

УДК 517.938

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО ДАННЫМ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

Т. С. КРАСНОПОЛЬСКАЯ, Е. Д. ПЕЧУК

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 08.12.2010*

Проведено сравнение двух основных методов построения эволюционных уравнений (реконструкции) динамических систем по выходному сигналу – метода последовательного дифференцирования и метода задержки. Впервые для определения времени оптимальной задержки во втором методе использован линейный участок зависимости дивергенции реконструированной системы от параметра задержки. В качестве конкретного примера представлена реконструкция динамической системы, описывающей колебания плоского физического маятника, по ее выходным сигналам. Полученные результаты показывают, что указанными методами позволяют воссоздавать регулярные и хаотические режимы движения маятника при учете в правых реконструированных частях систем нелинейностей до шестого порядка включительно. В данном исследовании использовались спектральные методы, построение фазовых портретов и показатели Ляпунова.

Проведене порівняння двох основних методів побудови еволюційних рівнянь (реконструкції) динамічних систем за вихідним сигналом – методу послідовного диференціювання й методу затримки. Уперше для знаходження часу оптимальної затримки у другому методі використано лінійну ділянку залежності дивергенції реконструйованої системи від параметра затримки. Як конкретний приклад представлено реконструкцію динамічної системи, яка описує коливання плоского фізичного маятника, за її вихідними сигналами. Одержані результати свідчать про те, що вказані методи дозволяють відтворювати регулярні й хаотичні режими руху маятника при урахуванні в правих частинах реконструйованих систем нелінійностей до шостого порядку включно. У цьому дослідженні використовувались спектральні методи, побудова фазових портретів і показники Ляпунова.

The paper deals with comparing of two main methods for deriving (reconstruction) of the evolution equations of the dynamic systems from their output signals. These are the method of successive differentiation and the delay method. For the first time, the linear interval of dependence of the divergence of reconstructed system versus the delay parameter has been used to determine the optimal value of the delay. The reconstruction of the dynamic system describing the planar physical pendulum oscillation after its output signal has been presented as an example. The obtained results are the evidence of the possibility to reconstitute the regular and chaotic motions of the pendulum with the allowance for the nonlinearities up to the six order inclusively in the right-hand sides of equations of the reconstructed systems. The spectral techniques, phase portrait mapping and Lyapunov exponents were used in this study.

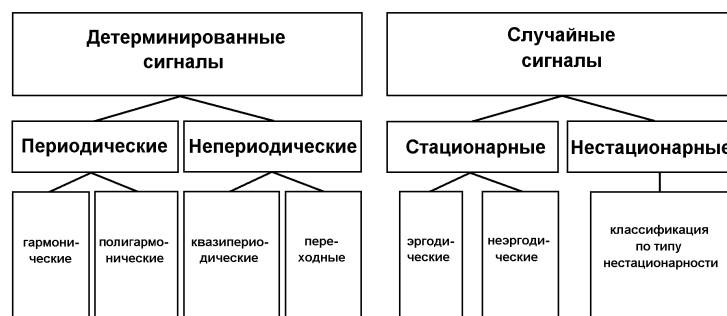
### ВВЕДЕНИЕ

Изучение сложных временных зависимостей сигналов различной природы представляет собой важную задачу современного естествознания [1–3]. Особенно велико ее значение в тех случаях, когда понять динамику физического явления и спрогнозировать его эволюцию во времени возможно лишь путем изучения закономерностей изменения ее регистрируемых выходных сигналов. Например, анализ работы сердца человека проводится на основе исследования электрокардиограмм, движения объектов в астрофизике – по сигналам излучения из космоса, а акустических феноменов – по волновым полям движущихся тел [1, 4]. Получаемые при этом сигналы могут быть довольно сложными.

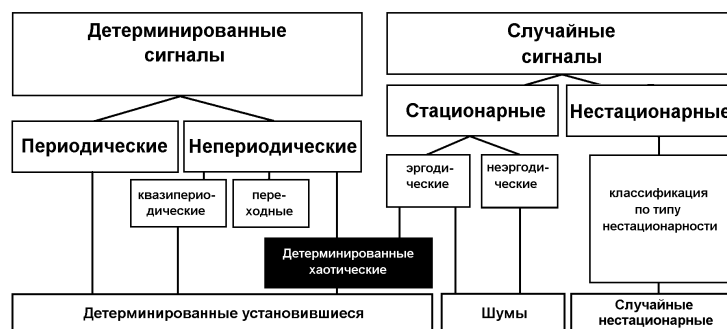
Отображенное на рис. 1, а [2] традиционное деление откликов систем на детерминированные и случайные за последние несколько десятилетий претерпело ряд принципиальных изменений. Прежде всего, это касается детерминированных непериодических сигналов и связано с открытием де-

терминированных хаотических сигналов – выходных временных реализаций детерминированных хаотических установившихся режимов [5–9].

Согласно современным представлениям теории динамических систем, детерминированные хаотические сигналы – это решения детерминированных нелинейных эволюционных уравнений (или дискретных отображений), которые строго определены во времени (с заданной точностью численной реализации при конкретных начальных условиях). Они не могут быть представлены аналитически как функции времени и в силу локальной неустойчивости имеют существенно различные количественные значения при малой вариации начальных условий. Детерминированные хаотические сигналы являются эргодическими, характеризуются положительностью своего старшего показателя Ляпунова [10] и внешне могут восприниматься как случайные стационарные эргодические сигналы. Поэтому, согласно современной классификации, в класс стационарных эргодических случайных сигналов включают и сигналы хаотические, по сути безусловно относящиеся к де-



а



б

Рис. 1. Классификация выходных сигналов:

а – традиционная, б – с учетом явления детерминированного хаоса

терминированным непериодическим (рис. 1, б).

Данная работа посвящена апробации и дальнейшей разработке двух методов построения эволюционных уравнений (а значит, и динамической системы) по временной реализации выходного сигнала [5, 6, 11, 12]. Следовательно, наша цель состоит в нахождении детерминированных систем, решения которых представляют собой детерминированные периодические, квазипериодические и хаотические установившиеся процессы.

Как уже было отмечено, формулировка задачи построения математической модели эволюционных уравнений по исходному сигналу в последние десятилетия изменилась. Действительно, даже корректная математическая модель не может воспроизвести точно хаотическое поведение исследуемого процесса. Рассматривая теоретическое его прогнозирование, всегда следует иметь в виду существование неудаляемой погрешности в долгосрочном прогнозе. Тем не менее, задачу восстановления математической модели можно считать решаемой правильно, если разработаны критерии согласования исходного сигнала с сигналом, являющимся решением построенной математиче-

ской системы. Модель хаотического процесса считается “правильной”, если размерность, геометрия, частотный спектр и экспоненциальные показатели Ляпунова ее аттрактора хорошо согласуются с аттрактором, представленным исходными данными [5, 6, 11–13].

