

УДК 539.3

# ВЗАЄМОДІЯ ЖОРСТКИХ ДИСКОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ У ТРИВИМІРНОМУ ПОЛІ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ

О. І. КАЛИНЯК, В. В. МИХАСЬКІВ

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
імені Я. С. Підстригача НАН України

Одержано 01.10.2010

Методом граничних інтегральних рівнянь у часовій області розв'язано тривимірну нестационарну динамічну задачу теорії пружності для безмежної матриці з множинними жорсткими дисковими включеннями. Довільно розташовані включення ідеально з'єднані з матрицею, їхній рух характеризується поступальними переміщеннями й поворотами відносно центрів мас. Числові результати стосуються реакції двох компланарних кругових включень однакового розміру та маси на падіння пружної плоскої нестационарної поздовжньої хвилі. Проаналізовано вплив взаємодії включень на їхні кінематичні параметри, а також коефіцієнти інтенсивності динамічних напружень в їхньому околі.

Методом граничних інтегральних уравнений решена трехмерная нестационарная динамическая задача теории упругости для бесконечной матрицы с множественными жесткими дисковыми включениями. Произвольно расположенные включения идеально соединены с матрицей, их движение характеризуется поступательными перемещениями и поворотами относительно центров масс. Численные результаты относятся к реакции двух компланарных круговых включений одинакового радиуса и массы на падение упругой плоской нестационарной продольной волны. Проанализировано влияние взаимодействия включений на их кинематические параметры, а также коэффициенты интенсивности динамических напряжений в их окрестности.

The paper deals with solving of a three-dimensional non-stationary elastodynamic problem for an infinite matrix with multiple rigid disc-shaped inclusions by the method of boundary integral equations. The arbitrarily located inclusions are perfectly bonded with a matrix, their motion is characterized by the translations and rotations relative to the mass centers. The numerical results concern to the reaction of two coplanar penny-shaped inclusions of equal size and mass on the incidence of elastic plane non-stationary longitudinal wave. The influence of inclusions interaction on their kinematical parameters, as well as on factors of dynamic stress intensity in their vicinities is analyzed.

## ВСТУП

Загальновідомо, що вивчення поведінки матричних композитів при динамічних навантаженнях зводиться до задач присутності множинних включень у полі пружних хвиль. При поширенні в таких структурах нестационарних хвиль на початковій часовій стадії можна обійтися розв'язками відповідних задач для поодинокого включення [1–5], однак після приходу дифрагованих хвиль від сусідніх включень необхідно враховувати ефекти взаємодії розсіювачів. У двовимірних постановках нестационарні процеси деформування пружних тіл з системами включень і тріщин досліджено в роботах [6–8]. Розглянутий раніше тривимірний випадок стосується ситуації падіння нестационарної пружної хвилі на множинні сферичні включення [9]. Розв'язки тривимірних задач щодо інших форм наповнювачів, зокрема, важливих з точки зору концентрації нестационарних напружень тонких включень, досі у літературі не наводились.

У даній роботі для дослідження нестационарних коливань дискових жорстких включень у тривимірній пружній матриці використано метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР), виведених у

часовій області. Запропоновано покроковий за часом алгоритм розв'язування ГІР, що дозволяє прямий (без переходу до трансформант часових інтегральних перетворень) аналіз інерційних явищ взаємодії включень. Як результат, отримано часові залежності поступальних переміщень і поворотів включень, параметрів концентрації напружень у матриці при її нестационарному хвильовому збуренні.

## 1. ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ДО ГІР

Нехай у безмежній ізотропній пружній матриці міститься  $N$  довільно розташованих та ідеально з'єднаних з нею абсолютно жорстких дискових включень нульової товщини з масами  $M_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ), що займають області  $S_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ), як показано на рис. 1. Деформування тіла зумовлюється поширенням у ньому нестационарної хвилі з заданим розподілом у просторі  $\mathbf{x}$  й часі  $t$  вектора переміщень  $\mathbf{u}^{\text{in}}$ .

Вихідним для аналізу розсіяного включенням поля переміщень  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  у матриці є рівняння руху

у вигляді [10]

$$c_1^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де  $\nabla$  – тривимірний набла-оператор;  $c_2 = \sqrt{G/\rho}$  і  $c_1 = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}c_2$  – швидкості поширення поперечних і поздовжніх хвиль;  $G$  – модуль зсуву матеріалу матриці;  $\rho$  – її густина;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Вплив матриці на включення визначається головними векторами зусиль  $\mathbf{P}^{(n)}$  ( $n = \overline{1, N}$ ), що діють на кожну неоднорідність, і моментами  $\mathbf{Z}^{(n)}$  ( $n = \overline{1, N}$ ) цих зусиль відносно їхніх центрів мас. Тоді, пов'язавши з  $n$ -им включенням систему координат  $O^{(n)}x_1^{(n)}x_2^{(n)}x_3^{(n)}$  так, щоб її початок  $O^{(n)}$  збігався з відповідним центром мас, а вісь  $O^{(n)}x_3^{(n)}$  була спрямована перпендикулярно до поверхні  $S_n$  (див. рис. 1), для опису руху включень як жорстких цілих матимемо такі диференціальні рівняння відносно їхніх поступальних переміщень  $\mathbf{U}^{(n)}$  ( $n = \overline{1, N}$ ) і поворотів  $\Omega^{(n)}$  ( $n = \overline{1, N}$ ) [11]:

$$\begin{aligned} M_n \frac{d^2 \mathbf{U}^{(n)}(t)}{dt^2} &= \mathbf{P}^{(n)}(t), \\ M_n (\mathbf{r}^{(n)})^2 \frac{d^2 \Omega^{(n)}(t)}{dt^2} &= \mathbf{Z}^{(n)}(t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$n = \overline{1, N}.$$

Тут  $\mathbf{r}^{(n)}$  – вектор радіуса інерції  $n$ -го включення.

Із обмежень на кінетику включень та неперервності переміщень за перетину областей  $S_n$  впливають також крайові умови:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(n)}, t) &= \mathbf{U}^{(n)} + \Omega^{(n)} \times \mathbf{x}^{(n)}, \\ \mathbf{x}^{(n)} &\in S_n, \end{aligned} \quad (3)$$

$$n = \overline{1, N}.$$

Тут і надалі  $\mathbf{x}^{(n)}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$  – радіус-вектор точки в  $n$ -ій системі координат. Для точок поверхні  $S_n$  слід враховувати, що  $x_3^{(n)} = 0$ .

