

УДК 539.3

РЕЗОНАНС НА НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНАХ ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОЛУСЛОЯ

В. Т. ГРИНЧЕНКО, Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 27.12.2010*

Проанализированы особенности поведения резонанса на неоднородных волнах при антисимметричных колебаниях полуслоя со свободными боковыми поверхностями и свободным торцом при изменении коэффициента Пуассона. Найдено резонансное возрастание амплитуды первой неоднородной волны в области частот, где распространяются две нормальные волны. При переходе через резонансную частоту фаза комплексной амплитуды первой неоднородной волны меняет знак. Резонансное поведение первой неоднородной волны наблюдается не для всех коэффициентов Пуассона.

Проаналізовано особливості поведінки резонансу на неоднорідних хвилях при антисиметричних коливаннях півшару з вільними бічними поверхнями й вільним торцем при зміні коефіцієнта Пуассона. Знайдено резонансне зростання амплітуди першої неоднорідної хвилі в області частот, де поширюються дві нормальні хвилі. При переході через резонансну частоту фаза комплексної амплітуди першої неоднорідної хвилі змінює знак. Резонансна поведінка першої неоднорідної хвилі спостерігається не для всіх коефіцієнтів Пуассона.

The paper deals with analyzing of specifics of resonant behavior of non-propagating waves for antisymmetric vibration of a half-strip with free lateral surfaces and free edge at changing of the Poisson's ratio. The resonant increasing of the amplitude of the first non-propagating wave has been found in frequency range where two propagating modes exist. After crossing of resonant frequency, the phase of a complex amplitude of the first non-propagating wave changes its sign. The resonant behavior of the first non-propagating wave is observed not for all Poisson's ratios.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование волновых процессов в упругих телах интенсивно развивается, главным образом, благодаря широкому применению их результатов в дефектоскопии, акустоэлектронике, неразрушающем контроле, при конструировании и эксплуатации волноводов, а также устройств на поверхностных волнах.

Твердые тела, в отличие от жидкостей, наряду с объемной упругостью, характеризуются также упругостью по отношению к сдвиговым деформациям. Это приводит к тому, что волновая картина в них значительно сложнее, чем в идеальной сжимаемой жидкости. Так, в неограниченной упругой среде могут существовать не только продольные, но и поперечные волны, обусловленные сдвиговой деформацией. При наличии границы эти два типа волн взаимодействуют между собой, происходит постоянное превращение продольных волн в поперечные и наоборот.

В определенной степени взаимодействием различных типов упругих волн на граничной поверхности удается объяснить ряд явлений, характерных для упругих волн, и не имеющих аналогов в волновых полях другой физической природы. Таким примером может служить поверхностная волна Рэлея на свободной границе упругого полупространства, которая распространяется вдоль свобо-

дной границы, причем ее амплитуда экспоненциально убывает в глубину, т. е. происходит локализация движений в приповерхностном слое [1]. Физическая природа возникновения указанных локализованных движений обусловлена именно взаимодействием между продольными и поперечными волнами на границе [2].

Отметим некоторые хорошо известные свойства поверхностной волны Рэлея:

- поверхностная волна образована двумя неоднородными (продольной и поперечной) волнами;
- ее фазовая скорость меньше скоростей обеих объемных волн;
- эта волна – бездисперсионная;
- она затухает с расстоянием как $r^{0.5}$ в осесимметричном случае, т. е. поверхностная волна преобладает на значительных расстояниях от источника; частички в поверхностной волне движутся по эллипсу, большая ось которого перпендикулярна к границе;
- отношение большей полуоси эллипса к меньшей на границе изменяется от 1.577 до 1.189 при изменении коэффициента Пуассона от 0 до 0.5;

- вблизи поверхности движение частиц проходит против часовой стрелки, а на определенном расстоянии от границы, зависящем от длины поверхностной волны и коэффициента Пуассона, – по часовой стрелке, т. е. на определенной глубине имеется плоскость, в которой нет движения параллельного поверхности;
- затухание поверхностной волны с глубиной растёт с увеличением частоты волны.

Энергетический анализ поверхностной волны показывает, что практически вся переносимая ею энергия сосредоточена в слое с толщиной, равной длине волны. При этом перпендикулярная к границе составляющая среднего за период потока мощности равна нулю, а в составляющую потока вдоль границы входят не только средние потоки, переносимые продольной и поперечной волной в отдельности, но слагаемые, обусловленные их взаимодействием.

Важная особенность поверхностной волны состоит в том, что она не возбуждается при отражении продольной или поперечной волны от свободной границы. Для возбуждения волны Рэлея существует ряд методов. Например, для источника, находящегося на плоской границе, в [3] выделены следующие механические методы: метод клина, гребенчатой структуры, кварцевой пластины и др. Волну Рэлея можно возбудить, если на плоскую границу падает сферическая волна (точечный источник находится на определенном расстоянии от границы). В этом случае появляются головные волны и волны Рэлея [4]. Отметим, что сферический источник невозможно разложить только на однородные плоские волны, при отражении которых от плоской границы поверхностная волна не появляется – в разложении обязательно присутствуют неоднородные волны, которые и обуславливают появление поверхностной волны.