Излагаемый в данной работе подход к решению задачи построения математической модели по выходному сигналу основывается на базовых концепциях современной теории динамических систем [5–9, 14]:

- рассматриваются существенно нелинейные процессы и соответствующие им сигналы (скажем, хаотические);
- используются так называемые фазовые координаты [15, 16];
- определяются такие количественные меры неустойчивого и устойчивого поведения координат, как экспоненциальные показатели Ляпунова.

Кроме того, при решении анализируются спектры мощности изучаемых сигналов. Поэтому мы счи-

таем, что построенная динамическая система эволюционных уравнений, описывающих изменение переменных (т. е. фазовых координат) во времени, является “правильной”, если выполняются следующие критерии согласования ее решения с заданным выходным сигналом:

- 1) траектории решений смоделированной системы и исходного сигнала принадлежат фазовым пространствам одинаковой размерности;
- 2) исходная и смоделированная динамика принадлежат к одному классу установившихся режимов – регулярному либо хаотическому (что определяется по сигнатуре спектра показателя Ляпунова [5, 6, 8]);
- 3) исходный сигнал и решение смоделированной системы имеют статистически подобные спектры мощности;
- 4) почти все траектории восстановленной динамической системы, соответствующие выбранным начальным условиям, лежат на многообразии (аттракторе), топологически эквивалентном исходному;
- 5) восстановленная система должна быть неконсервативной как описывающая динамику реальных объектов.

В этой статье сравниваются два наиболее известных метода реконструкции эволюционных уравнений по одномерному временному ряду – решению конкретно выбранной динамической системы третьего порядка. Поэтому решение для моделируемого объекта будет сравниваться с решениями построенных динамических систем, которые также имеют третий порядок (т. е. соответствуют критерию 1). Остальные четыре критерия будут использоваться при сравнении методов реконструкции.

## 1. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Пусть в результате эксперимента получена зависимость наблюдаемой переменной  $a = a(t)$  от времени, заданная на конечном промежутке времени  $t_0$  с шагом (дискретизацией)  $\Delta t$ :

$$a(i\Delta t) = a_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad N = [t_0/\Delta t].$$

Предположим, что  $a(t)$  – одномерная проекция фазовой траектории, порождаемой некоторой динамической системой. Цель задачи восстановления динамической системы состоит в построении

системы эволюционных уравнений, решение которой с достаточной степенью точности совпадает с  $a(t)$ . Таким образом, проблема реконструкции относится к классу обратных задач и может иметь неоднозначное решение.

В общем случае неизвестно какой порядок имеет реальная система, давшая на выходе сигнал  $a(t)$ . В рамках этой работы мы не будем останавливаться на вопросе определения порядка реконструированной системы по одной координате, задавшись восстановлением эволюционных уравнений по сигналу исходной динамической системы известного (для конкретности, третьего) порядка. Обозначим координаты состояния реконструированной системы через

$$(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}(t).$$

Существуют два наиболее известных метода реконструкции [5, 6, 11, 13]. Идея первого из них – метода последовательного дифференцирования – заключается в том, что недостающие координаты системы задаются следующим образом:

$$\vec{x}(t) = (x_1, x_2, x_3) = \left( a(t), \frac{da(t)}{dt}, \frac{d^2a(t)}{dt^2} \right). \quad (1)$$

На практике, в результате эксперимента, имеются значения  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , поэтому координаты вектора  $\vec{x}(t)$  определяются путем численного дифференцирования, что существенно снижает точность и универсальность данного метода. В общем случае математическая модель записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= F(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $F(x_1, x_2, x_3)$  – нелинейная функция. Для получения конкретного вида системы (2) функция  $F$  представляется в виде разложения по некоторому базису функций, используя конечное число его членов, зависящее от необходимой точности аппроксимации. В данной работе в качестве бази-

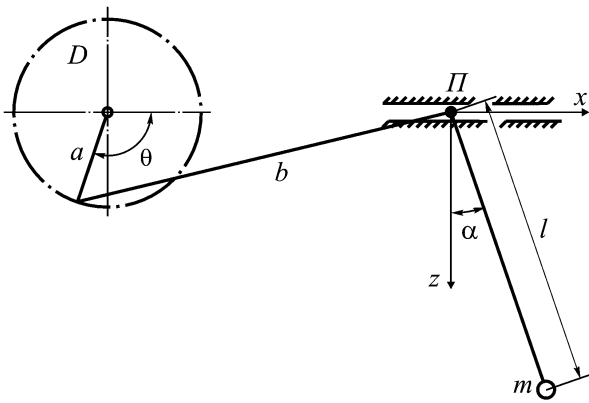


Рис. 2. Схема рассматриваемой системы

сных функций взяты полиномы вида

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2, x_3) = & c_0 + \sum_{i=1}^3 c_i x_i + \\
 & + \sum_{i,j=1}^3 c_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j,k=1}^3 c_{ijk} x_i x_j x_k + \\
 & + \sum_{i,j,k,m=1}^3 c_{ijkm} x_i x_j x_k x_m + \\
 & + \sum_{i,j,k,m,n=1}^3 c_{ijkmn} x_i x_j x_k x_m x_n + \\
 & + \sum_{i,j,k,m,n,o=1}^3 c_{ijkmno} x_i x_j x_k x_m x_n x_o,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где  $c_0, \dots, c_{ijkmno}$  – неизвестные коэффициенты.

Так как все координаты вектора  $\vec{x}(t)$  известны, то для каждого  $a_i, i=1, \dots, N$ , система (2) представляет собой линейное уравнение относительно неизвестных коэффициентов  $c_0, \dots, c_{ijkmno}$ . Поэтому для нахождения конкретного вида математической модели необходимо решить систему  $N$  линейных алгебраических уравнений с количеством неизвестных, равным количеству неизвестных коэффициентов в разложении функции  $F$ . Как правило, оно значительно меньше  $N$ , и соответствующая система решается методом наименьших квадратов.

Второй метод реконструкции называется методом задержки, при его применении недостающие пространственные переменные строятся с помощью выбора некоторого фиксированного временного промежутка  $\tau$ :

$$\vec{x}(t) = (x_1, x_2, x_3) = (a(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau)). \tag{4}$$

Соответствующая математическая модель восста-

навливается в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, x_3), \\
 \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, x_3), \\
 \frac{dx_3}{dt} &= F_3(x_1, x_2, x_3),
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $F_i(x_1, x_2, x_3)$  – нелинейные функции. Если взять в качестве  $F_i$  полиномы вида (3), то для каждого  $a_i, i=1, \dots, N$ , система (5) будет представлять собой три линейных уравнения с неизвестными коэффициентами  $c_0, \dots, c_{ijkmno}$ . Для построения конкретной математической модели необходимо получить решение трех систем, состоящих из  $N$  линейных алгебраических уравнений, аналогичных соответствующей системе в методе последовательного дифференцирования.

Основная сложность этого метода реконструкции заключается в выборе времени задержки  $\tau$ . Например, его можно отождествить с моментом достижения первого нуля автокорреляционной функции, построенной по сигналу  $a(t)$  [5]. Однако при таком выборе задержки в некоторых случаях наблюдается нарушение диссипативности реконструированной системы. Учитывая то, что реальные системы неконсервативны и, следовательно, их дивергенция отрицательна, время задержки  $\tau$  нужно выбирать в том промежутке, где дивергенция реконструированной системы в установившемся режиме также отрицательна.

