиной 8 ± 0.01 мм. Плотность материала $\rho = 6821$ кг/м³ вычислялась по массе образца 210 ± 0.02 г. В статье [31] определены скорость сдвиговой волны $c_2 = 1810.94$ м/с и планарный коэффициент Пуассона $\nu = 0.361$. Исследуемый образец подключался между генератором, входом осциллографа и сопротивлением. Сплошные серебряные электроды 7 на плоских поверхностях получены технологией металлизации, обеспечивающей оптимальную толщину электродного слоя в (5...10) мкм и поляризацию в направлении толщины.

Вследствие высокой механической добротности

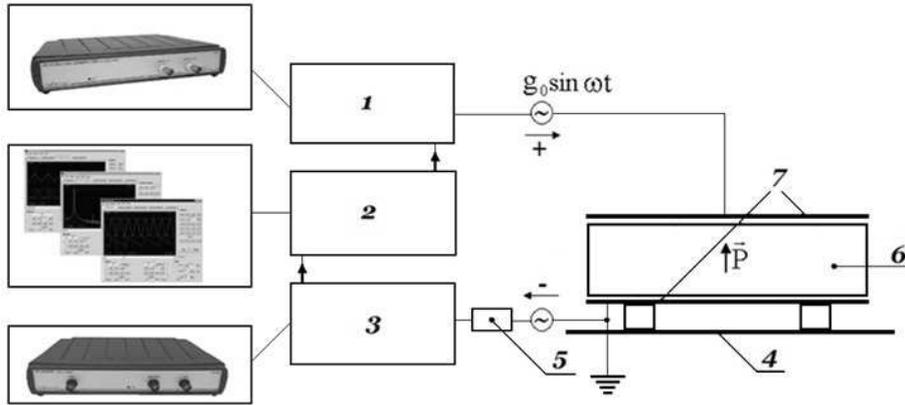


Рис. 2. Схема экспериментальной установки для получения амплитудно-частотной характеристики пьезокерамического диска ЦТС-19

пьезокерамики ЦТС-19 ($Q \approx 83$ [6]) для частотного диапазона от 200 до 260 кГц в окрестности интенсивных резонансов с амплитудой колебаний порядка 1 мкм происходило повышение температуры образца на $(5 \dots 10)^\circ\text{C}$. Разогрев диска не учитывался, поскольку приводил к смещению резонансных частот, на порядок меньшей, чем относительная погрешность записи данных на осциллографе.

Резонансные частоты (кГц) находились по максимальным значениям напряжения (мВ) на амплитудно-частотной характеристике. Результаты измерений записаны в таблице. Резонанс f_1 находится несколько выше толщинно-сдвиговой моды $f_S = c_2/(2H) = 226.25$ кГц. Теоретически найденная частота f_2 экспериментально не была зафиксирована. Отметим, что практическое возбуждение резонанса f_2 требует более детального изучения способов повышения коэффициента электромеханической связи. Резонанс f_3 располагался в окрестности толщинной моды $f_T = c_1/(4H) = 242.68$ кГц.

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Детальные экспериментальные исследования [10, 11, 22, 23] выявили интенсивно возбуждаемые моды в пьезокерамических дисках выше и ниже фундаментальной частоты толщинного резонанса f_T (в зависимости от ν). С целью понять и объяснить природу таких резонансов рассмотрим окрестность толщинно-сдвигового резонанса f_S . Исходя из изучения поведения дисков в окрестности частоты f_T [1, 3], ожидается, что вблизи f_S должны существовать платообразные участки с резко изменяющимися по толщине ха-

Таблица. Резонансные частоты диска (70×8 мм) из пьезокерамического материала ЦТС-19 и соответствующие им значения электрического напряжения

Обозначение резонанса	Резонансная частота	Измеренное напряжение
f_1	228.07	12.1
f_2	–	–
f_3	241.37	19.2