Згідно з принципом суперпозиції для коректного формулювання початкових умов повне нестаціонарне поле переміщень  $\mathbf{u}$  у матриці з системою включень подамо у вигляді суми

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{in}} + \sum_{k=1}^N \mathbf{u}^{(k)}, \quad (4)$$

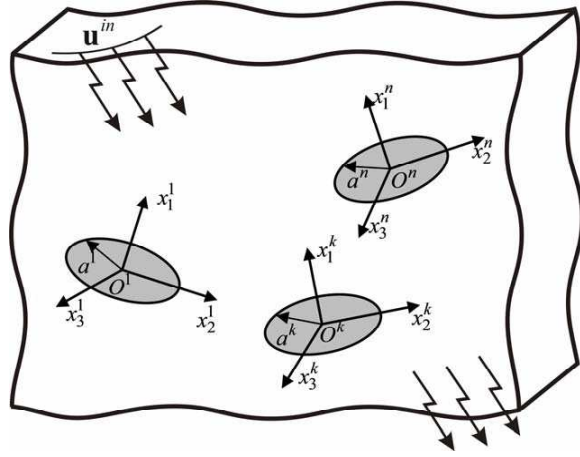


Рис. 1. Геометрична схема задачі

в якій  $\mathbf{u}^{(k)}$  – переміщення, викликані розсіянням хвиль  $k$ -им включенням. Запровадимо відлік часу з моменту перетину фронту падаючої хвилі котрогось із множини включень та врахуємо описану вище інтерпретацію переміщень  $\mathbf{u}^{(n)}$ . Тоді початкові умови на них, а також на поступальні переміщення включень і їхні повороти можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}, t)|_{t=0} &= \frac{\partial \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ \mathbf{U}^{(n)}(t)|_{t=0} &= \frac{\partial \mathbf{U}^{(n)}(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ \Omega^{(n)}(t)|_{t=0} &= \frac{\partial \Omega^{(n)}(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$n = \overline{1, N}.$$

Щоб звести задачу в диференціальній постановці (1)–(5) до ГІР, скористаємось за аналогією з випадком поодинокого включення [5] такими інтегральними представленнями компонент  $u_j^{(n)}$

( $j = \overline{1, 3}$ ) переміщень  $\mathbf{u}^{(n)}$ :

$$\begin{aligned}
 u_j^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}, t) = & \frac{1}{4\pi G} \left\{ \iint_{S_n} \frac{1}{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} \times \right. \\
 & \times \left[ - \int_{\gamma}^1 \Delta\sigma_j^{(n)} \left( \mathbf{y}^{(n)}, t - \tau \frac{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|}{c_2} \right) \tau d\tau + \right. \\
 & + \Delta\sigma_j^{(n)} \left( \mathbf{y}^{(n)}, t - \frac{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|}{c_2} \right) \left. \right] dS_{\mathbf{y}} + \\
 & + \sum_{i=1}^3 \iint_{S_n} \frac{(x_j^{(n)} - y_j^{(n)})(x_i^{(n)} - y_i^{(n)})}{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|^3} \times \\
 & \times \left[ 3 \int_{\gamma}^1 \Delta\sigma_i^{(n)} \left( \mathbf{y}^{(n)}, t - \tau \frac{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|}{c_2} \right) \tau d\tau - \right. \\
 & - \Delta\sigma_i^{(n)} \left( \mathbf{y}^{(n)}, t - \frac{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|}{c_2} \right) + \\
 & \left. + \gamma^2 \Delta\sigma_i^{(n)} \left( \mathbf{y}^{(n)}, t - \gamma \frac{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|}{c_2} \right) \right] dS_{\mathbf{y}} \left. \right\}, \\
 & j = \overline{1, 3}, \quad n = \overline{1, N}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Тут  $\Delta\sigma_j^{(n)}$  – невідомий стрибок напружень на  $n$ -му включенні у напрямку осі  $O^{(n)}x_j^{(n)}$ . Відповідно до принципу причинності,  $\Delta\sigma_j^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}, t) = 0$ , коли  $t < 0$ ,  $\gamma = c_2/c_1$ . Запис  $|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|$  означає відстань між точкою поля  $\mathbf{x}^{(n)}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$  й точкою інтегрування  $\mathbf{y}^{(n)}(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, 0)$ .

З фізичного значення густин  $\Delta\sigma_j^{(n)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) хвильових потенціалів у формулах (6) випливають співвідношення для компонент  $P_j^{(n)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) головного вектора зусиль  $\mathbf{P}^{(n)}$ , що передаються від матриці на  $n$ -те включення, й компонент  $Z_j^{(n)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) вектора моментів  $\mathbf{Z}^{(n)}$  цих зусиль:

$$\begin{aligned}
 P_j^{(n)}(t) &= - \iint_{S_n} \Delta\sigma_j^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t) dS_{\mathbf{y}}, \quad j = \overline{1, 3}, \\
 Z_j^{(n)}(t) &= (-1)^j \iint_{S_n} y_{3-j}^{(n)} \Delta\sigma_3^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t) dS_{\mathbf{y}}, \\
 & \quad j = 1, 2, \tag{7} \\
 Z_3(t) &= \iint_{S_n} \left[ y_2^{(n)} \Delta\sigma_1^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t) - \right. \\
 & \quad \left. - y_1^{(n)} \Delta\sigma_2^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t) \right] dS_{\mathbf{y}}.
 \end{aligned}$$

Отже, компоненти переміщень у матриці (за допомогою співвідношень (4) і (6)) і силові впливи на включення як жорсткі цілі (за допомогою співвідношень (7)) виражаються через функції стрибків напружень на поверхнях неоднорідностей. Для їх визначення використаємо крайові умови (3), взявши до уваги, що компоненти повних переміщень (4) у системі координат, зв'язаній з  $n$ -м включенням, мають вигляд

$$\begin{aligned}
 u_j(\mathbf{x}^{(n)}, t) &= u_j^{\text{in}}(\mathbf{x}^{(n)}, t) + \\
 & + \sum_{k=1}^N \left[ u_1^{(k)}(\mathbf{x}^{(kn)}, t) \times \right. \\
 & \quad \times (l_1^{(kn)} \delta_{1j} + m_1^{(kn)} \delta_{2j} + p_1^{(kn)} \delta_{3j}) + \\
 & + u_2^{(k)}(\mathbf{x}^{(kn)}, t) \times \\
 & \quad \times (l_2^{(kn)} \delta_{1j} + m_2^{(kn)} \delta_{2j} + p_2^{(kn)} \delta_{3j}) + \\
 & + u_3^{(k)}(\mathbf{x}^{(kn)}, t) \times \\
 & \quad \left. \times (l_3^{(kn)} \delta_{1j} + m_3^{(kn)} \delta_{2j} + p_3^{(kn)} \delta_{3j}) \right].
 \end{aligned} \tag{8}$$

Тут  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $l_j^{(kn)}$ ,  $m_j^{(kn)}$ ,  $p_j^{(kn)}$  – напрямні косинуси орта осі  $O^{(k)}x_j^{(k)}$  у  $n$ -ій системі координат,  $\mathbf{x}^{(kn)}(x_1^{(kn)}, x_2^{(kn)}, x_3^{(kn)})$  – радіус-вектор точки  $\mathbf{x}^{(n)}$  у  $k$ -ій системі координат. Тоді  $\mathbf{x}^{(kn)} = \mathbf{O}^{(k)}\mathbf{O}^{(n)} + \mathbf{x}^{(n)}$ .