Таким образом, наличие границы приводит не только к эффектам отражения и преломления волн, как в случае идеальной жидкости, но и создает возможность существования локализованных вблизи границы движений за счет взаимодействия двух типов волн.

При изучении распространения волн в упругом волноводе ситуация усложняется. Существование волновода приводит к направленной передаче энергии. При этом на формирование волнового поля оказывает влияние не только взаимодействие волн на границе раздела, но и взаимовлияние границ. Особенности распространения волн в неограниченных упругих волноводах к настоящему времени достаточно полно исследованы. Отметим,

что для неограниченных волноводов также наблюдаются эффекты локализации движения вблизи границы. Как для бесконечного слоя, так и для цилиндра фазовая и групповая скорости нижней нормальной волны в высокочастотном пределе стремятся к скоростям волны Рэлея, т. е. в высокочастотном пределе на граничных поверхностях бесконечного волновода распространяется поверхностная волна.

В ограниченных или составных упругих волноводах существуют вертикальные границы, что приводит к изменению направления распространения энергии и может порождать эффекты локализации движения вблизи этих границ. В этой ситуации локализация движения вблизи вертикальной границы будет обусловлена взаимодействием нормальных волн и связана с возбуждением неоднородных волн. Следует отметить, что коэффициенты отражения нормальных волн от вертикальной границы в упругом волноводе являются частотно зависимыми. Это позволяет предположить, что явление локализации движения вблизи вертикальных границ будет иметь резонансный характер.

Значительная локализация движения вблизи торца упругого волновода со свободными боковыми поверхностями и свободным торцом на определенной частоте наблюдалась экспериментально и получила название краевого резонанса. Впервые это явление обнаружил в 1956 г. Шоу при исследовании колебаний круглых пьезокерамических дисков. Вблизи цилиндрической поверхности (на краю диска) на определенной частоте фиксировалась зона больших смещений. Кроме того, было установлено, что резонансная частота не зависит от радиуса диска [5]. Аналогичная форма колебаний наблюдалась в 1957 г. Оливером в экспериментах на длинных стальных дисках [6]. В работе Газиса и Миндлина [7] показано, что краевой резонанс обусловлен значительным возбуждением неоднородных волн.

К настоящему времени опубликовано значительное количество экспериментальных и теоретических работ, посвященных краевому резонансу. Для того, чтобы глубже понять специфику возбуждения неоднородных волн, большое внимание уделялось анализу краевого резонанса в полуограниченных телах [2, 7–15]. Эти исследования показали, что в телах типа полуполосы и полуцилиндра частота краевого резонанса, на которой происходит локализация движения вблизи торца, совпадает с резонансной частотой в конечных цилиндрах и пластинах.

Для полуслоя краевой резонанс наблюдался и изучался при симметричных колебаниях. Его частота находится в той области, когда в волноводе существует только одна распространяющаяся нормальная волна (первая мода). В работах [16–18] показано, что резонансная частота существенно зависит от коэффициента Пуассона – она увеличивается с ростом ν . Уровень возбуждения неоднородных волн и добротность резонанса при симметричных колебаниях существенно изменяются при варьировании коэффициента Пуассона. На частоте краевого резонанса амплитуда неоднородных волн остается конечной величиной практически для всех значений коэффициентов Пуассона, кроме $\nu=0$ и $\nu \approx 0.2249$ [2, 16, 17]. Это обусловлено связанностью единственной распространяющейся волны и неоднородных волн через граничные условия, вследствие чего в полуслоях вносится радиационное демпфирование и амплитуды неоднородных волн остаются ограниченными. Для двух же отмеченных значений коэффициентов Пуассона за счет соответствующего выбора нагрузки на торце при вынужденных колебаниях можно получить действительный резонанс на неоднородных волнах.

Для полноты картины отметим, что краевой эффект наблюдался при симметричных колебаниях полуслоя со скошенным [19] и искривленным [20] торцами, а также при симметричных и неосесимметричных колебаниях полуцилиндра [2].

При антисимметричных колебаниях полуслоя возникает принципиально иная ситуация. Для такого вида колебаний краевого резонанса в области существования одной распространяющейся волны нет [21]. Процесс отражения первой антисимметричной волны от свободного торца полуслоя рассматривался в работах [22–24, 24, 25]. В статьях [24, 26] показано, что в полосе частот, где существуют две распространяющиеся волны, наблюдается увеличение амплитуды неоднородной волны, соответствующей первому комплексному корню дисперсионного уравнения. В работе [26] показано, что при изгибных колебаниях полуслоя резонанс на неоднородных волнах существует не для всех значений коэффициента Пуассона. Таким образом, количественные эффекты локализации зависят не только от частоты, но и от характера (типа симметрии) движения в волноводе.