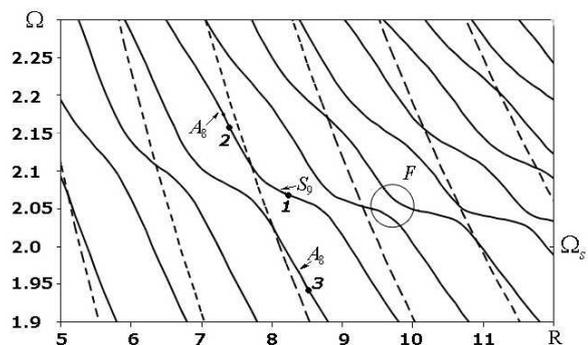


Рис. 3. Частотный спектр в окрестности толщинно-сдвигового резонанса Ω_S (коэффициент Пуассона $\nu = 0$)

рактеристиками напряженно-деформированного состояния.

В подтверждение этого предположения рассмотрим частотный спектр, показанный на рис. 3 в координатах $(\Omega = 2\gamma_2 h/\pi, R = a/H)$ в предельном случае $\nu = 0$ (он реализуем, например, для бериллия, имеющего $\nu = 0.03$ [33]). Обращение в нуль коэффициента Пуассона позволяет разделить движения расширения и сдвига и будет осно-

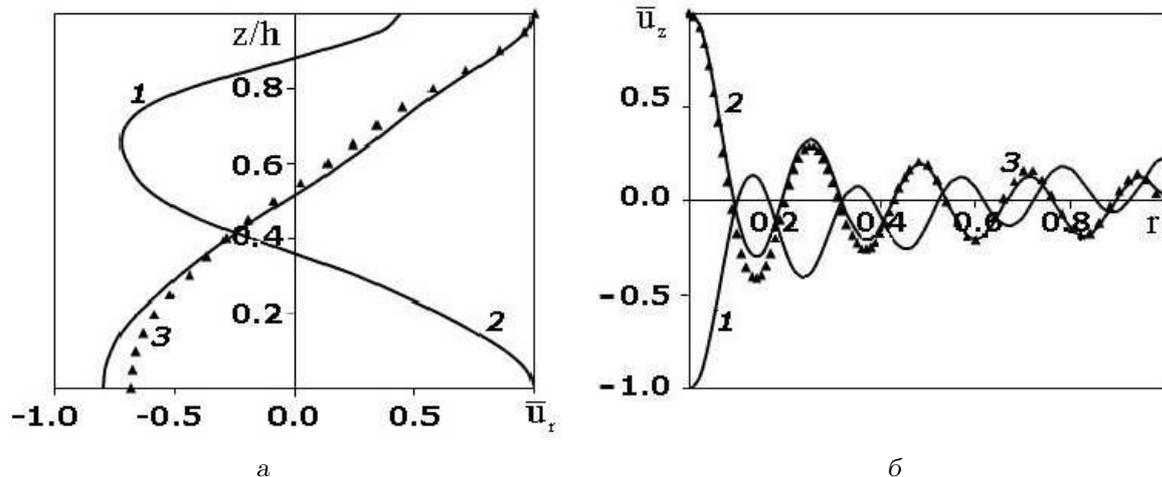


Рис. 4. Распределения нормированных перемещений на поверхности диска (коэффициент Пуассона $\nu=0$):

1 – мода S_9 при $\Omega=2.066$, $R=8.3$; 2 – мода A_8 при $\Omega=2.139$, $R=7.5$; 3 – мода A_8 при $\Omega=1.945$, $R=8.5$;

а – радиальное перемещение \bar{u}_r ; б – осевое перемещение \bar{u}_z

вой для анализа экспериментальных резонансов, приведенных в таблице.

На рис. 3 гиперболы, представленные штриховыми кривыми, соответствуют радиальными колебаниями (9), а сплошные кривые – сдвиговым колебаниям. Выше фундаментальной толщинно-сдвиговой частоты A -моды [1, 22, 23] разделяются плато, которые назовем S -модами, подчеркивая их связь с частотой Ω_S , к которой они стремятся при увеличении нормированного радиуса R .