## 2. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ПЛОСКОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

В качестве примера, на котором будет тестироваться применение методов восстановления динамической системы, выберем плоский физический маятник при ограниченном возбуждении [8]. Заметим, что маятниковые системы применяются для предварительного анализа динамики более сложных колебательных систем (таких как кольца, оболочки, пластины, различные среды в сферических и цилиндрических полостях).

Схема рассматриваемой системы изображена на рис. 2. Вывод соответствующей математической модели подробно описан в [8]. Система состоит из электродвигателя  $D$ , кривошипно-шатунного механизма, который через шатун  $b$  соединен с подвесом физического маятника массы  $m$ , длины  $l$ . При перемещении кривошипа  $a$  на угол  $\Theta$  ползун совместно с подвесом маятника получает пе-

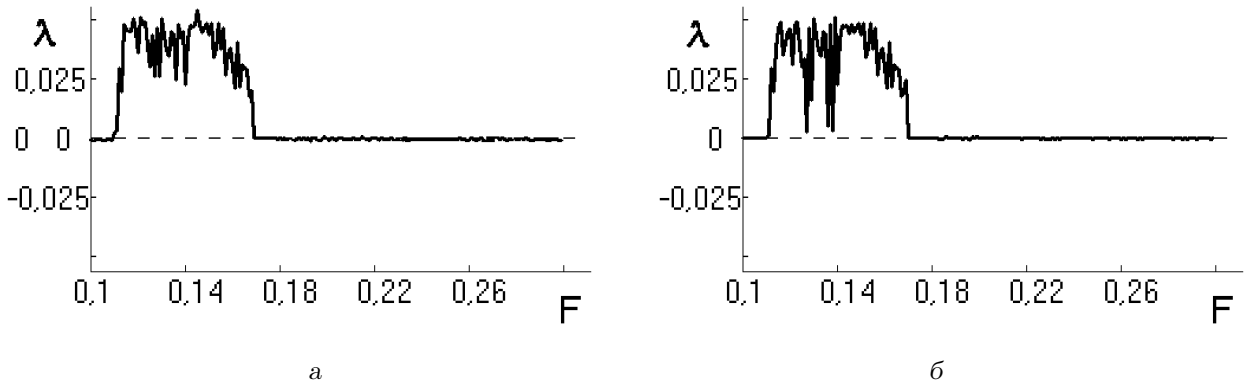


Рис. 3. Зависимость старшего показателя Ляпунова системы (6) от параметра  $F$ :  
 а – вычисление по методу Бенеттина; б – вычисление по выходным сигналам

ремещение вида  $u = a[\cos \Theta + 0.25a_1(1 + \cos 2\Theta)]$ , где  $a_1 = a/b \ll 1$ .

После построения уравнений Лагранжа вводится малый параметр  $\epsilon = a/l$  и предполагается, что реализуются условия резонансного взаимодействия возбудителя и маятника, когда скорость  $\dot{\Theta}$  близка собственной частоте маятника  $\omega_0$ :

$$\dot{\Theta}(t) = \omega_0 + \frac{1}{2} \epsilon^{2/3} \omega_0 y_3(t),$$

где  $y_3(t)$  – безразмерный параметр расстройки частот;  $t = 0.5 \epsilon^{2/3} \Theta$  – медленное время. Нелинейные колебания маятника отыскиваются в виде:

$$\alpha(t) = \epsilon^{1/3} [y_1(t) \cos \Theta + y_2(t) \sin \Theta].$$

После проведения процедуры усреднения по быстрому времени  $\Theta$  и переходя к производным по медленному времени, получаем следующую нелинейную динамическую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\eta y_1 - y_2 y_3 - \frac{1}{8} (y_1^2 y_2 + y_2^3), \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\eta y_2 + y_1 y_3 + \frac{1}{8} (y_1^3 + y_1 y_2^2) + 1, \\ \frac{dy_3}{dt} &= D y_2 + E y_3 + F, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\eta = \delta \epsilon^{-2/3} \omega_0^{-1}$ ;  $\delta$  – коэффициент демпфирования силы сопротивления среды, в которой движется маятник;  $F = 2l^{2/3}/a^{2/3}(N_0/\omega_0 + E)$ ;  $D = -2ml^2/I$ ;  $I$  – момент инерции ротора электродвигателя;  $N_0$  и  $E < 0$  – постоянные, полученные при аппроксимации статической характеристики двигателя линейной функцией вида  $M(\Omega) = N_0 + E\Omega$ .

Система (6) содержит управляющие параметры  $\eta, D, E, F$ , изменение которых влечет за собой изменение реализующегося в системе динамического режима. Для получения конкретных выходных сигналов задавались следующие их значения:  $\eta = 0.1, D = -0.5, E = -0.61$ . Бифуркационный параметр  $F$  изменялся на сегменте  $0.1 \leq F \leq 0.3$  с шагом 0.001.

Полученные системы дифференциальных уравнений решались численно методом Рунге–Кутты пятого порядка с использованием корректирующей процедуры Дормана–Принса, обеспечивающей точность вычислений до величин порядка  $O(10^{-7})$ . Сигналы снимались с первой координаты решения в установившемся режиме для  $N = 2^{18}$  отсчетов с интервалом  $\Delta t = 0.004$ . В результате получен массив из 200 сигналов, каждому из которых соответствует определенное значение  $F$  из выбранного отрезка.

Зависимость вычисленного по методу Бенеттина [17] старшего показателя Ляпунова системы (6) от величины бифуркационного параметра  $F$  изображена на рис. 3, а. Использовался также другой алгоритм вычисления старшего показателя Ляпунова – по временной реализации выходного сигнала системы, т. е. по имеющемуся решению [6]. Эти результаты представлены на рис. 3, б. Из графиков видно, что в интервале  $0.114 \leq F \leq 0.167$  старший показатель Ляпунова, вычисленный с помощью обоих методов, положителен. Учитывая, что положительность старшего показателя Ляпунова является основным практическим критерием наличия у решения хаотического аттрактора, заключаем, что при  $0.114 \leq F \leq 0.167$  в системе существуют хаотические режимы. Вне этого интервала реализуется регулярный динамический режим.