В данной работе продолжены исследования по изучению особенностей возбуждения неоднородных волн при антисимметричных колебаниях полуслоя. Найден коэффициент Пуассона, начиная с которого возникают краевые эффекты при изгибных колебаниях. Изучены кинематические характеристики резонанса на неоднородных волнах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим плоскую задачу определения свойств волнового поля в изотропном полубесконечном упругом слое (случай плоской деформации):

$$|Y| \leq H, \quad Z \geq 0, \quad -\infty > X < \infty$$

с заданными физическими характеристиками – модулем сдвига μ , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Волны предполагаются гармоническими с круговой частотой ω . Зависимость от времени кинематических и силовых характеристик поля задается множителем $\exp(-i\omega t)$, который опускается в последующих выкладках. Частота ω считается положительной вещественной величиной. Рассматривается антисимметричное относительно плоскости $Y=0$ волновое поле. При построении решения вводятся безразмерные координаты, нормированные на толщину полуслоя: $y=Y/H$, $z=Z/H$. Количественные характеристики волновых полей будут нормироваться на амплитуду падающей волны.

Изучается процесс отражения приходящей из бесконечности первой нормальной волны $\mathbf{u}^{(0)}(y, z)$ от свободного от напряжений торца волновода (везде далее индекс “0” соответствует падающей волне). Для нахождения характеристик отраженных волн $\mathbf{u}^{(1)}(y, z)$ необходимо решить следующую граничную задачу для векторного уравнения движения Ламе [2]:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div} \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_{zz}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) = 0, \quad z=0, \quad |y| \leq 1,$$

$$\tau_{zy}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0) = 0, \quad z=0, \quad |y| \leq 1, \quad (2)$$

$$\sigma_{yy}(\pm 1, z) = \tau_{yz}(\pm 1, z) = 0, \quad y = \pm 1, \quad z \geq 0.$$

Дополнительно к граничным условиям (2) должны выполняться условия излучения на бесконечности, заключающиеся в том, что каждая распространяющаяся нормальная волна уносит энергию от торца полуслоя на бесконечность.

Решение поставленной граничной задачи не представляет труда и достаточно подробно описано в работах [24, 27]. Не останавливаясь на нем специально, отметим только, что для физической трактовки результатов решение задачи (2) необходимо представить в виде ряда по системе нормальных волн, каждая из которых удовлетворяет

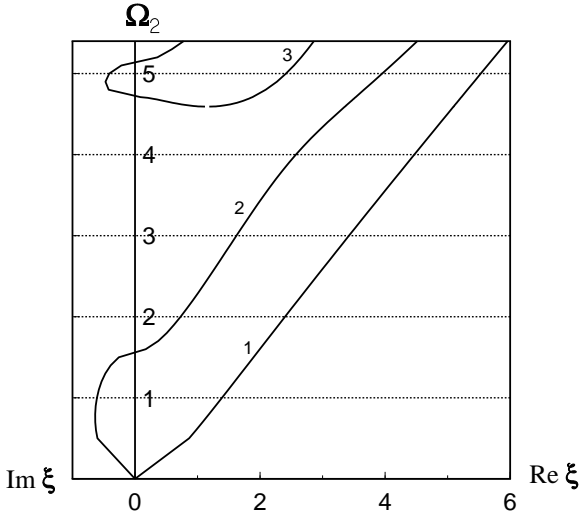


Рис. 1. Действительный и чисто мнимый участки спектра при изгибных колебаниях слоя для $\nu=0.2$

условию отсутствия напряжений по боковым поверхностям полуслоя:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(0)}(\xi_1, y)e^{-i\xi_1 z} &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sigma_{zz}(\xi_j, y)e^{i\xi_j z}, \\ \tau_{zy}^{(0)}(\xi_1, y)e^{-i\xi_1 z} &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j \tau_{zy}(\xi_j, y)e^{i\xi_j z}, \end{aligned} \quad (3)$$

где коэффициенты C_j определяются при численно-аналитическом решении граничной задачи. Выражения для компонент напряжений в разложениях задаются как

$$\frac{\sigma_{zz}(\xi_j, y)}{2\mu} = i \left(\frac{\xi_j^2 + \alpha_2^2}{2\alpha_1} (\xi_j^2 + \Omega_0^2) \alpha_1 \frac{\text{sh } \alpha_1 y}{\text{sh } \alpha_1} - \xi_j^2 \alpha_2 \frac{\text{sh } \alpha_2 y}{\text{ch } \alpha_2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\tau_{zz}(\xi_j, y)}{2\mu} = \xi_j \frac{\xi_j^2 + \alpha_2^2}{2} \left(\frac{\text{ch } \alpha_2 y}{\text{ch } \alpha_2} - \frac{\text{ch } \alpha_1 y}{\text{ch } \alpha_1} \right).$$

Здесь ξ_j – волновые числа всех нормальных волн, которые могут существовать на данной частоте (они равны соответствующим корням дисперсионного уравнения).