Підставивши вирази для переміщень (8) зі складовими (6) у записані покомпонентно крайові умови (3), прийдемо до такої системи  $3N$  ГІР типу хвильового потенціалу відносно функцій стрибків напружень на включеннях, їхніх поступальних переміщень та поворотів:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_n} \frac{b_1^{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} [\Delta\sigma_3^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t)]}{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} dS_{\mathbf{y}} + \\
 & + \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{kn}) \times \\
 & \times \sum_{i=1}^3 \iint_{S_k} \frac{\mathbf{K}_{3i}^{\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}} [\Delta\sigma_i^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)}, t)]}{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|^3} dS_{\mathbf{y}} = \tag{9a} \\
 & = 4\pi G [-u_3^{\text{in}}(\mathbf{x}^{(n)}, t) + U_3^{(n)}(t) - \\
 & \quad - \Omega_2^{(n)}(t)x_1^{(n)} + \Omega_1^{(n)}(t)x_2^{(n)}], \\
 & \mathbf{x}^{(n)} \in S_n, \quad n = \overline{1, N},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_n} \frac{1}{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} \times \\
 & \quad \times \left\{ b_1^{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} [\Delta\sigma_j^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t)] + \right. \\
 & + \frac{(x_1^{(n)} - y_1^{(n)})(x_2^{(n)} - y_2^{(n)})}{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|^2} \times \\
 & \quad \times b_2^{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} [\Delta\sigma_{3-j}^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t)] + \\
 & + \frac{(x_j^{(n)} - y_j^{(n)})^2}{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|^2} \times \\
 & \quad \left. \times b_2^{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} [\Delta\sigma_j^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t)] \right\} dS_{\mathbf{y}} + \quad (9b) \\
 & + \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{kn}) \times \\
 & \times \sum_{i=1}^3 \iint_{S_k} \frac{K_{ji}^{\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}} [\Delta\sigma_i^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)}, t)]}{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|^3} dS_{\mathbf{y}} = \\
 & = 4\pi G [-u_j^{\text{in}}(\mathbf{x}^{(n)}, t) + U_j^{(n)}(t) + \\
 & \quad + (-1)^j \Omega_3^{(n)}(t) x_{3-j}^{(n)}],
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^{(n)} \in S_n, \quad j = 1, 2, \quad n = \overline{1, N}.$$

Тут  $U_j^{(n)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) і  $\Omega_j^{(n)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) – компоненти векторів поступального переміщення й повороту  $n$ -го включення відповідно. Оператори  $b_j^{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$  в інтегралах зі слабкою особливістю такі ж, як і у ГПР для поодинокого включення [5], та діють на функцію  $\Delta\sigma$  за законом часового запізнення:

$$\begin{aligned}
 & b_j^{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} [\Delta\sigma_i^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t)] = \\
 & = b_{1j} \int_{\gamma}^1 \Delta\sigma_i^{(n)} \left( \mathbf{y}^{(n)}, t - \tau \frac{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|}{c_2} \right) \tau d\tau + \\
 & \quad + b_{2j} \Delta\sigma_i^{(n)} \left( \mathbf{y}^{(n)}, t - \frac{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|}{c_2} \right) + \quad (10) \\
 & \quad + b_{3j} \Delta\sigma_i^{(n)} \left( \mathbf{y}^{(n)}, t - \gamma \frac{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|}{c_2} \right), \\
 & \quad j = 1, 2, i = \overline{1, 3},
 \end{aligned}$$

$$b_{11} = -1, \quad b_{21} = 1, \quad b_{31} = 0,$$

$$b_{12} = 3, \quad b_{22} = -1, \quad b_{32} = \gamma^2.$$

Оператори  $K_{ji}^{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  в решті регулярних (бо  $\mathbf{x}^{(kn)} \neq \mathbf{y}^{(k)}$ ) інтегралів, які описують взаємодію включень, визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
 & K_{ji}^{\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}} [\Delta\sigma_i^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)}, t)] = \\
 & = K_{1ji}^{(kn)}(\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}) \times \\
 & \times \int_{\gamma}^1 \Delta\sigma_i^{(k)} \left( \mathbf{y}^{(k)}, t - \tau \frac{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|}{c_2} \right) \tau d\tau + \\
 & \quad + K_{2ji}^{(kn)}(\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}) \times \quad (11) \\
 & \quad \times \Delta\sigma_i^{(k)} \left( \mathbf{y}^{(k)}, t - \frac{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|}{c_2} \right) + \\
 & \quad + K_{3ji}^{(kn)}(\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}) \times \\
 & \quad \times \Delta\sigma_i^{(k)} \left( \mathbf{y}^{(k)}, t - \gamma \frac{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|}{c_2} \right),
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 & K_{1ji}^{(kn)}(\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}) = \\
 & = -(l_i^{(kn)} \delta_{1j} + m_i^{(kn)} \delta_{2j} + p_i^{(kn)} \delta_{3j}) |\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|^2 + \\
 & \quad + 3\tilde{K}_{ji}^{(kn)}(\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & K_{2ji}^{(kn)}(\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}) = \\
 & = (l_i^{(kn)} \delta_{1j} + m_i^{(kn)} \delta_{2j} + p_i^{(kn)} \delta_{3j}) |\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|^2 - \\
 & \quad - \tilde{K}_{ji}^{(kn)}(\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}),
 \end{aligned}$$

$$K_{3ji}^{(kn)}(\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}) = \gamma^2 \tilde{K}_{ji}^{(kn)}(\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}),$$

$$\begin{aligned}
 & \tilde{K}_{ji}^{(kn)}(\mathbf{x}^{(kn)}, \mathbf{y}^{(k)}) = \\
 & = [(x_1^{(kn)} - y_1^{(k)}) \delta_{1i} + (x_2^{(kn)} - y_2^{(k)}) \delta_{2i} + x_3^{(kn)} \delta_{3i}] \times \\
 & \quad \times [(l_1^{(kn)} \delta_{1j} + m_1^{(kn)} \delta_{2j} + p_1^{(kn)} \delta_{3j})(x_1^{(kn)} - y_1^{(k)}) + \\
 & \quad + (l_2^{(kn)} \delta_{1j} + m_2^{(kn)} \delta_{2j} + p_2^{(kn)} \delta_{3j})(x_2^{(kn)} - y_2^{(k)}) + \\
 & \quad + (l_3^{(kn)} \delta_{1j} + m_3^{(kn)} \delta_{2j} + p_3^{(kn)} \delta_{3j}) x_3^{(kn)}]. \quad (12)
 \end{aligned}$$

ГПР задачі значно спрощуються для розташованих в одній площині (компланарних) включень.