Двумерные проекции фазового портрета реше-

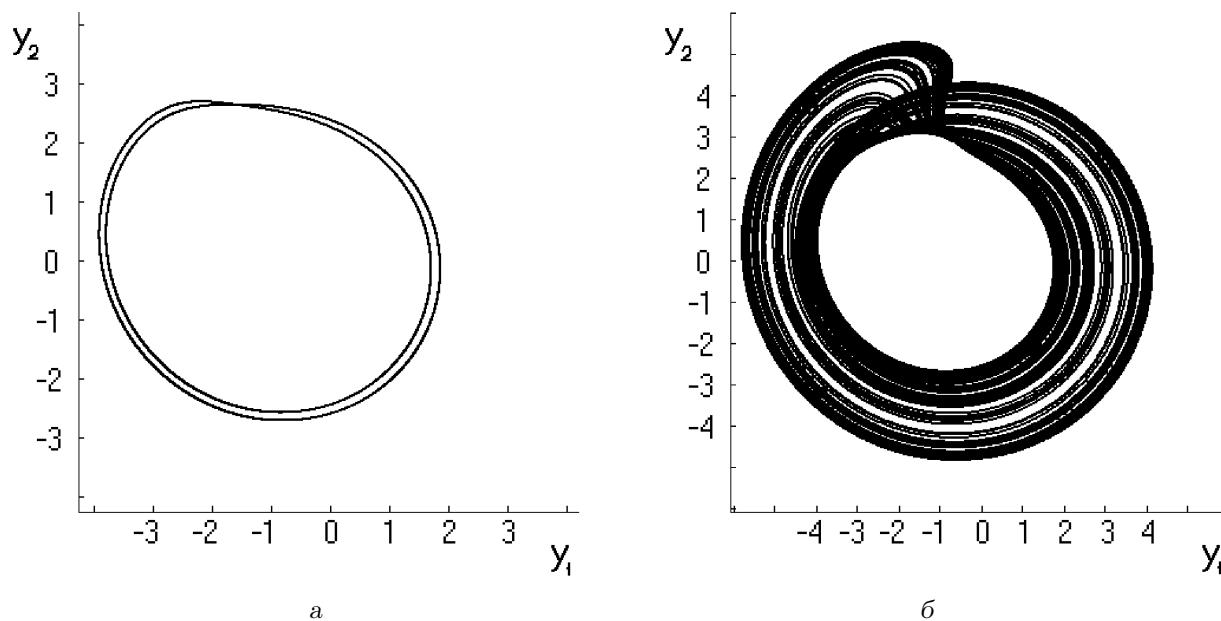


Рис. 4. Проекції фазового портрета системи (6):  
 а – при  $F=0.257$ ; б – при  $F=0.114$

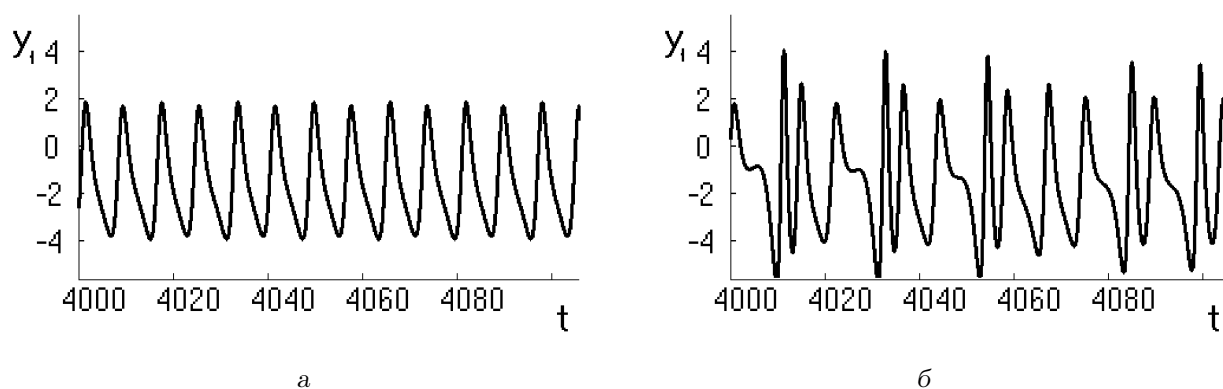


Рис. 5. Временные реализации системы (6):  
 а – при  $F=0.257$ ; б – при  $F=0.114$

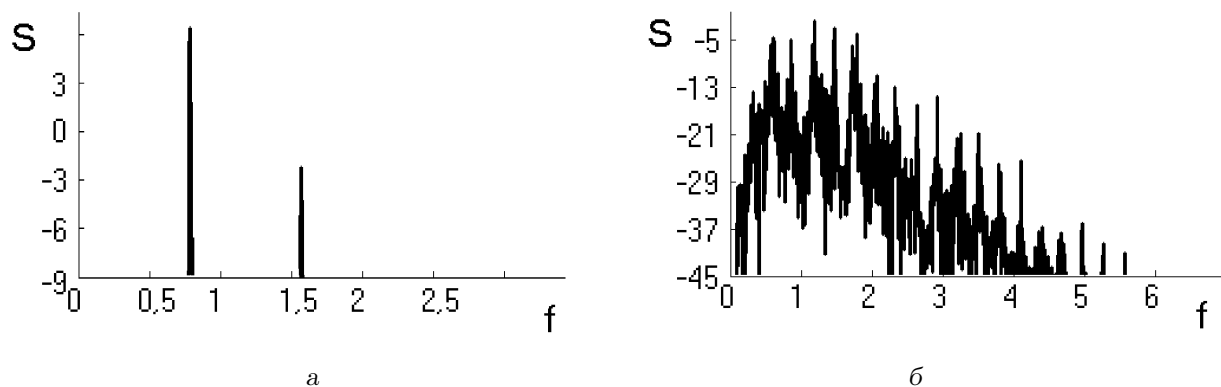


Рис. 6. Спектры мощности сигналов системы (6):  
 а – при  $F=0.257$ ; б – при  $F=0.114$

ния системы (6) при  $F=0.257$  и  $F=0.114$  изображены на рис. 4. Соответствующие временные реализации и их спектры мощности показаны на рис. 5 и 6 соответственно. Эти данные свидетельствуют, что при  $F=0.257$  реализуется регулярный режим, фазовый портрет которого представляет собой двухоборотный цикл. При  $F=0.114$  в системе существует хаотический аттрактор ленточной структуры с бесконечным числом непересекающихся оборотов. Временная реализация регулярного режима представляет собой двухчастотный колебательный режим, о чем свидетельствует и спектр мощности решения, содержащий несколько пиков на определенных частотах. Выходной сигнал для хаотического режима – сложная непериодическая функция, имеющая сплошной спектр мощности.

### 3. СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ РЕКОНСТРУКЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КРИТЕРИЯ 2

В этом разделе мы проведем сравнение методов восстановления систем, основываясь лишь на необходимости выполнения упомянутого во введении критерия 2. Положительность (или не положительность) старшего показателя Ляпунова свидетельствует о существовании хаотического или регулярного режима. Принадлежность же установившихся режимов к одному и тому же классу – принципиальное качество динамики системы. Поэтому будем считать метод реконструкции правильным, если оба сигнала – исходный и полученный при решении реконструированной системы – являются регулярными или хаотическими.