Дисперсионное уравнение для изгибных колебаний изотропного бесконечного слоя со свободными поверхностями имеет вид

$$\Delta(\xi, \Omega_2) = \xi^2 \alpha_2 \text{th } \alpha_2 - (2\xi^2 - \Omega_2)^2 \frac{\text{th } \alpha_1}{4\alpha_1} = 0. \quad (5)$$

Здесь $\alpha_j = \sqrt{\xi^2 - \Omega_j^2}$; $\Omega_2 = \omega h / c_s$; c_s – скорость поперечной волны; $\Omega_1 = \omega h / c_l = \Omega_2 c_2 / c_1$; c_l – ско-

рость продольной волны. Оно хорошо изучено и при фиксированном значении частоты имеет конечное число вещественных и чисто мнимых корней и бесконечное число комплексных корней [2].

Прежде чем перейти к дальнейшему анализу результатов решения поставленной граничной задачи для различных значений частоты и коэффициента Пуассона, кратко остановимся на особенностях дисперсионного спектра при антисимметричных колебаниях. Отметим, что численные значения (до четырех цифр после запятой) действительных, чисто мнимых и первой пары комплексных корней уравнения (5) для коэффициента Пуассона $\nu=0.3$ можно найти в работах [28]. Качественный анализ дисперсионного уравнения для симметричных колебаний проведен в [2]. Представляет интерес проведение аналогичного анализа для антисимметричных колебаний в диапазоне частот $0 \leq \Omega_2 \leq 5$ при разных значениях коэффициента Пуассона.

Структура действительных и чисто мнимых участков спектра для антисимметричных колебаний слоя с коэффициентом Пуассона $\nu=0.2$ представлена на рис. 1. При этом значении ν первый комплексный корень дисперсионного уравнения вырождается в действительный в точке относительного минимума третьей ветви дисперсионного спектра. Вблизи данной точки действительная ветвь опускается ниже частоты запирания и появляется участок спектра с отрицательной кривизной, описывающий “обратную” волну. Минимальное значение частоты, при котором еще существует распространяющаяся мода, является частотным минимумом и обозначается как Ω_2^* . Значение этой частоты и величина участка с отрицательной кривизной существенным образом зависят от коэффициента Пуассона. В отличие от симметричных колебаний, в данном случае первый комплексный корень вырождается в действительный не для всех коэффициентов Пуассона. Определим критическую его величину, при превышении которой первый комплексный корень пересекает плоскость не вещественных, а чисто мнимых корней дисперсионного уравнения. Как отмечено выше, для малых коэффициентов Пуассона первый комплексный корень вырождается в действительный в точке вещественного участка третьей дисперсионной ветви, где кривизна при $\xi=0$ становится отрицательной. Критическое значения ν соответствует нулевой кривизне вещественного участка третьей ветви.

Определим угол наклона касательной и кривизну вещественной ветви вблизи частоты запирания для третьей нормальной волны. При анги-

симметричных колебаниях частота запираия для третьей нормальной волны будет $\Omega_2 = 3\pi/2$. Раскладывая неявную функцию $\Delta(\xi, \Omega_2)$ в ряд Тейлора в окрестности частоты запираия третьей нормальной волны ($\xi=0, \Omega_2=3\pi/2$) с точностью до величин второго порядка малости, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_2}{d\xi} \Delta'_{\Omega_2} + \Delta'_{\xi} &= 0, \\ \frac{d^2\Omega_2}{d\xi^2} \Delta'_{\Omega_2} + \left(\frac{d\Omega_2}{d\xi}\right)^2 \Delta''_{\Omega_2\Omega_2} + \\ + 2\frac{d\Omega_2}{d\xi} \Delta''_{\Omega_2\xi} + \Delta''_{\xi\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Все частные производные вычисляются для третьей ветви дисперсионного спектра и в выбранной точке определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta'_{\Omega_2} &= i\left(\frac{3\pi}{2}\right)^4 \sin \Omega_1, & \Delta'_{\xi} &= 0, & \Delta''_{\xi\Omega} &= 0, \\ \Delta''_{\Omega_2\Omega_2} &= 2i\left(\frac{3\pi}{2}\right)^3 \left(4 \sin \Omega_1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \cos \Omega_1\right), \\ \Delta''_{\xi\xi} &= -i\frac{3\pi}{2} \left(8\Omega_1 \sin \Omega_1 + \frac{3\pi}{2} \cos \Omega_1\right), \\ \Omega_1 &= \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для кривизны третьей ветви получаем уравнение

$$\frac{d^2\Delta}{d\xi^2} = \frac{2}{3\pi} \left(1 + 8\frac{2\nu}{3\pi} \text{ctg} \Omega_1\right). \quad (8)$$

Из уравнения (8) находим критическое значение коэффициента Пуассона $\nu^* = 0.32014$, начиная с которого первый комплексный корень вырождается в чисто мнимый.