Тоді, поклавши у виразах (11) і (12)  $l_j^{(kn)} = \delta_{1j}$ ,  $m_j^{(kn)} = \delta_{2j}$ ,  $p_j^{(kn)} = \delta_{3j}$ ,  $x_3^{(kn)} = 0$ , з (9a), (9b) отримуємо розщеплену систему  $N$  ГІР антисиметричної задачі стосовно стрибків напружень  $\Delta\sigma_3^{(n)}$  ( $n = \overline{1, N}$ ) у вигляді

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \iint_{S_k} \frac{\mathbf{b}_1^{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|} [\Delta\sigma_3^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)}, t)]}{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|} dS_{\mathbf{y}} = \\ & = 4\pi G [-u_3^{\text{in}}(\mathbf{x}^{(n)}, t) + U_3^{(n)}(t) - \\ & \quad -\Omega_2^{(n)}(t)x_1^{(n)} + \Omega_1^{(n)}(t)x_2^{(n)}], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mathbf{x}^{(n)} \in S_n, \quad n = \overline{1, N}$$

й систему  $2N$  ГІР симетричної задачі стосовно стрибків напружень  $\Delta\sigma_j^{(n)}$  ( $j = 1, 2$ ,  $n = \overline{1, N}$ ) у вигляді

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \iint_{S_k} \frac{1}{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|} \left\{ \mathbf{b}_1^{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|} \times \right. \\ & \quad \times [\Delta\sigma_j^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)}, t)] + \\ & \quad + \frac{(x_1^{(kn)} - y_1^{(k)})(x_2^{(kn)} - y_2^{(k)})}{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|^2} \mathbf{b}_2^{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|} \times \\ & \quad \times [\Delta\sigma_{3-j}^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)}, t)] + \\ & \quad + \frac{(x_j^{(kn)} - y_j^{(k)})^2}{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|^2} \mathbf{b}_2^{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|} \times \\ & \quad \left. \times [\Delta\sigma_j^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)}, t)] \right\} dS_{\mathbf{y}} = \\ & = 4\pi G [-u_j^{\text{in}}(\mathbf{x}^{(n)}, t) + U_j^{(n)}(t) + \\ & \quad + (-1)^j \Omega_3^{(n)}(t)x_{3-j}^{(n)}], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{x}^{(n)} \in S_n, \quad j = 1, 2, \quad n = \overline{1, N}.$$

ГІР (10) або (13) і (14) замикаються  $6N$  диференціальними рівняннями (2) у скалярній формі, які з урахуванням співвідношень (7) приймають

такий вигляд:

$$\begin{aligned} M_n \frac{d^2 U_j^{(n)}(t)}{dt^2} &= - \iint_{S_n} \Delta\sigma_j^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t) dS_{\mathbf{y}}, \\ & \quad j = \overline{1, 3}, \quad n = \overline{1, N}; \\ M_n (r_j^{(n)})^2 \frac{d^2 \Omega_j^{(n)}(t)}{dt^2} &= \\ &= (-1)^j \iint_{S_n} y_{3-j}^{(n)} \Delta\sigma_3^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t) dS_{\mathbf{y}}, \\ & \quad j = 1, 2, \quad n = \overline{1, N}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} M_n (r_3^{(n)})^2 \frac{d^2 \Omega_3^{(n)}(t)}{dt^2} &= \\ &= \iint_{S_n} [y_2^{(n)} \Delta\sigma_1^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t) - \\ & \quad - y_1^{(n)} \Delta\sigma_2^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t)] dS_{\mathbf{y}}, \\ & \quad n = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

де  $r_j^{(n)}$  – радіус інерції  $n$ -го включення відносно осі  $O^{(n)}x_j^{(n)}$ . До хвильових рівнянь (15) слід долучити також початкові умови на поступальні переміщення включень і їхні повороти (5).

У виведених ГІР точно фіксується як момент настання взаємодії включень після приходу в актуальне включення дифрагованих поздовжніх хвиль від сусідніх включень (до цього у ГІР ядра впливу включень одне на одне дорівнюють нулеві), так і максимальне запізнення у часовому аргументі шуканих функцій, необхідне поперечній хвилі для пробігу відстані між найбільш віддаленими точками на системі включень.

## 2. РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ І ПОКРОВОВА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ГІР

Для спрощення опису числового алгоритму розв'язування отриманих ГІР розглянемо антисиметричну задачу, коли у нестационарній хвилі збурення тіла з компланарними включеннями відмінною від нуля буде лише компонента переміщень  $u_3^{\text{in}}$ . Тоді також маємо  $\Delta\sigma_j^{(n)} = 0$ ,  $U_j^{(n)} = 0$ ,  $\Omega_3^{(n)} = 0$ , ( $j = 1, 2$ ,  $n = \overline{1, N}$ ). Полярну особливість у системі  $N$  ГІР (13) відносно решти невідомих виділяємо шляхом тотожного перетворення складників суми

з номером  $k = n$  із залученням інтегралів з ньютонівським (статичним) ядром:

$$\begin{aligned}
 & A \iint_{S_n} \frac{\Delta\sigma_3^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t)}{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} dS_{\mathbf{y}} + \\
 & + \iint_{S_n} \frac{1}{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} \times \\
 & \times \left\{ \mathbf{b}_1^{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} [\Delta\sigma_3^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t)] - \right. \\
 & \quad \left. - A\Delta\sigma_3^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t) \right\} dS_{\mathbf{y}} + \\
 & + \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{kn}) \times \\
 & \times \iint_{S_k} \frac{\mathbf{b}_1^{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|} [\Delta\sigma_3^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)}, t)]}{|\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}|} dS_{\mathbf{y}} = \\
 & = 4\pi G [-u_3^{\text{in}}(\mathbf{x}^{(n)}, t) + U_3^{(n)}(t) - \\
 & \quad - \Omega_2^{(n)}(t)x_1^{(n)} + \Omega_1^{(n)}(t)x_2^{(n)}], \\
 & \mathbf{x}^{(n)} \in S_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad A = \frac{1 + \gamma^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Другий інтеграл у лівій частині рівнянь (16) – регулярний, у чому легко переконатись, проаналізувавши підінтегральну функцію при  $\mathbf{y}^{(n)} \rightarrow \mathbf{x}^{(n)}$ . Тому у ньому інтегрувати з достатньою точністю можна по області  $S_n^0$ , утвореній видаленням з  $S_n$  малого околу точки джерела  $\mathbf{x}^{(n)}$ . Інтеграли під знаком суми також будуть регулярними через те, що у них точки інтегрування та джерела не збігаються внаслідок розташування на поверхнях різних включень. Щодо характеристичної частини рівнянь (16), то вона містить полярну особливість і, відповідно до встановленої структури розв'язку рівнянь з такими ядрами, регламентує подання шуканих функцій для кругових дискових включень з радіусами  $a_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ) у вигляді

$$\begin{aligned}
 \Delta\sigma_3^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}, t) &= \frac{\alpha_3^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}, t)}{\sqrt{a_n^2 - (x_1^{(n)})^2 - (x_2^{(n)})^2}}, \\
 \mathbf{x}^{(n)} \in S_n, \quad n &= \overline{1, N},
 \end{aligned} \tag{17}$$

де  $\alpha_3^{(n)}$  ( $n = \overline{1, N}$ ) – нові невідомі обмежені функції. Підставивши представлення (17) у рівняння (16), отримуємо інтегральні рівняння з полярними особливостями у точці джерела  $\mathbf{x}^{(n)}$  і кореневими особливостями на контурах областей ін-

тегрування  $S_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ). Тому перший етап регуляризації ГІР (16) передбачає інтерпретацію їхніх слабосингулярних інтегралів у сенсі