Выполнение критерия 2 проверялось следующим образом. К массиву из 200 выходных сигналов системы (6), каждый из которых характеризуется своим значением параметра  $F$ , применялись первый и второй методы реконструкции. При этом предполагалось, что об исходной динамической системе неизвестно ничего, кроме ее диссипативности (критерий 5). Методика выбора задержки в рамках второго метода будет детально описана в следующем разделе. После реконструкции уравнений динамических систем в результате вычислений были получены два массива коэффициентов соответствующих математических моделей. В обоих случаях были найдены старшие показатели Ляпунова для систем (рис. 7) и их решений (рис. 8). Из графиков видно, что область хаотичности решения у систем, восстановленных первым методом, несколько меньше, чем у исходных и восстановленных вторым методом. Кроме того, оба метода недостаточно точно описывают дина-

мические режимы, расположенные у границ перехода от регулярности к хаосу.

### 4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ ПО РЕГУЛЯРНОМУ ВЫХОДНОМУ СИГНАЛУ

Как уже отмечалось, при значении управляющего параметра  $F=0.257$  система (6) имеет регулярное решение (см. рис. 5). Учитывая относительную простоту этого выходного сигнала, применим обсуждавшиеся выше методы реконструкции, оставляя в разложении (3) полиномы только до третьей степени нелинейности включительно.

В результате применения метода последовательного дифференцирования получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -1.146 - 0.8x_1 - 2.211x_2 - 1.73x_3 - \\ &\quad - 0.466x_1^2 - 1.234x_1x_2 - 0.507x_1x_3 - \\ &\quad - 0.119x_2^2 + 0.034x_2x_3 - 0.144x_3^2 - \\ &\quad - 0.134x_1^3 - 0.08x_1^2x_2 + 0.004x_1^2x_3 - \\ &\quad - 0.041x_1x_2^2 - 0.05x_1x_2x_3 + 0.006x_1x_3^2 - \\ &\quad - 0.041x_2^3 + 0.003x_2^2x_3 - 0.01x_2x_3^2 + 0x_3^3. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя второй метод реконструкции, для выбора времени задержки  $\tau = n\Delta t = n0.004$  поступим следующим образом. По выходному сигналу построим его автокорреляционную функцию и найдем время достижения ее первого нуля  $t_0 = z\Delta t$  (в данном случае  $z=340$ ). Затем для каждого  $n \in [1, z]$  восстановим систему методом задержки и найдем ее дивергенцию в установившемся режиме. Зависимость дивергенции восстановленной системы от  $n$  отображена на рис. 9, а. Выберем значение  $n$ , находящееся в области, где дивергенция непрерывна, отрицательна (выполнение критерия 5) и имеет близкую к нулевой производную (график параллелен оси абсцисс). В нашем случае при  $n=240$  соответствующая система дифференциаль-

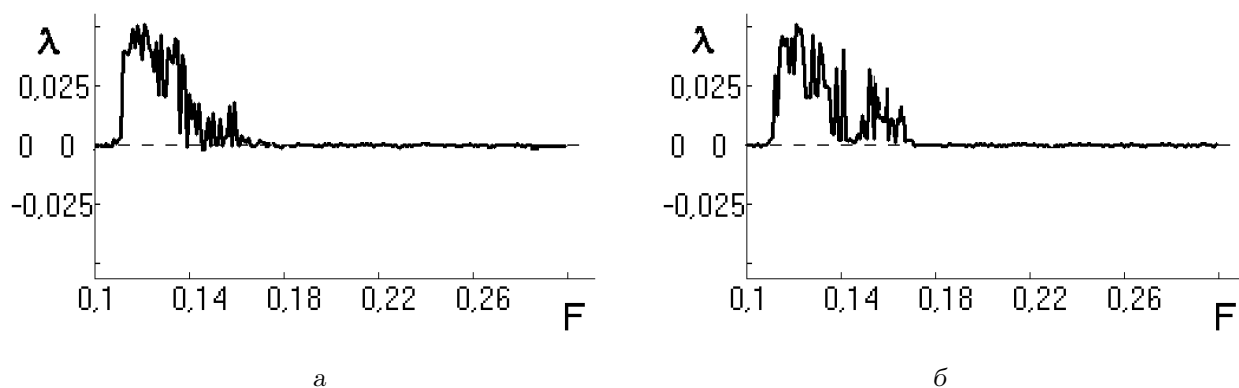


Рис. 7. Показатели Ляпунова систем, восстановленных двумя методами:  
а – методом дифференцирования; б – методом задержки

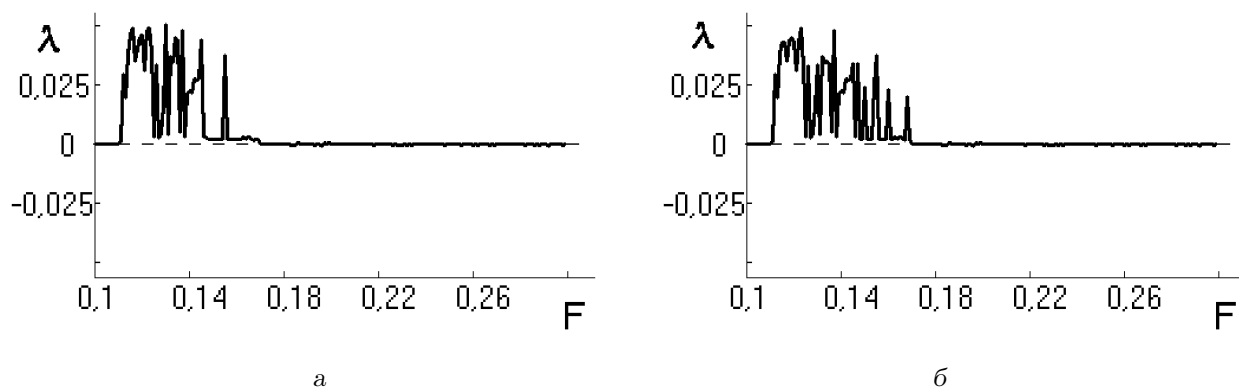


Рис. 8. Показатели Ляпунова, вычисленные по решениям систем, восстановленных двумя методами:  
а – методом дифференцирования; б – методом задержки

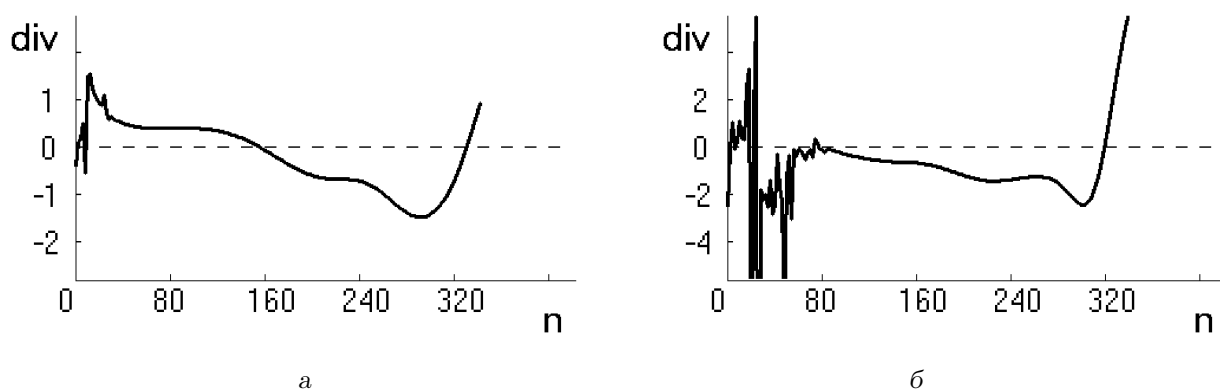


Рис. 9. Дивергенция восстановленной системы:  
а – при  $F=0.257$ ; б – при  $F=0.114$