В колебательных системах со многими степенями свободы расстояние между спектральными кривыми пропорционально степени связанности парциальных систем [34]. Поэтому в частотном спектре для $\nu=0$ присутствуют вырожденные частоты – точки пересечения спектральных кривых в областях взаимодействия сплошных ветвей. Одна из областей взаимодействия сдвиговых движений отмечена окружностью F . Такие же области наблюдаются для B -мод в диапазоне $\Omega_* < \Omega < \Omega_T$ [1]) и в центрах S -плато.

Поведение границы диска на платообразных участках определим по радиальному перемещению \bar{u}_r^1 , нормальному к криволинейной окружной границе (рис. 4, а) и осевому перемещению \bar{u}_z , нормальному к плоским поверхностям (рис. 4, б). Примем количество узловых окружностей в перемещении \bar{u}_z за номер моды. Центр плато на кривой 1 – мода S_9 , перемещение которой максималь-

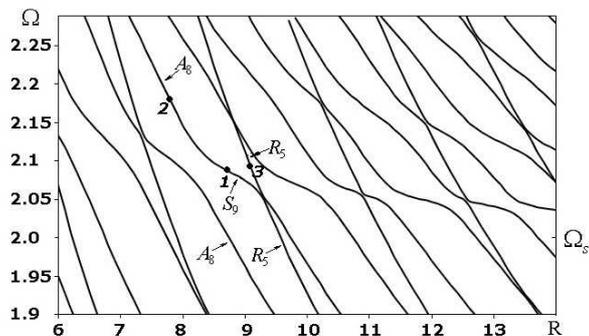


Рис. 5. Частотный спектр в окрестности толщинно-сдвигового резонанса Ω_S (коэффициент Пуассона $\nu=0.2$)

но на окружности $r=1$, $z=0$. Рис. 4, б показывает резкое изменение \bar{u}_z по радиусу на S моде, в отличие от отсутствующего осевого движения на толщинно-сдвиговом резонансе (13). Прохождение через S -плато вдоль отдельной спектральной кривой при уменьшении Ω сопровождается увеличением на единицу количества узловых окружностей в осевом перемещении. В связи с этим отдельные спектральные кривые для частот выше плато (кривая 2) и ниже него (кривая 3) следует объединить в одну моду A_8 . Радиальное перемещение на ней максимально вблизи поверхностей $z=\pm h$ и имеет на одну узловую окружность меньше чем для моды S_9 .

Рассмотрим окрестность частоты Ω_S при коэффициенте Пуассона $\nu=0.2$ (рис. 5). Бывшие точ-

¹Здесь и далее черта над перемещением означает, что оно отнесено к своему максимальному значению. Перемещения \bar{u}_r , \bar{u}_z рассматриваем только на поверхностях $r=1$ и $z=\pm h$ соответственно.