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_n} \frac{\alpha_3^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t) dS_{\mathbf{y}}}{\sqrt{a_n^2 - (y_1^{(n)})^2 - (y_2^{(n)})^2} |\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} = \\
 & = \pi^2 \alpha_3^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}, t) + \\
 & + \iint_{S_n^0} \frac{[\alpha_3^{(n)}(\mathbf{y}^{(n)}, t) - \alpha_3^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}, t)] dS_{\mathbf{y}}}{\sqrt{a_n^2 - (y_1^{(n)})^2 - (y_2^{(n)})^2} |\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|}, \\
 & \mathbf{x}^{(n)} \in S_n, \quad n = \overline{1, N},
 \end{aligned} \tag{18}$$

де використано точні значення [12]

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_n} \frac{dS_{\mathbf{y}}}{\sqrt{a_n^2 - (y_1^{(n)})^2 - (y_2^{(n)})^2} |\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{y}^{(n)}|} = \pi^2, \\
 & \mathbf{x}^{(n)} \in S, \quad n = \overline{1, N}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Наступний етап регуляризації базується на заміні змінних

$$\begin{aligned}
 x_1^{(n)} &= a_n \sin \xi_1^{(n)} \cos \xi_2^{(n)}, \\
 x_2^{(n)} &= a_n \sin \xi_1^{(n)} \sin \xi_2^{(n)}, \\
 y_1^{(n)} &= a_n \sin \eta_1^{(n)} \cos \eta_2^{(n)}, \\
 y_2^{(n)} &= a_n \sin \eta_1^{(n)} \sin \eta_2^{(n)}, \\
 n &= \overline{1, N},
 \end{aligned} \tag{20}$$

де  $\xi^{(n)}$  ( $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}$ ),  $\eta^{(n)}$  ( $\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}$ ) – нові змінні. Заміною (20) кругова область  $S_n$  розташування  $n$ -го включення відображається на прямокутну область

$$\tilde{S}_n : \{0 \leq \xi_1^{(n)}, \eta_1^{(n)} \leq \pi/2; 0 \leq \xi_2^{(n)}, \eta_2^{(n)} \leq 2\pi\}.$$

При цьому якобіаном перетворення усувається коренева особливість на контурі інтегрування по області  $\tilde{S}_n$ , коли  $\eta_1^{(n)} = \pi/2$ .

Застосувавши перетворення (18), (20) у рівняннях (16), отримуємо їхні регулярні аналоги. Разом з диференціальними рівняннями руху включення (15) вони формують таку систему  $4N$  рівнянь

антисиметричної задачі:

$$\begin{aligned}
 & f_n(\xi^{(n)}) \tilde{\alpha}_3^{(n)}(\xi^{(n)}, t) + \iint_{\tilde{S}_n^0} \frac{a_n \sin \eta_1^{(n)}}{w_{nn}(\xi^{(n)}, \eta^{(n)})} \times \\
 & \quad \times \mathbf{b}_1^{w_{nn}(\xi^{(n)}, \eta^{(n)})} [\tilde{\alpha}_3^{(n)}(\eta^{(n)}, t)] dS_\eta + \\
 & + \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{kn}) \iint_{\tilde{S}_k} \frac{a_k \sin \eta_1^{(k)}}{w_{kn}(\xi^{(n)}, \eta^{(k)})} \times \\
 & \quad \times \mathbf{b}_1^{w_{kn}(\xi^{(n)}, \eta^{(k)})} [\tilde{\alpha}_3^{(k)}(\eta^{(k)}, t)] dS_\eta - \\
 & - 4\pi G [U_3^{(n)}(t) + a_n \sin \xi_1^{(n)} \sin \xi_2^{(n)} \Omega_2^{(n)}(t) - \\
 & \quad - a_n \sin \xi_1^{(n)} \cos \xi_2^{(n)} \Omega_1^{(n)}(t)] = \\
 & = -4\pi G \tilde{u}_3^{\text{in}}(\xi^{(n)}, t), \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_n \iint_{\tilde{S}_n} \tilde{\alpha}_3^{(n)}(\eta^{(n)}, t) \sin \eta_1^{(n)} dS_\eta + \\
 & \quad + M_n \frac{d^2 U_3^{(n)}(t)}{dt^2} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\tilde{S}_n} \tilde{\alpha}_3^{(n)}(\eta^{(n)}, t) \sin^2 \eta_1^{(n)} \times \\
 & \quad \times (\delta_{j1} \sin \eta_2^{(n)} - \delta_{j2} \cos \eta_2^{(n)}) dS_\eta + \\
 & \quad + \frac{1}{4} M_n \frac{d^2 \Omega_j^{(n)}(t)}{dt^2} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\xi^{(n)} \in \tilde{S}_n, \quad j = 1, 2, \quad n = \overline{1, N}.$$

Тут враховані значення радіусів інерції включень  $r_1^{(n)} = r_2^{(n)} = a_n/2$  ( $n = \overline{1, N}$ ), де  $\tilde{S}_n^0$  – відображення області  $S_n^0$  внаслідок заміни (20) (в області  $\tilde{S}_n^0$  точки  $\xi^{(n)}$  і  $\eta^{(n)}$  не збігаються). Також введено позначення:

$$\tilde{\alpha}_3^{(n)}(\xi^{(n)}, t) = \alpha_3^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)}, t) \left| \begin{array}{l} x_1^{(n)} = a_n \sin \xi_1^{(n)} \cos \xi_2^{(n)}; \\ x_2^{(n)} = a_n \sin \xi_1^{(n)} \sin \xi_2^{(n)}, \end{array} \right.$$

$$\tilde{u}_3^{\text{in}}(\xi^{(n)}, t) = u_3^{\text{in}}(\mathbf{x}^{(n)}, t) \left| \begin{array}{l} x_1^{(n)} = a_n \sin \xi_1^{(n)} \cos \xi_2^{(n)}; \\ x_2^{(n)} = a_n \sin \xi_1^{(n)} \sin \xi_2^{(n)}, \end{array} \right.$$

$$f_n(\xi^{(n)}) = A \left[ \pi^2 - \iint_{\tilde{S}_n^0} \frac{a_n \sin \eta_1^{(n)}}{w_{nn}(\xi^{(n)}, \eta^{(n)})} dS_\eta \right],$$

$$w_{kn}(\xi^{(n)}, \eta^{(k)}) = |\mathbf{x}^{(kn)} - \mathbf{y}^{(k)}| \left| \begin{array}{l} x_1^{(kn)} = a_n \sin \xi_1^{(n)} \cos \xi_2^{(n)}, \\ y_1^{(k)} = a_k \sin \eta_1^{(k)} \cos \eta_2^{(k)}; \\ x_2^{(kn)} = a_n \sin \xi_1^{(n)} \sin \xi_2^{(n)}, \\ y_2^{(k)} = a_k \sin \eta_1^{(k)} \sin \eta_2^{(k)}, \end{array} \right.$$