ных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -0.266 - 2.135x_1 + 3.545x_2 - 1.574x_3 - \\
 &- 0.131x_1^2 + 0.685x_1x_2 - 0.352x_1x_3 - \\
 &- 0.393x_2^2 + 0.298x_2x_3 - 0.176x_3^2 + \\
 &+ 0.011x_1^3 + 0.017x_1^2x_2 - 0.042x_1^2x_3 - \\
 &- 0.037x_1x_2^2 + 0.093x_1x_2x_3 - 0.018x_1x_3^2 - \\
 &- 0.008x_2^3 - 0.035x_2^2x_3 + 0.006x_2x_3^2 - 0.007x_3^3, \\
 \frac{dx_2}{dt} &= 0.042 - 0.505x_1 - 0.427x_2 + 0.944x_3 + \\
 &+ 0.072x_1^2 - 0.171x_1x_2 + 0.048x_1x_3 - \\
 &- 0.013x_2^2 - 0.096x_2x_3 - 0.006x_3^2 - \\
 &- 0.005x_1^3 + 0.002x_1^2x_2 + 0.013x_1^2x_3 - \\
 &- 0.003x_1x_2^2 + 0.003x_1x_2x_3 - 0.015x_1x_3^2 + \\
 &+ 0.002x_2^3 + 0.006x_2^2x_3 + 0.009x_2x_3^2 - 0.001x_3^3, \\
 \frac{dx_3}{dt} &= -0.06 + 0.31x_1 - 1.576x_2 + 1.224x_3 - \\
 &- 0.081x_1^2 + 0.125x_1x_2 - 0.021x_1x_3 + \\
 &+ 0.048x_2^2 - 0.107x_2x_3 - 0.046x_3^2 + \\
 &+ 0.005x_1^3 - 0.009x_1^2x_2 + 0.006x_1^2x_3 - \\
 &- 0.006x_1x_2^2 - 0.056x_1x_2x_3 + 0.056x_1x_3^2 + \\
 &+ 0.008x_2^3 - 0.007x_2^2x_3 - 0.028x_2x_3^2 + 0x_3^3.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

На рис. 10 изображены проекции на плоскость фазовых портретов аттракторов систем (7) и (8), представляющие собой проекции двухоборотного предельного цикла (проверка выполнения критерия 4). Поведение фазовых траекторий на аттракторе лишь качественно напоминает поведение исходной системы (6) при  $F=0.257$  (см. рис. 4, а). Это связано с тем, что при реконструкции в качестве выходного сигнала реальной системы (6) выбиралась лишь первая ее координата  $y_1$ .

Временная реализация отклика системы (7) и ее спектр мощности изображены на рис. 11. Отметим, что при решении восстановленных систем начальные условия выбиралась в некоторой окрестности выходного сигнала. Соответствующие графики для системы (8) даны на рис. 12. Как явству-

ет из графиков, оба метода достаточно точно воспроизводят регулярный выходной сигнал. При этом для первого метода спектр мощности восстановленного сигнала для первых двух пиков совпадает со спектром мощности выходного сигнала (см. рис. 6, а) с точностью более 95 %, а для второго – более 97 %. Таким образом, метод задержки позволяет несколько точнее выполнить критерий 3.

## 5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ ПО ХАОТИЧЕСКОМУ ВЫХОДНОМУ СИГНАЛУ

Теперь возьмем выходной сигнал системы (6), соответствующий значению параметра  $F=0.114$ , при котором в ней реализуется хаотический режим. Реконструируем уравнения системы двумя обсуждаемыми методами. Ввиду сложности выходного сигнала, в разложении (3) будем использовать полиномы до шестой степени включительно. Как и в регулярном случае, при определении времени задержки в соответствующем методе применим описанный выше алгоритм (согласно критерию 5). Зависимость дивергенции восстановленной системы от  $n$  приведена на рис. 9, б. При реконструкции используем значение  $n=120$ . Вид систем, полученных обоими методами, довольно громоздок, поэтому они здесь не приводятся.

На рис. 13 изображены проекции на плоскость фазовых портретов аттракторов систем двух реконструированных систем. Они показывают, что хаотический аттрактор имеет ленточную структуру с бесконечным числом витков. Соответствующие временные реализации и их спектры изображены на рис. 14 и 15. Сравнивая фазовые портреты и временные реализации восстановленных систем с характеристиками исходной системы (6) (см. рис. 4, б и рис. 5, б), видим сохранение качественных структур аттракторов после реконструирования обоими методами. При этом более высокую точность воспроизведения выходного сигнала (критерий 4) дает метод задержки. Область непрерывности спектров восстановленных сигналов совпадает с областью непрерывности выходного сигнала (см. рис. 6, б), причем все три спектра могут быть аппроксимированы одной и той же функцией затухания  $S=-6.75-8.5f$ . Это свидетельствует о выполнении критерия 3.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено сравнение двух основных методов построения динамических систем по выходному сигналу – метода последовательного дифференци-

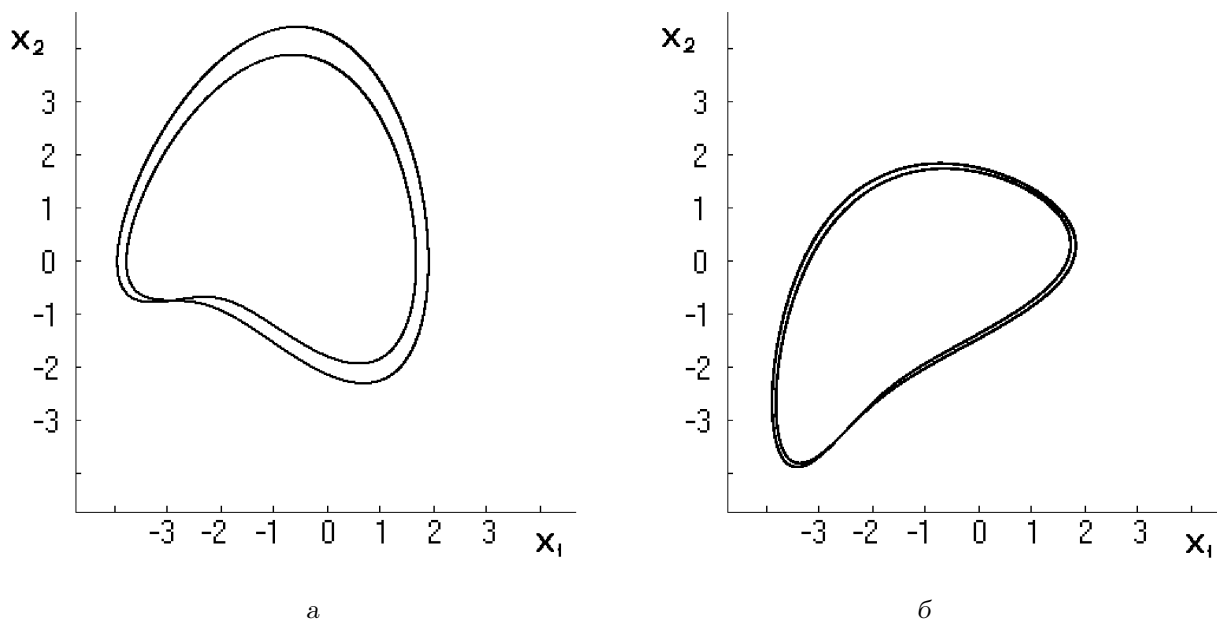


Рис. 10. Проекция фазовых портретов ( $F=0.257$ ):  
 а – система (7); б – система (8)