Такое качественное изменение поведения первого комплексного корня дисперсионного уравнения (5) с изменением коэффициента Пуассона, обуславливает существенное изменение в характере возбуждения неоднородных волн при отражении падающей нормальной волны от торца для разных материалов волновода.

2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Перейдем к анализу численных результатов, характеризующих волновое поле при антисимметричных колебаниях полуслоя. Основное внимание уделим степени возбуждения неоднородных

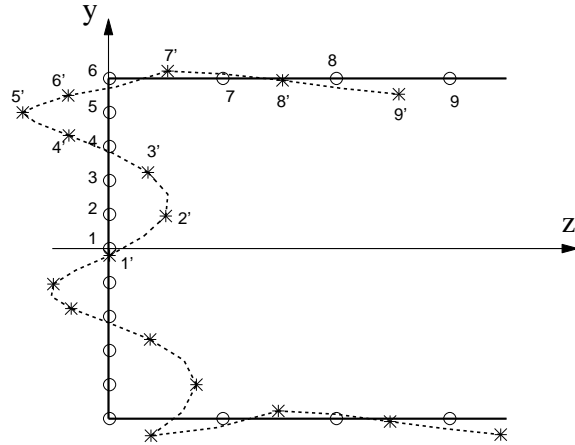


Рис. 2. Форма колебаний для $\nu=0.36$

волн в зависимости от частоты и коэффициента Пуассона при отражении от свободного торца первой распространяющейся волны.

В работе [27] было показано, что для $\nu=0.36$ при изгибных колебаниях полуслоя наблюдается резонанс на первой неоднородной волне. При этом амплитуда возбуждения нормальной волны с волновым числом, равным первому комплексному корню дисперсионного уравнения, превышает амплитуду падающей волны в 92 раза.

Для анализа резонансных характеристик важно исследовать форму колебаний на резонансной частоте. Для коэффициента Пуассона $\nu=0.36$ на рис. 2 показана форма окрестности торца полуслоя в равновесном состоянии (сплошная линия с кружочками) и при резонансном отклонении от положения равновесия (штриховая линия со звездочками). Каждая точка в положении равновесия обозначена численным индексом, а соответствующая ей точка при резонансном отклонении – индексом со штрихом. На торце полуслоя наблюдаются существенные деформации, в то время, как при удалении от торца амплитуда смещений уменьшается. При антисимметричных колебаниях полуслоя вертикальная компонента смещения симметрична относительно оси y , а горизонтальная – антисимметрична. Это хорошо видно из рис. 2.

Оценить вклад различных нормальных волн в смещение на торце на частоте резонанса можно по данным рис. 3. Здесь кривые u_y, u_z соответствуют смещению, обусловленному всеми нормальными волнами, а кривые с индексом 2 – компонентам смещения, обусловленного только распространяющимися волнами, которых на данной частоте две.

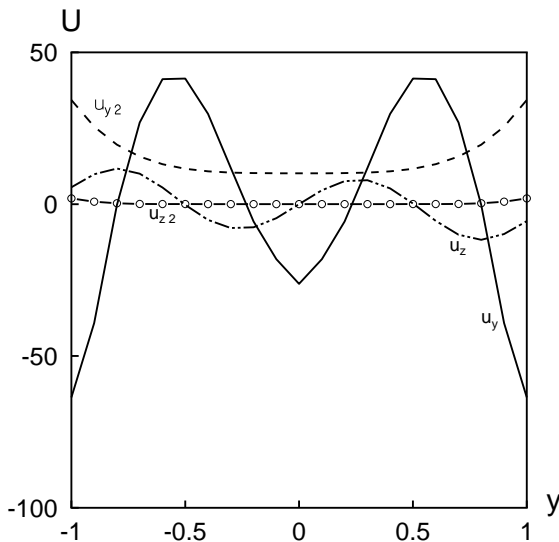
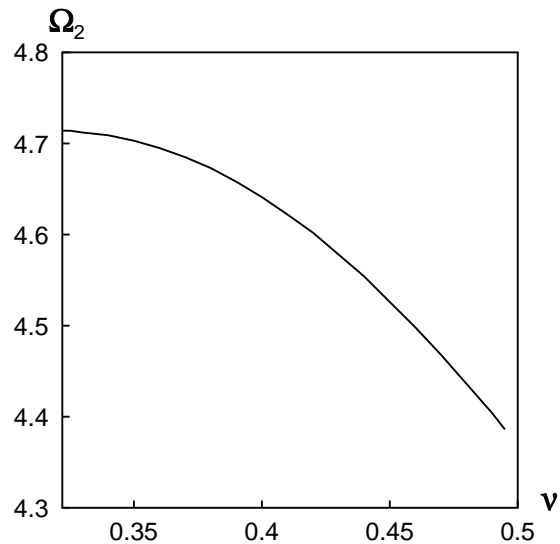
Рис. 3. Компоненты смещений торца на частоте $\Omega_2 = 4.69$ 

Рис. 4. Зависимость резонансной частоты от коэффициента Пуассона

Как видно из графика, общее смещение значительно превосходит вклад распространяющихся волн, т. е. существенные отклонения торца полуслоя от положения равновесия обусловлены именно неоднородными волнами.