Щоб дискретизувати рівняння (21), рівномірно розділимо кожну з областей  $\tilde{S}_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ) на  $Q$  прямокутних елементів  $\tilde{S}_{nq}$  ( $q = \overline{1, Q}$ ,  $\tilde{S}_n = \tilde{S}_{n1} \cup \tilde{S}_{n2} \dots \cup \tilde{S}_{nQ}$ ). Актуальний часовий інтервал  $[0, T]$  розділимо на  $K$  підінтервалів однакової тривалості  $\Delta t$ . Тоді  $t_r = r\Delta t$  означатиме час на  $r$ -му часовому кроці. Шукані функції  $\tilde{\alpha}_3^{(n)}$  апроксимуємо у просторі й часі так:

$$\tilde{\alpha}_3^{(n)}(\xi^{(n)}, t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{r=1}^K \tilde{\alpha}_{3qr}^{(n)} \theta_q^{(n)}(\xi^{(n)}) \vartheta_r(t), \quad (22)$$

$$n = \overline{1, N}.$$

Тут  $\tilde{\alpha}_{3qr}^{(n)}$  – значення функції  $\tilde{\alpha}_3^{(n)}$  у точці  $\xi_q^{(n)}(\xi_{1q}^{(n)}, \xi_{2q}^{(n)})$  посередині  $q$ -го елемента  $\tilde{S}_{nq}$  у момент часу  $t_r = r\Delta t$ ;  $\theta_q^{(n)}$  і  $\vartheta_r$  – задані інтерполюючі функції, які задовольняють умови  $\theta_q^{(n)}(\xi_i^{(n)}) = \delta_{qi}$ ,  $\vartheta_r(t_j) = \delta_{rj}$ . Решта невідомих функцій, тобто  $U_3^{(n)}$ ,  $\Omega_j^{(n)}$  ( $j = 1, 2$ ,  $n = \overline{1, N}$ ), залежать виключно від часової координати. Нехай  $U_{3r}^{(n)}$ ,  $\Omega_{jr}^{(n)}$  – значення цих функцій у момент часу  $t_r$ . З урахуванням цих позначень різницева схема апроксимації прискорень матиме вигляд

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^2 U_3^{(n)}}{dt^2} \right|_{t=t_r} &= \frac{U_{3r}^{(n)} - 2U_{3(r-1)}^{(n)} + U_{3(r-2)}^{(n)}}{(\Delta t)^2}, \\
 \left. \frac{d^2 \Omega_j^{(n)}}{dt^2} \right|_{t=t_r} &= \frac{\Omega_{jr}^{(n)} - 2\Omega_{j(r-1)}^{(n)} + \Omega_{j(r-2)}^{(n)}}{(\Delta t)^2},
 \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \quad n = \overline{1, N}. \quad (23)$$

Підставивши співвідношення (22), (23) у рівняння (21) й задовольнивши їх колокаційно у точках

$\xi_q^{(n)}$  ( $q = \overline{1, Q}$ ,  $n = \overline{1, N}$ ) на кожному часовому кроці, прийдемо до рекурентної за часовим індексом  $r$  системи  $N(Q+3)$  лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^Q \left[ h_{qirr}^{(n)} \tilde{\alpha}_{3ir}^{(n)} + \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{kn}) b_{qirr}^{(kn)} \tilde{\alpha}_{3ir}^{(k)} \right] - \\ & - 4\pi G [U_{3r}^{(n)} + a_n \sin \xi_{1q} \sin \xi_{2q} \Omega_{1r}^{(n)} - \\ & - a_n \sin \xi_{1q} \cos \xi_{2q} \Omega_{2r}^{(n)}] = -4\pi G \tilde{u}_3^{\text{in}}(\xi_q^{(n)}, t_r) - \\ & - \sum_{i=1}^Q \sum_{l=1}^{r-1} \left[ h_{qirl}^{(n)} \tilde{\alpha}_{3il}^{(n)} + \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{kn}) b_{qirl}^{(kn)} \tilde{\alpha}_{3il}^{(k)} \right], \\ & \sum_{i=1}^Q c_i^{(n)} \tilde{\alpha}_{3ir}^{(n)} + \frac{M_n}{a_n (\Delta t)^2} U_{3r}^{(n)} = \\ & = \frac{M_n}{a_n (\Delta t)^2} (2U_{3(r-1)}^{(n)} - U_{3(r-2)}^{(n)}), \\ & \sum_{i=1}^Q c_{ji}^{(n)} \tilde{\alpha}_{3ir}^{(n)} + \frac{M_n}{4(\Delta t)^2} \Omega_{jr}^{(n)} = \\ & = \frac{M_n}{4(\Delta t)^2} (2\Omega_{j(r-1)}^{(n)} - \Omega_{j(r-2)}^{(n)}), \end{aligned} \quad (24)$$

$$j = 1, 2, \quad q = \overline{1, Q}, \quad n = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, K}.$$

Тут коефіцієнти  $h_{qirl}^{(n)}$ ,  $b_{qirl}^{(kn)}$ ,  $c_i^{(n)}$ ,  $c_{ji}^{(n)}$  задані так:

$$\begin{aligned} h_{qirl}^{(n)} &= f_3(\xi_q^{(n)}) \delta_{qi} \delta_{rl} + \\ & + a_n \iint_{\tilde{S}_{nq}^0} \frac{\sin \eta_1^{(n)}}{w_{nn}(\xi_q^{(n)}, \eta^{(n)})} \theta_i^{(n)}(\eta^{(n)}) \times \\ & \times \left\{ \mathbf{b}_1^{w_{nn}(\xi_q^{(n)}, \eta^{(n)})} [\vartheta_l(t)] \right\} \Big|_{t=t_r} dS_\eta, \\ b_{qirl}^{(kn)} &= a_k \iint_{\tilde{S}_k} \frac{\sin \eta_1^{(k)}}{w_{kn}(\xi_q^{(n)}, \eta^{(k)})} \theta_i^{(k)}(\eta^{(k)}) \times \\ & \times \left\{ \mathbf{b}_1^{w_{kn}(\xi_q^{(n)}, \eta^{(k)})} [\vartheta_l(t)] \right\} \Big|_{t=t_r} dS_\eta, \\ c_i^{(n)} &= \iint_{\tilde{S}_n} \theta_i^{(n)}(\eta^{(n)}) \sin \eta_1^{(n)} dS_\eta, \\ c_{ji}^{(n)} &= \iint_{\tilde{S}_n} \theta_i^{(n)}(\eta^{(n)}) \sin^2 \eta_1^{(n)} \times \\ & \times (\delta_{1j} \sin \eta_2^{(n)} - \delta_{2j} \cos \eta_2^{(n)}) dS_\eta. \end{aligned} \quad (25)$$

У співвідношеннях (25) двозв'язні області інтегрування  $\tilde{S}_{nq}^0$  визначаються як  $\tilde{S}_{nq}^0 = \tilde{S}_n \setminus \tilde{S}_{nq}$  ( $n = \overline{1, N}$ ,

$q = \overline{1, Q}$ ).