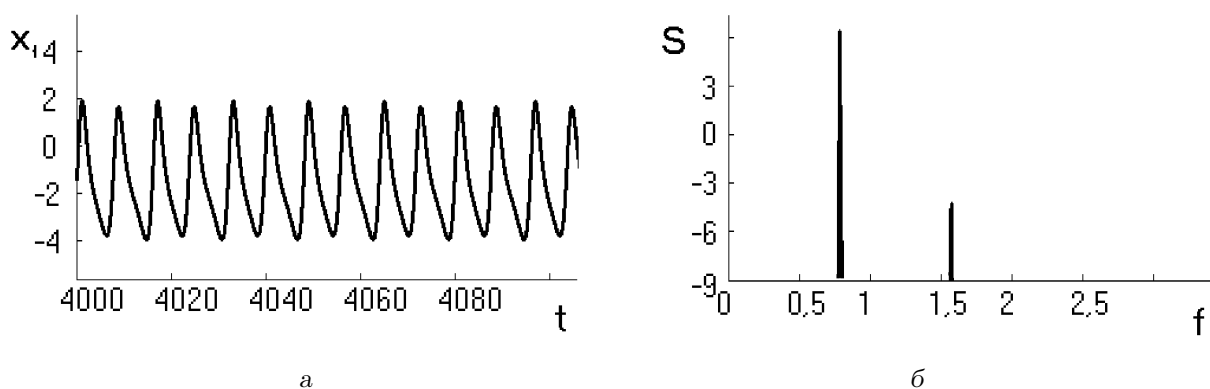


Рис. 11. Сигнал системы (7), восстановленной методом последовательного дифференцирования ( $F=0.257$ ):  
 а – временная реализация; б – спектр мощности

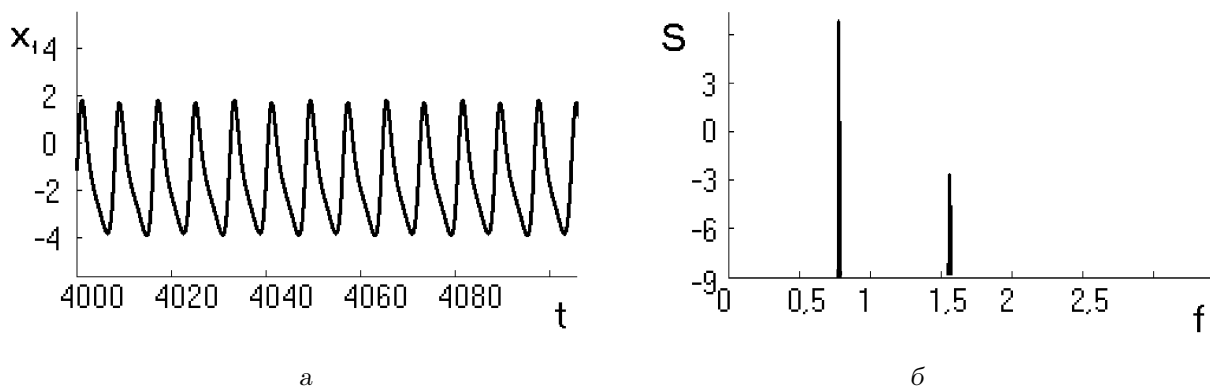


Рис. 12. Сигнал системы (8), восстановленной методом задержки ( $F=0.257$ ):  
 а – временная реализация; б – спектр мощности

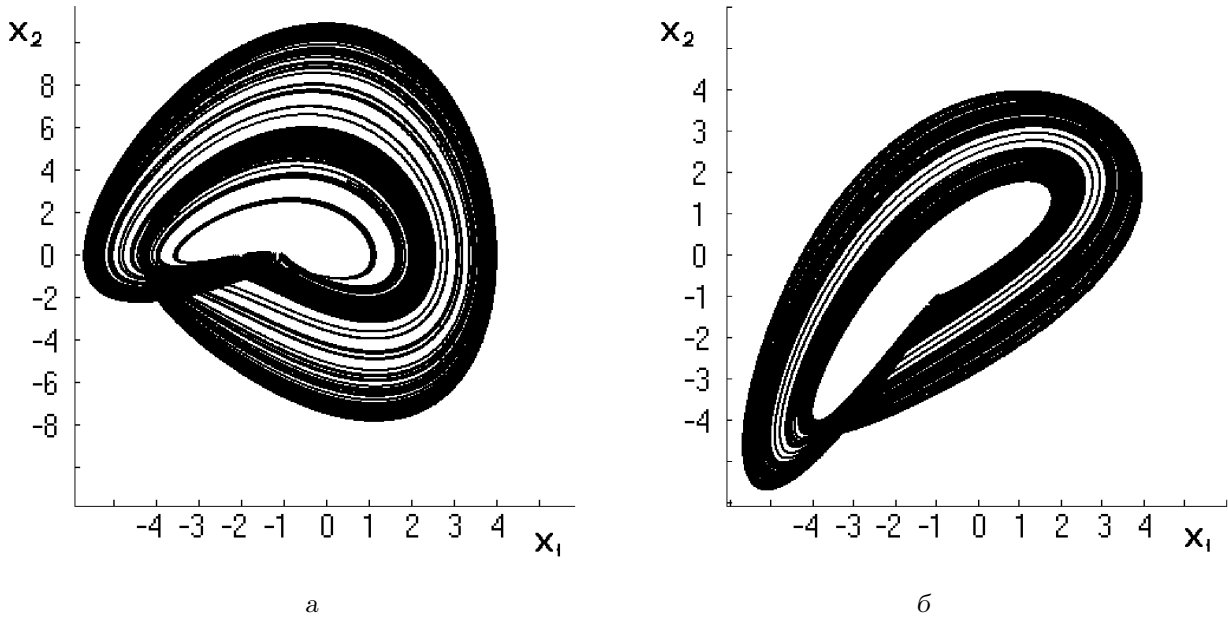


Рис. 13. Проекция фазовых портретов ( $F=0.114$ ):  
 а – система (7); б – система (8)