Еще раз подчеркнем, что отличительная особенность резонанса на неоднородных волнах при антисимметричных колебаниях полуслоя состоит в том, что резонанс существует не для всех возможных значений коэффициента Пуассона, а только для $\nu \geq 0.32014$. При этом отметим, что влияние изменения величины коэффициента Пуассона, начиная со значения ν^* , на особенности проявления резонанса не исследовалось.

Известно, что для симметричных колебаний с ростом коэффициента Пуассона частота краевого резонанса увеличивается [15, 17, 18]. При антисимметричных колебаниях возникает иная ситуация. На рис. 4 показано изменение частоты резонанса на неоднородных волнах при антисимметричных колебаниях в зависимости от коэффициента Пуассона. Как видно из графика, при увеличении ν значение резонансной частоты падает. Такой характер зависимости представляется естественным, так как резонансная частота связана с частотным минимумом $\Omega_2^{(*)}$ третьей ветви в области чисто мнимых значений волнового числа. При увеличении коэффициента Пуассона этот минимум опускается все ниже частоты заштриховки, что приводит к соответствующему уменьшению резонансной частоты.

Важной характеристикой резонансных явления

служит добротность. На частоте резонанса на неоднородных волнах при антисимметричных колебаниях полуслоя существуют две распространяющиеся волны, переносящие энергию от торца полуслоя, т. е. существует радиационное демпфирование. За счет него амплитуды неоднородных волн на резонансе остаются конечными, даже если рассматривается идеально упругая среда. В средах с демпфированием увеличить амплитуду колебаний на резонансной частоте можно как за счет согласования вида нагрузки и собственной формы колебаний, так и за счет уменьшения демпфирования.

При симметричных колебаниях полуслоя для двух значений коэффициента Пуассона ($\nu = 0$ и $\nu \approx 0.225$) можно подобрать такую нагрузку, которая будет ортогональна единственной распространяющейся волне. В этом случае распространяющаяся волна не возбуждается, радиационного демпфирования нет и амплитуды колебания на резонансной частоте стремятся к бесконечности.

При антисимметричных колебаниях резонанс на неоднородных волнах наблюдается в области частот, в которой распространяющимися являются две волны. При этом на резонансной частоте первая из них переносит основную часть энергии (более 90 % энергии падающей волны). Однако уменьшить радиационное демпфирование все же возможно при совпадении резонансной частоты с частотой возбуждения моды Ламе. Мода Ламе существует на частоте, соответствующей пересечению дисперсионной ветви с прямой $\Omega_2 = \sqrt{2}\xi$. Для симметричных колебаний каждая ветвь пересека-