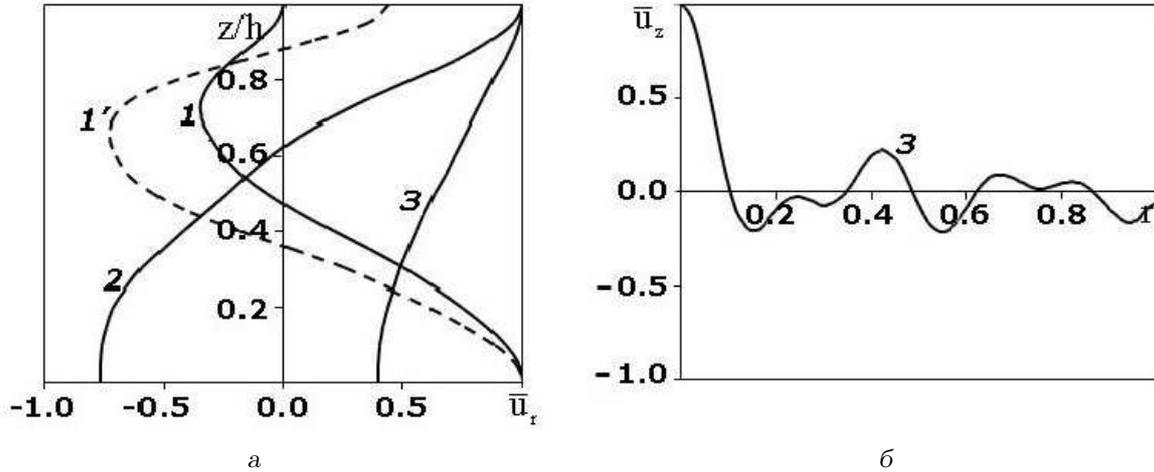


Рис. 6. Распределения нормированных перемещений на поверхности диска (коэффициент Пуассона $\nu=0.2$):

1 – мода S_9 при $\Omega=2.084$, $R=8.75$; 1' – мода S_9 при $\Omega=2.066$, $R=8.3$ (для $\nu=0$);
 2 – мода A_8 при $\Omega=2.178$, $R=7.8$; 3 – мода A_8 при $\Omega=2.106$, $R=10.6$;

а – радиальное перемещение \bar{u}_r ; б – осевое перемещение \bar{u}_z

ки пересечения спектральных кривых (см. (рис. 3) при для $\nu > 0$ переходят в зоны “расталкивания”. При этом моды наследуют свойства мод для $\nu = 0$, поскольку платообразные участки сохранились, но теперь плато соответствуют большим значениям нормированного радиуса R . Так, плато S_9 для $\nu = 0$ содержится в интервале $7.9 < R < 8.6$, а для $\nu = 0.2$ – в $8.4 < R < 9.1$. Распределение радиального перемещения (рис. 6, а) для моды S_9 (кривая 1) практически совпадает с перемещением на этой же моде для $\nu = 0$ (штриховая линия 1'). В то же время, сдвиговые перемещения преобладают в форме 1'. Перемещения на моде A_8 (кривая 2) выше S_9 также подобны A -модам для $\nu = 0$. Тип движения, связанный с формами A_9 и S_9 в точке $\Omega = 2.09$, $R = 9.1$ (кривая 3), является модой R_5 с доминирующим расширением в направлении радиуса. Связь R -моды с A - и S -модами четко проявляется в осевом перемещении на рис. 6, б.

Систематизация высокочастотных мод для $\nu = 0$ и 0.2 позволяет описать резонансы пьезокерамического диска², представленные в таблице. Существенное отличие спектра на рис. 7 от частотных спектров рис. 3 и 5 состоит в отсутствии плато в окрестности сдвигового резонанса Ω_S . Причины этого, по всей вероятности, заключаются в перестройке дисперсионного спектра для слоя [2]. Так,

²Хотя экспериментальный образец ЦТС-19 представляет трансверсально-изотропный материал с поляризацией по толщине, тем не менее, использование модели изотропного диска с $\nu = 0.361$ не привело к серьезным отклонениям.

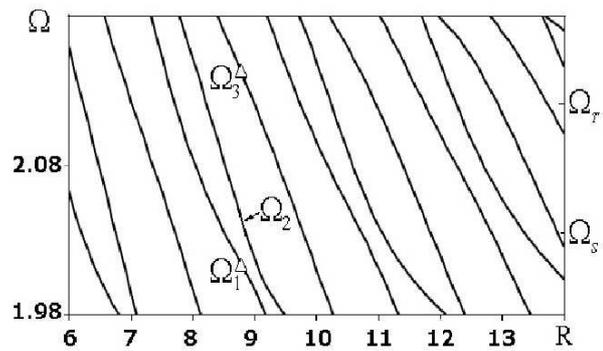


Рис. 7. Частотный спектр для диска из пьезоматериала ЦТС-19 в окрестностях толщинно-сдвигового Ω_S и толщинного Ω_T резонансов (коэффициент Пуассона $\nu=0.361$)

при $\nu < 1/3$ для частот запираения слоя справедливо $\Omega_T < \Omega_S$, а для $\nu > 1/3$ эти резонансы меняются местами: $\Omega_T > \Omega_S$.