Покроково нарощуючи час і розв'язуючи на кожному кроці систему рівнянь (24) з урахуванням нульових початкових умов на першому кроці, отримуємо часові залежності функцій  $\tilde{\alpha}_3^{(n)}$  ( $n = \overline{1, N}$ ) у вузлових точках областей  $\tilde{S}_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ), а також функцій  $U_3^{(n)}$ ,  $\Omega_1^{(n)}$ ,  $\Omega_2^{(n)}$  ( $n = \overline{1, N}$ ). Важливо, що обсяг обчислень стабілізується з моменту  $t > D/c_2$ , де  $D$  – відстань між найбільш віддаленими точками на розглянутій множині включень, адже з причинних співвідношень в операторі  $\mathbf{b}_1^{w_{kn}}(\xi_q^{(n)}, \boldsymbol{\eta}^{(k)})$  випливає, що  $h_{qirl}^{(n)} = 0$ ,  $b_{qirl}^{(kn)} = 0$  для  $t_r - D/c_2 \geq t_{l+1}$ . Далі запропонований алгоритм реалізуємо за допомогою кусково-сталого просторової та лінійної часової апроксимації шуканих величин:

$$\begin{aligned} \theta_q^{(n)}(\xi^{(n)}) &= \begin{cases} 1, & \xi^{(n)} \in \tilde{S}_{nq}; \\ 0, & \xi^{(n)} \notin \tilde{S}_{nq}, \end{cases} \quad n = 1, N, \\ \vartheta_r(t) &= \begin{cases} 1 - \frac{|t - r\Delta t|}{\Delta t}, & |t - r\Delta t| \leq \Delta t; \\ 0, & |t - r\Delta t| > \Delta t. \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

Окрім описаних вище параметрів, важливими характеристиками напружень в околі включень є коефіцієнти їхньої інтенсивності [13]. Зокрема, у випадку антисиметричної задачі коефіцієнт інтенсивності динамічних напружень (КІДН) поперечного зсуву  $K_2^{(n)}$  для  $n$ -го включення пов'язаний із розв'язком ГІР (21) формулою

$$\begin{aligned} K_2^{(n)}(\varphi^{(n)}, t) &= -\frac{1}{4(1-\nu)\sqrt{a_n}} \times \\ & \times \tilde{\alpha}_3^{(n)}(\xi^{(n)}, t) \Big|_{\substack{\xi_1^{(n)} = \pi/2; \\ \xi_2^{(n)} = \varphi^{(n)}}} \end{aligned} \quad (27)$$

де  $\varphi^{(n)}$  – кутова координата точки контура  $n$ -го включення.

### 3. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Як приклад розглянемо антисиметричну задачу нестационарної взаємодії у пружній матриці двох кругових жорстких включень однакового радіуса  $a_1 = a_2 = a$  та маси  $M_1 = M_2 = 20\rho a^3$ , розташованих в одній площині  $x_3^{(1)} = x_3^{(2)} = x_3 = 0$  на відстані  $d$  між центрами по лінії однаково спрямованих осей  $O^{(2)}x_1^{(2)}$  і  $O^{(2)}x_1^{(2)}$ . Нестационарне збурення викликається плоскою поздовжньою пружною хвилею з



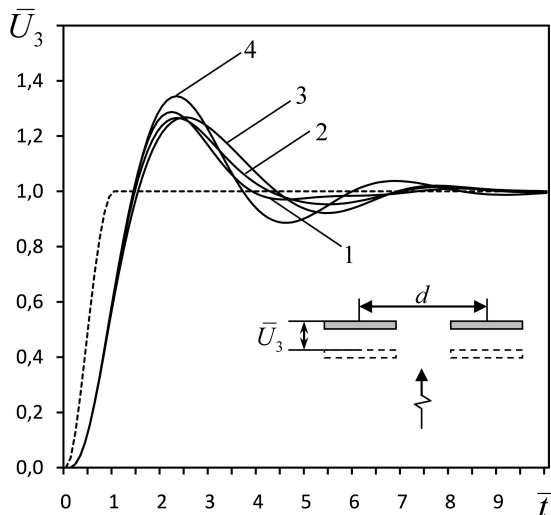


Рис. 2. Залежності відносних поступальних переміщень включень від безрозмірного часу для різних відстаней між взаємодіючими об'єктами:

1 -  $d = 2.2a$ ; 2 -  $d = 2.8a$ ; 3 -  $d = 3.4a$ ;  
4 -  $d = \infty$  (поодинокі включення);

штрихова – відносні переміщення у падаючій на включення хвилі

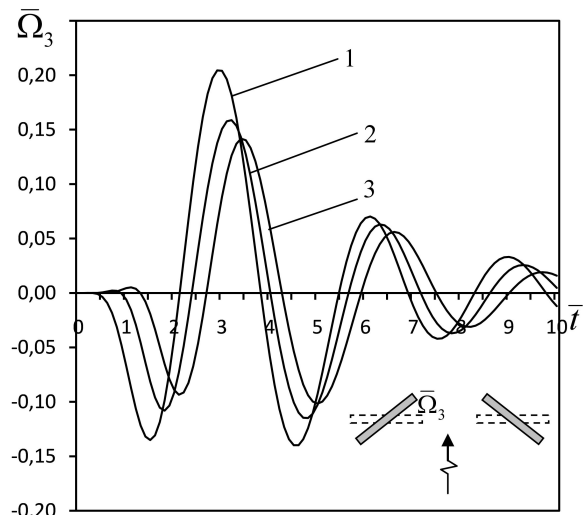


Рис. 3. Залежності відносних кутів поворотів включень від безрозмірного часу для різних відстаней між взаємодіючими об'єктами:

1 -  $d = 2.2a$ ; 2 -  $d = 2.8a$ ; 3 -  $d = 3.4a$ ;  
4 -  $d = \infty$  (поодинокі включення)

перпендикулярним до включень напрямком падіння, однаковим часом  $t=0$  набігу на включення й таким розподілом у ній переміщень:

$$\frac{u_3^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)}{U} = \begin{cases} \frac{(c_1 t - x_3)^2 (c_1 t - x_3 - 2c_1 t_*)^2}{(c_1 t_*)^4}, & c_1 t - x_3 \leq c_1 t_*; \\ 1, & c_1 t - x_3 > c_1 t_*. \end{cases} \quad (28)$$

Тут  $t_* = 2a/c_2$  – час виходу хвилі на стаціонарний режим зі сталим переміщенням  $U = \text{const}$ . При збуренні (28) обидва включення перебувають в однакових умовах, звідки природно випливає  $U_3^{(1)} = U_3^{(2)}$ ,  $\Omega_1^{(1)} = \Omega_1^{(2)} = 0$ ,  $\Omega_2^{(1)} = -\Omega_2^{(2)}$ ,  $K_2^{(1)}(\varphi^{(1)}, t) = K_2^{(2)}(\pi - \varphi^{(2)}, t)$ .

В алгоритмі дискретизації ГР (24), (25) використовувались розбиття кожної з областей  $\tilde{S}_1$  і  $\tilde{S}_2$  на 264 прямокутні елементи з довжинами сторін  $\pi/22$  та  $\pi/12$ , часовий приріст вибирали як  $\Delta t = 0.2a/c_2$ , коефіцієнт Пуассона матричного матеріалу прирівнювали до 0.3.