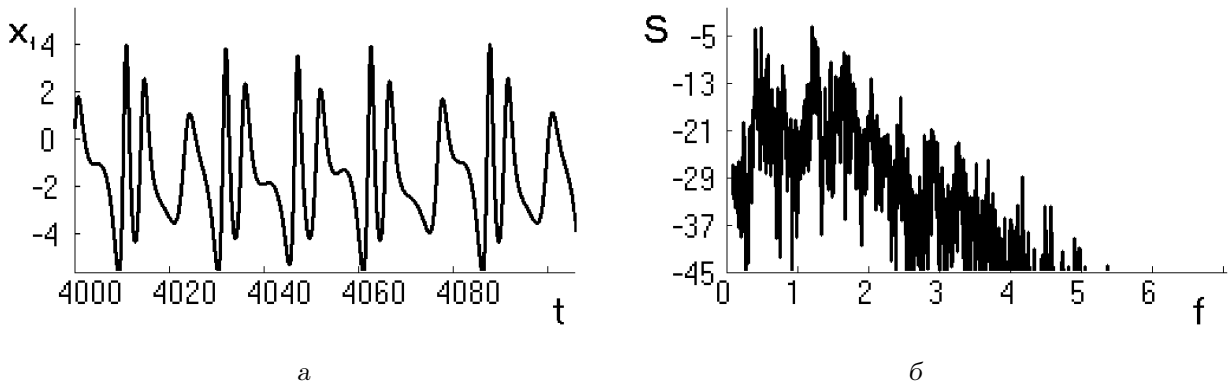


Рис. 14. Сигнал системы (7), восстановленной методом последовательного дифференцирования ( $F=0.114$ ):  
 а – временная реализация; б – спектр мощности

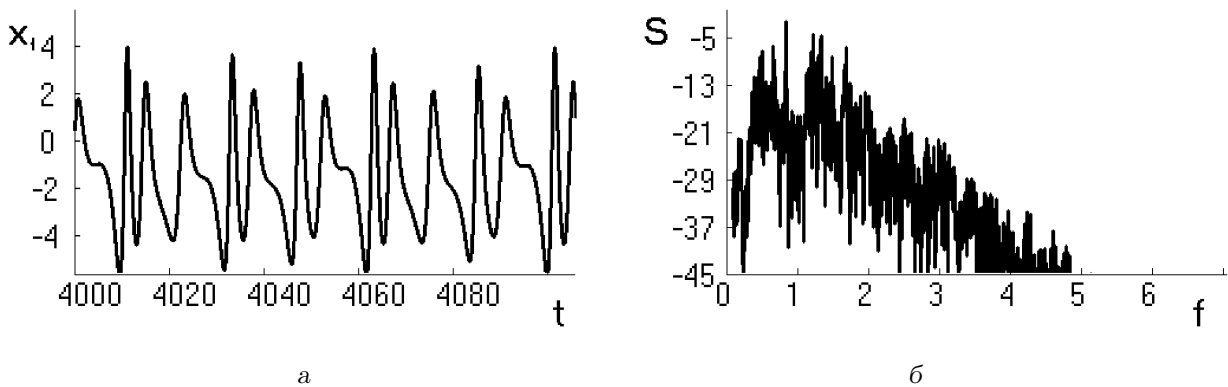


Рис. 15. Сигнал системы (8), восстановленной методом задержки ( $F=0.114$ ):  
 а – временная реализация; б – спектр мощности

рования и метода задержки. При этом сравнивалось качество выполнения сигналами реконструированных систем критериев согласования с исходным выходным сигналом.

На конкретных примерах выходных сигналов системы, описывающей колебания плоского физического маятника, реконструирована математическая модель динамической системы третьего порядка. При исследовании систем и сигналов использованы спектральные методы, построение фазовых портретов и показатели Ляпунова. Учитывая неконсервативность реальных динамических систем, для определения времени оптимальной задержки в рамках второго метода использовался линейный участок зависимости отрицательной дивергенции реконструированной системы от параметра задержки.

Обнаружено, что при восстановлении хаотических выходных сигналов область хаотичности у систем, восстановленных методом последовательного дифференцирования, уже чем при применении метода задержки. Показано, что оба метода недостаточно точно отображают динамические режимы, расположенные у границ перехода от регулярности к хаосу, однако позволяют достаточно точно реконструировать регулярные и большинство хаотических сигналов маятника при учете в правых частях восстановленных систем нелинейностей до шестого порядка включительно. При регулярном выходном сигнале первый метод восстанавливает сигнал, спектр мощности которого для первых двух пиков совпадает со спектром исходного сигнала с точностью более 95 %, а второй – более 97 %. Для хаотических выходных сигналов восстанавливается качественное поведение фазовой траектории на аттракторе системы, причем спектр выходного сигнала и спектры временных реализаций реконструированных систем могут быть аппроксимированы одной и той же линейной функцией затухания. В случае хаотического выходного сигнала более предпочтительно использовать метод задержки.

1. Гринченко В. Т., Вовк І. В., Маципура В. Т. Основы акустики.– К.: Наукова думка, 2007.– 640 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных.– М.: Мир, 1989.– 540 с.
3. Abarbanel H. D. I. Analysis of observed chaotic data.– New York: Springer-Verlag, 1997.– 250 p.
4. Goldberger A. L. Clinical electrocardiography: A simplified approach.– Philadelphia: Mosby Elsevier, 2006.– 230 p.
5. Анищенко В. С. Знакомство с нелинейной динамикой.– Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.– 142 с.
6. Кузнецов С. П. Динамический хаос.– М.: Физматлит, 2001.– 295 с.
7. Болотин Ю. Л., Тур А. В., Яновский В. В. Конструктивный хаос.– Харьков: Институт монокристаллов, 2005.– 420 с.
8. Краснополская Т. С., Швец А. Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением.– Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008.– 278 с.
9. Гринченко В. Т., Маципура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику.– К.: Наукова думка, 2005.– 264 с.
10. Шустер Г. Детерминированный хаос.– М.: Мир, 1984.– 240 с.
11. Crutchfield J. P., McNamara B. S. Equations of motion from a data series // Complex Syst.– 1987.– 1, № 1.– P. 417–452.
12. Takens F. Detecting strange attractors in fluid turbulence // Lect. Not. Math.– 1981.– 898.– P. 366–375.
13. Janson N. B., Pavlov A. N., Kapitaniak T., Anishenko V. S. Reconstruction of the dynamical systems from the short signals // JTP Lett.– 1999.– 25, № 11.– P. 7–13.
14. Anishenko V. S., Pavlov A. N. Global reconstruction in application to multichannel communication // Phys. Rev. E.– 1998.– 57, № 2.– P. 2455–2458.
15. Nolte D. D. The tangled tale of phase space // Physics today.– 2010.– № 4.– P. 33–38.
16. Ehrenfest P., Ehrenfest T. Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften: vol. 4, pt. 32.– Leipzig: B. G. Teubner, 1911.– 368 p.
17. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M. Kolmogorov entropy and numerical experiments // Phys. Rev.– 1976.– 14, № 6.– P. 2338–2345.