Частоты $\Omega_{1,2,3}$, отмеченные на рис. 7, найдены теоретически и экспериментально. Они составляют $\Omega_1 = 2.015$ (2.015), $\Omega_2 = 2.047$ (–), $\Omega_3 = 2.144$ (2.133) – в скобках даны измеренные значения. В окрестности частоты Ω_S наблюдаем два резонанса – Ω_1 и Ω_2 . Радиальное перемещение \bar{u}_r на частоте Ω_1 (рис. 8, а) указывает на доминирование расширения в направлении радиуса, что типично для R -моды (см. также рис. 6 а). Из анализа характера перемещений следует, что Ω_1 – мода R_6 . Радиальное перемещение на частоте Ω_2

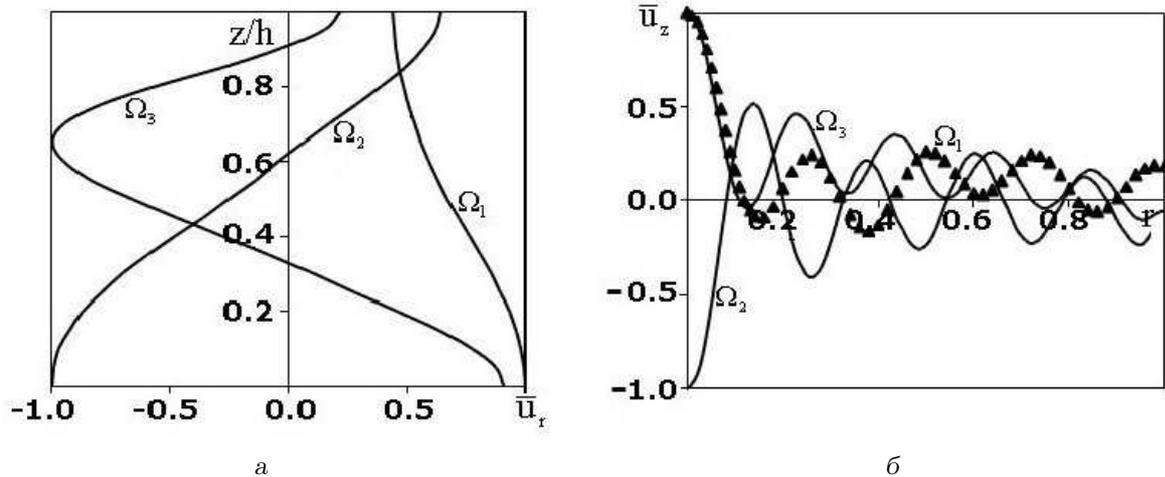


Рис. 8. Распределения нормированных перемещений на поверхности диска из пьезокерамики ЦТС-19 (коэффициент Пуассона $\nu=0.361$, числа в скобках – экспериментальные данные):

1 – при $\Omega=2.015$ (2.015); 2 – при $\Omega=2.047$ (–); 3 – при $\Omega=2.144$ (2.133);

а – радиальное перемещение \bar{u}_r ; б – осевое перемещение \bar{u}_z

максимально в центре криволинейной поверхности диска, поэтому она является A -модой. Из рис. 8, б следует, что Ω_2 – мода A_8 . Отметим, что связанная с другими резонансами частота Ω_2 не была обнаружена в эксперименте. Ее идентификация требует проведения отдельного исследования по выбору формы электродов на плоских поверхностях пьезодиска с целью повышения соответствующего коэффициента элктромеханической связи.

Интенсивный резонанс в окрестности Ω_T в предположении поршневого движения частиц диска (10) широко используется для излучения мощного акустического поля [6, 9], хотя отсутствие такого движения в чистом виде доказано достаточно давно как экспериментально [10] для дисков из пьезокерамики $BaTiO_3$, так и теоретически [1] для изотропного материала.