Для узагальненого аналізу розраховували відносні величини – поступальні переміщення включень  $\bar{U} = U_3^{(1)}/U$ , їхні повороти  $\bar{\Omega} = \Omega_2^{(1)}/U$  й КІДН поперечного зсуву  $\bar{K} = 4(1 - \nu)\sqrt{a}K_2^{(1)}/(GU)$  у найближчій до сусіднього включення точці контуру як функції безрозмірного часу  $\bar{t} = t/t_*$ . Для виявлення

ефектів динамічної взаємодії включень додатково наводились результати для поодинокого розсіювача такої ж хвилі.

Характерною ознакою часових залежностей поступальних переміщень (рис. 2), кутів поворотів (рис. 3) та КІДН (рис. 4) системи включень є осциляція цих величин (для кутів поворотів та КІДН спостерігається також зміна знаку) зі загасанням піків осциляцій та наближенням до тривіальних статичних значень  $\bar{U} = 1$ ,  $\bar{\Omega} = 0$ ,  $\bar{K} = 0$  з плином часу. На початковому часовому інтервалі (до приходу поздовжньої пружної хвилі від сусіднього включення) криві для поодинокого розсіювача й системи розсіювачів збігаються, що узгоджується з умовами причинності. У подальшому пікові поступальні переміщення взаємодіючих включень виявляються меншими, у порівнянні з випадком поодинокого включення. Це ж стосується КІДН, за виключенням першого від'ємного піку для більш віддалених включень. Зі зменшенням відстані між включеннями пікові значення кутів їх поворотів зростають. Така кінетика включень (підвищення “ступеня свободи” їх руху) сприяє розтягуванню часового інтервалу між піками КІДН, а відтак плавнішій поведінці КІДН у часі.

## ВИСНОВКИ

1. Гранично-інтегральне формулювання тривимірних задач поширення нестационарних

пружних хвиль у матриці з системою жорстких дискових включень у часовій області ґрунтується на принципі суперпозиції, коли інтегральні представлення загальних переміщень утворюються складовими, які відповідають розсіянню пружних хвиль на кожному окремому наповнювачі. Так, отримано ГІР з полярними ядрами хвильового потенціалу відносно переданих на включення зусиль як функцій часу, де у ролі вільних членів входять також нестационарні поступальні переміщення й повороти включень. Замкнутість системи рівнянь досягається приєднанням до неї рівнянь руху включень як жорстких цілих. В основі покрокового за часом розв'язання задач лежить рекурентність дискретних аналогів ГІР, яка є результатом запізнення у часовому аргументі шуканих функцій. З обмеженості цього запізнення часом пробігу поперечною пружною хвилею відстані між найбільш віддаленими точками на розглянутому конгломераті включень впливає стабілізація тривалості обчислень вказаним методом із просуванням углиб часової координати.

2. За допомогою числового аналізу виявлено ефект демпфірування нестационарних коливань компланарних дискових включень при падінні плоскої пружної поздовжньої хвилі внаслідок їхнього сусідства. Урахування нестационарної взаємодії близько розташованих включень призводить також до більш монотонного характеру часової залежності й зменшення піків КІДН в околі включень. Отже, за рахунок наповнення матриці більшою кількістю жорстких дискових включень можна досягти зменшення динамічної деформативності структури без втрати міцнісних властивостей.

## ПОДЯКИ

Роботу виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект Ф40.1/018).

1. Рао У.-Н., Мов С. С. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations.– New York: Crane and Russak, 1973.– 365 p.
2. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г., Яковлев В. В. Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах.– К.: Наук. думка, 1985.– 136 с.
3. Михаськів В. В., Кунець Я. І., Міщенко В. О. Напруження у тривимірному тілі з тонким податливим включенням за фронтом імпульсних хвиль // Фіз.-хім. мех. матер.– 2003.– 39, № 3.– С. 63–68.

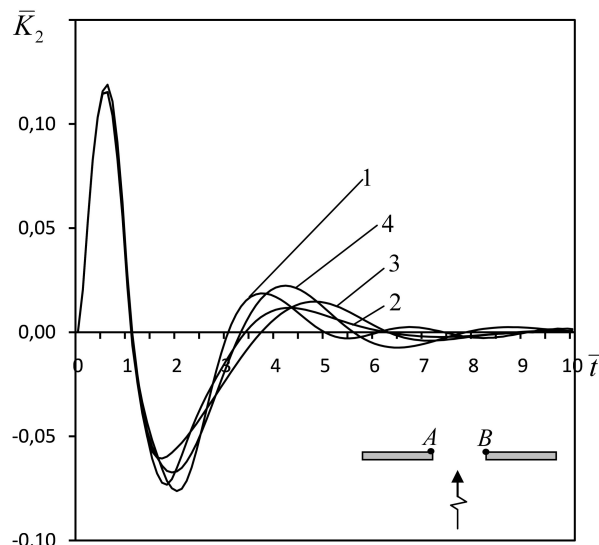


Рис. 4. Залежності відносних коефіцієнтів інтенсивності напружень поперечного зсуву в околі точок А і В контурів включень від безрозмірного часу для різних відстаней між взаємодіючими об'єктами:

- 1 –  $d = 2.2a$ ; 2 –  $d = 2.8a$ ; 3 –  $d = 3.4a$ ;  
4 –  $d = \infty$  (поодинокі включення)

4. Wang J., Michelitsch T. M., Gao H., Levin V. M. On the solution of the dynamic Eshelby problem for inclusions of various shapes // Int. J. Solids Struct.– 2005.– 42, № 2.– P. 353–363.
5. Mykhas'kiv V. V. Transient response of a plane rigid inclusion to an incident wave in an elastic solid // Wave Motion.– 2005.– 41, № 2.– P. 133–144.
6. Chang R. C. The time-dependent interaction between inclusions and a cracked matrix subjected to anti-plane shear // Acta Mechanica.– 2004.– 173, № 1-4.– P. 163–179.
7. Lei J., Wang Y.-S., Gross D. Analysis of dynamic interaction between an inclusion and a nearby moving crack by BIEM // Eng. Anal. Bound. Elem.– 2005.– 29, № 8.– P. 802–813.
8. Lei J., Zhang Ch., Yang Q., Wang Y.-S. Dynamic effects of inclusions and microcracks on a main crack // Int. J. Fract.– 2010.– 164, № 2.– P. 271–283.
9. Hirose S. Boundary integral equation method for transient analysis of 3-D cavities and inclusions // Eng. Anal. Bound. Elem.– 1991.– 8, № 3.– P. 146–154.
10. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids.– Amsterdam: North-Holland Co., 1973.– 425 p.
11. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики (часть I).– М.: Высш. школа, 1984.– 343 с.
12. Хай М. В. Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения.– К.: Наук. думка, 1993.– 256 с.
13. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями.– Львів: Досл.-видав. центр НТШ, 2007.– 716 с.