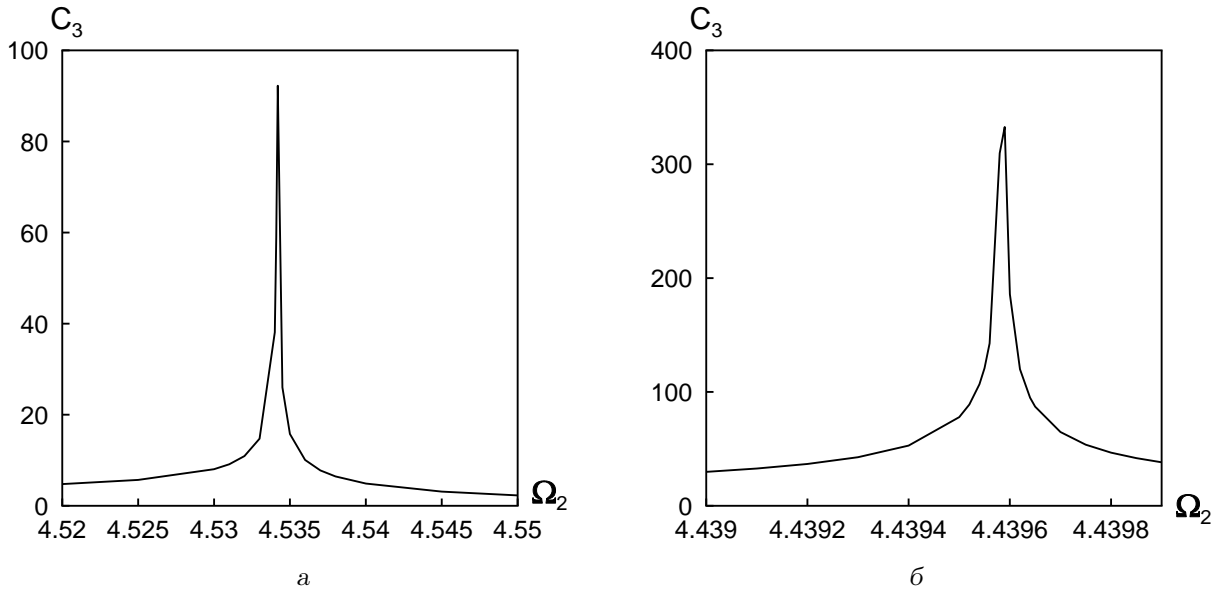


Рис. 5. Зависимость модуля амплитуды первой неоднородной волны от частоты:
 а – $\nu = 0.447$, б – $\nu \approx 0.4788$

ет данную прямую, т. е. для каждой распространяющейся моды существует частота, на которой она становится волной Ламе. Для антисимметричных колебаний первая ветвь не имеет пересечений с линией $\Omega_2 = \sqrt{2}\xi$. В то же время, для всех остальных распространяющихся волн существуют частоты, при которых возникает мода Ламе. Для второй ветви это значение $\Omega_2 = \sqrt{2}\pi$. Напомним, что в моде Ламе отсутствует объемное расширение [2]. С учетом соотношений (4) напряжения в моде Ламе для второй ветви определяются следующим образом:

$$\sigma_{zz} = C \sin \pi y, \quad \tau_{zy} = 0.$$

Как и при симметричных колебаниях, в антисимметричном случае мода Ламе ортогональна по напряжениям ко всем остальным нормальным волнам. Для любого $j \neq 2$ на частоте $\Omega_2 = \sqrt{2}\pi$ выполняется равенство

$$\int_{-1}^1 [\sigma_{zz}^L(y)\sigma_{zz}^j(y) + \tau_{zy}^L(y)\tau_{zy}^j(y)] dy = 0.$$

Таким образом, при возбуждении антисимметричных колебаний в полуслое первой нормальной волной на частоте $\Omega_2 = \sqrt{2}\pi$ вторая распространяющаяся волна не возбуждается. По рис. 4 можно найти коэффициент Пуассона, при котором частота резонанса на неоднородных волнах соответствует моде Ламе. Это значение $\nu \approx 0.4788$.

На рис. 5 представлена зависимость модуля амплитуды первой неоднородной волны от частоты

для значений коэффициента Пуассона $\nu = 0.447$ и $\nu \approx 0.4788$. Как видно из рис. 5, а, при $\nu = 0.447$ амплитуда неоднородной волны превышает амплитуду падающей в 91.2 раза. В работе [26] показано, что для $\nu = 0.36$ это отношение составляет 92.8. В то же время, как видно из рис. 5, б, для $\nu \approx 0.4788$ амплитуда первой неоднородной волны превышает амплитуду падающей в 340 раз. При этом резко возрастает добротность резонанса. Следовательно, изменяя коэффициент Пуассона, можно значительно увеличить амплитуду возбуждения первой неоднородной волны, что приводит к резкому возрастанию смещений торца полуслоя на резонансной частоте. Следует отметить, что на частоте резонанса на первой неоднородной волне падающая первая антисимметричная волна практически вырождается в поверхностную волну Рэлея, т. е. становится почти бездисперсионной. При этом сохраняется зависимость смещений и напряжений в падающей волне от коэффициента Пуассона. Таким образом, за счет соответствующего изменения ν не только уменьшается уровень возбуждения второй распространяющейся волны, но и происходит согласование формы нагрузки с собственной формой колебаний на резонансной частоте. Это приводит к увеличению добротности резонанса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено критическое значение коэффициента Пуассона, начиная с которого при антисимме-

тричных колебаниях полуслоя возникает резонанс на первой неоднородной волне. Найдена форма колебаний на резонансе и показано, что деформация полуслоя здесь определяется неоднородными волнами.

В отличие от краевого резонанса на неоднородных волнах при симметричных колебаниях полуслоя, при антисимметричных колебаниях резонанс на неоднородных волнах существует в области частот, где две нормальные волны являются распространяющимися. При этом наиболее энергетически выражена первая отраженная распространяющаяся волна (она переносит более 90 % энергии падающей волны). Хотя на резонансной частоте вторая распространяющаяся волна возбуждается незначительно, однако добротность резонанса можно значительно увеличить за счет подавления этой моды. Возбуждая полуслой первой распространяющейся волной, можно подобрать такой коэффициент Пуассона, при котором резонансная частота первой неоднородной волны совпадет с частотой, на которой вторая распространяющаяся волна будет ортогональной всем остальным нормальным волнам (т. е. не будет возбуждаться первой модой). На указанной частоте амплитуда первой неоднородной волны резко возрастает и увеличивается добротность резонанса. На резонансной частоте фазы обеих распространяющихся волн знаки не изменяют.

1. Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике.– М.: Наука, 1966.– 168 с.
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
3. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах.– М.: Наука, 1981.– 288 с.
4. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. Том 1.– М.: Мир, 1983.– 520 с.
5. Shaw E. A. G. On the resonant vibration of thinning barium titanate disks // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– **20**, № 1.– С. 38–50.
6. Oliver J. Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique // J. Acoust. Soc. Amer.– 1957.– **29**, № 2.– С. 189–194.
7. Gazis D. C., Mindlin R. D. Extensional vibration and waves in a circular disk and semi-infinite plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 1960.– **27**, № 3.– С. 541–547.
8. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. О резонансе в полубесконечной упругой полосе // Прикл. мех.– 1980.– **16**, № 2.– С. 58–63.
9. Auld B. A., Tsao E. J. A variational analysis of edge resonance in semi-infinite plate // IEEE Trans. SU.– 1977.– **24**, № 5.– С. 317–326.
10. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. Free localized vibration of semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Amer.– 2000.– **107**, № 3.– С. 1383–1393.
11. Torvic P. J. Reflection of wave trains in semiinfinite plates // J. Acoust. Soc. Amer.– 1967.– **41**, № 2.– С. 346–353.
12. Roitberg J., Vassiliev D., Wilde M. V. Edge resonance in an elastic semi-strip // Q. J. Mech. Appl. Math.– 1998.– **51**.– С. 1–13.
13. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer.– 1972.– **51**, № 1, Pt. 2.– С. 265–283.
14. Onoe M. Frequency of edge mode of isotropic thin rectangular plate, circular disk and rod // J. Acoust. Soc. Amer.– 1961.– **33**, № 11.– С. 1627.
15. Le Clezio E., Predoi M. V., Castaings M., Hoster B., Rousseau M. Numerical predictions and experiments on the free-plate edge mode // Ultrasonics.– 2003.– **41**.– С. 25–40.
16. Zernov V., Pichugin A. V., Kaplunov J. Eigenvalue of semi-infinite elastic strip // Proceeding Royal Society.– 2006.– **462**.– С. 1255–1270.
17. Pagneux V. Revisiting the edge resonance for Lamb waves in semi-infinite plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 2006.– **120**, № 2.– С. 649–656.
18. Городецкая Н. С. Еще раз о крайном резонансе // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, № 4.– С. 35–44.
19. Wilkie-Chancellor N., Dufflo H., Tinel A., Duclon J. Numerical description of the edgemode at the beveled extremity of a plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 2005.– **117**, № 1.– С. 194–199.
20. Гомилко А. М., Городецкая Н. С. Отражение волн Рэлея–Лэмба от криволинейного торца волновода // Прикл. мех.– 1997.– **33**, № 10.– С. 78–82.
21. Dilligent O., Lowe M. J. S., Le Clezio E., Castaings M., Hjsten B. Prediction and measurement of nonpropagating Lamb modes at the free end of a plate when the fundamental antisymmetric mode A_0 is incident // J. Acoust. Soc. Amer.– 2003.– **113**, № 6.– С. 3032–3042.
22. Cho Y. H., Rose J. L. A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves // J. Acoust. Soc. Amer.– 1996.– **99**, № 4, Pt. 1.– С. 2097–2109.
23. Ribay G., Catheline S., Clorennec D., Ing R. K., Fink M. A_0 mode interaction with a plate free edge: Theory and experiment at a very low frequency by thickness product // J. Acoust. Soc. Amer.– 2007.– **122**, № 2.– С. 711–714.
24. Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Мелешко В. В. Краевой резонанс при вынужденных изгибных колебаниях полуполосы // Акуст. ж.– 1991.– **37**, № 5.– С. 908–914.
25. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Краевой резонанс при изгибных колебаниях полуполосы // Докл. АН УССР. Сер. А.– 1985.– № 4.– С. 20–23.
26. Городецкая Н. С., Гринченко В. Т., Старовойт И. В. Антисимметричные колебания полуслоя. Неоднородные волны // Акуст. вісн.– 2009.– **12**, № 2.– С. 16–24.
27. Городецкая Н. С., Гринченко В. Т., Старовойт И. В. Особенности возбуждения нормальных волн при изгибных колебаниях полуслоя // Акуст. вісн.– 2007.– **10**, № 3.– С. 42–54.
28. Potter D. S., Leedham C. D. Normalized numerical solutions for Rayleigh's frequency equation // J. Acoust. Soc. Amer.– 1967.– **41**, № 1.– С. 143–153.