Для выяснения действительной картины деформаций в окрестности толщинного резонанса $\Omega_T=2.14$ рассмотрим частоту Ω_3 . Форма колебаний криволинейной поверхности на рис. 8, а является сдвиговой S -модой. Осевое перемещение \bar{u}_z на рис. 8, б указывает на то, что частота Ω_3 соответствует моде S_9 .

В заключение отметим, что выполнение всех граничных условий на поверхности диска привело к выводам, которые сложно было бы предугадать, сопоставляя экспериментальные частоты с резонансами слоя:

- на частоте Ω_1 (мода R_6 в окрестности толщино-сдвигового резонанса Ω_S) преобладает перемещение расширения;

- на частоте Ω_3 (мода S_9 в окрестности толщинного резонанса Ω_T) преобладает сдвиговое перемещение.

Проанализируем также причины относительных отклонений:

- Рассматривалась модель колебаний изотропных дисков, тогда как пьезоматериал ЦТС-19 – трансверсально-изотропный.
- Не рассматривались сопряженные уравнения пьезокерамической среды и не учитывались электрические граничные условия.
- Не учитывалось присутствие диссипации. Оценка механических потерь согласно одномерной модели [6] составляет

$$\Delta f_{\text{dis}} = \frac{f_{\text{dis}}}{f} - \frac{f}{f_{\text{dis}}} = \frac{2}{Q},$$

где Δf_{dis} – относительная погрешность для резонансной частоты, обусловленная диссипацией; f_{dis} – резонансная частота с учетом диссипации. Поскольку добротность пьезокерамики ЦТС-19 для колебаний диска по толщине составляет $Q \approx 83$, получаем отклонение в 2.4 %, что превышает погрешность, полученную при сопоставлении теоретических и экспериментальных данных. Отсюда следует необходимость более детального рассмотрения потерь в рамках трехмерной задачи.

- Точность определения экспериментальных частот ограничена частотой дискретизации

осциллографа, относительная погрешность которого составляет 0.3 %.

Эти факторы важно учитывать при организации измерений. Однако в данном случае пренебрежение ими в виду малых погрешностей, составивших не более 0.5 %, оказалось вполне оправданным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрение частотных спектров для коэффициента Пуассона $\nu < 1/3$ позволило провести классификацию высокочастотных резонансов пьезокерамического диска ЦТС-19. Экспериментально и теоретически подтверждено существование двух интенсивных резонансов в окрестности толщинной моды. Выяснено, что низший из них соответствует движению расширения в радиальном направлении и принадлежит окрестности толщинно-сдвиговой моды. Установлено, что высший резонанс лежит по соседству с частотой колебаний по толщине пластины и является не наблюдавшейся ранее S -модой со сдвиговым движением. S -мода для $\nu < 1/3$ образует серию плато, которое исчезает для $\nu > 1/3$.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Авторы выражают искреннюю благодарность ведущему инженеру лаборатории механики сопряженных волновых полей канд. физ.-мат. наук В. А. Андрущенко, который выполнил большую часть экспериментальных исследований и принимал участие в обсуждении полученных результатов.

- Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические волны и колебания в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
- Mindlin R. D. An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates.– World Scientific: London, 2006.– 211 p.
- Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Анализ мод колебаний круглого диска в окрестности толщинного резонанса // Прикл. мех.– 1979.– 15, № 6.– С. 3–19.
- Fujishima S. The history of ceramic filters // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.– 2000.– 47, № 1.– P. 1–7.
- Физическая акустика: Методы и приборы ультразвуковых исследований / Под ред. У. Мэсона. Часть 1А.– М.: Мир, 1966.– 592 с.
- Пьезокерамические преобразователи: Справочник / Под ред. С. И. Пугачева.– Л.: Судостроение, 1984.– 256 с.
- Ballato A. Piezoelectricity: History and new thrusts // IEEE Ultrason. Simpos.– Proceed, 1996.– P. 575–583.
- Yang J. The mechanics of piezoelectric structures.– World Scientific: London, 2006.– 313 p.
- Бергман Л. Ультразвук и его применение в науке и технике.– М.: ИИЛ, 1957.– 726 с.
- Shaw E. A. G. On the resonant vibrations of thick barium titanate disks // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– 28, № 1.– P. 38–50.
- Hueter T. F., Dozois T. F. The frequency response of barium titanate transducers // J. Acoust. Soc. Amer.– 1952.– 24, № 1.– P. 85–86.
- Rayleigh J. On the free vibration of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter // Proc. Lond. Math. Soc.– 1889/1890.– 21, № 360.– P. 70–90.
- Lamb H. On flexure of an elastic plate // Proc. Lond. Math. Soc.– 1888/1889.– 20, № 357.– P. 225–234.
- Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.– М.: Наука, 1967.– 444 с.
- Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука: Том 1.– М.: Гостехиздат, 1976.– 504 с.
- Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.– К.: Наук. думка, 1976.– 504 с.
- Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. О собственных частотах осесимметрично колеблющейся толстой плиты // Прикл. мех.– 1974.– 10, № 11.– С. 81–87.
- Мелешко В. В. О возможностях теории “второго порядка” при изучении высокочастотного спектра упругих дисков // Докл. АН УССР. Сер. А.– 1978.– № 7.– С. 621–625.
- Мелешко В. В. О некоторых особенностях высокочастотного спектра круглых дисков // Докл. АН УССР. Сер. А.– 1978.– № 4.– С. 323–326.
- Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Высокочастотные осесимметричные колебания круглых дисков // Прикл. мех.– 1976.– 12, № 12.– С. 60–68.
- Gazis D. C., Mindlin R. D. Extensional vibrations and waves in a circular disk and a semi-infinite plate // J. Appl. Mech.– 1960.– 27, № 3.– P. 541–547.
- Ikegami S., Ueda I., Kobayashi S. Frequency spectra of resonant vibration in disk plates of $PbTiO_3$ piezoelectric ceramics // J. Acoust. Soc. Amer.– 1974.– 55, № 2.– P. 339–344.
- Ikegami S., Nagata T., Nakajima Y. Frequency spectra of extensional vibration in $PbTiO_3$ disks with Poisson's ratio larger than $1/3$ // J. Acoust. Soc. Amer.– 1976.– 60, № 2.– P. 113–116.
- Hutchinson J. R. Axisymmetric vibration of a free finite-length rod // J. Acoust. Soc. Amer.– 1971.– 51, № 1(2).– P. 233–240.
- Ebenezer D. D., Ravichandran K., Padmanabhan C. Forced vibration of solid elastic cylinders // J. Sound Vib.– 2005.– 282.– P. 991–1007.
- Ляв А. Математическая теория упругости.– М.-Л.: ОНТИ, 1935.– 674 с.
- Bayon A., Gascon F., Nieves F. J. Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinders // J. Sound Vib.– 2008.– 311.– P. 588–596.
- Bayon A., Gascon F., Nieves F. J. An analytical, numerical, and experimental study of the axisymmetric vibrations of a short cylinder // J. Sound Vib.– 2008.– 313.– P. 617–630.
- Leissa A. W., So J. Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analyses // J. Acoust. Soc. Amer.– 1995.– 98, № 4.– P. 2136–2141.

30. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1972.– **51**, № 1(2).– P. 265–283.
31. Андрущенко В. А., Либов Д. Ю., Никитенко В. Н. Определение планарного коэффициента Пуассона диска из пьезокерамики // *Вестник Киев. ун-та. Сер. физ.-мат. науки.*– 2010.– № 4.– С. 45–49.
32. *Huang R., Lee P. C., Lin W.-S., Yu J.-D.* Extensional, thickness-stretch and symmetric thickness-shear vibrations of piezoceramic disks // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.*– 2002.– **49**, № 11.– P. 1507–1515.
33. *Физические величины: Справочник* / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова.– М.: Энергоатомиздат, 1991.– 1232 с.
34. *Пирс Дж.* Почти все о волнах.– М.: Мир, 1976.– 176 с.