

УДК 532.595

# ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, НЕСУЩЕГО НА СВОБОДНОМ КОНЦЕ РЕЗЕРВУАР С ЖИДКОСТЬЮ

В. А. ТРОЦЕНКО, Ю. В. ТРОЦЕНКО

*Институт математики НАН Украины, Киев**Получено 12.04.2010*

Исходя из основных положений линейной теории движения твердых тел с полостями, частично заполненными идеальной жидкостью, и линейной теории тонкостенных стержней развита общая математическая модель динамики упругого стержня, несущего резервуар с жидкостью. Предложен вариационный метод решения спектральной задачи, описывающей поперечные колебания системы стержень – резервуар – жидкость. Приведены результаты расчетов собственных частот и форм колебаний рассматриваемой механической системы.

Виходячи з основних положень лінійної теорії руху твердих тіл з порожнинами, частково заповненими ідеальною рідиною, й лінійної теорії тонкостінних стержнів розвинуто загальну математичну модель динаміки пружного стержня, який несе резервуар з рідиною. Запропоновано варіаційний метод розв'язання спектральної задачі, яка описує поперечні коливання системи стержень – резервуар – рідина. Наведено результати розрахунку власних частот і форм коливань розглянутої механічної системи.

A general mathematical model of the dynamic elastic rod bearing the tank with a liquid is developed originating from the fundamental statements of linear theory of moving rigid body with the cavity partially filled with an ideal liquid and linear theory of thin-walled rods. A variational method is proposed for solving of the spectral problem describing the transversal oscillations of the system rod – tank – liquid. The results of computation of oscillation eigen frequencies and forms for the considered mechanical system are presented.

## ВВЕДЕНИЕ

Интерес к исследованию динамики упругих стержней, несущих жесткие резервуары с жидкостью, вызван запросами ракетной и космической техники, а также повышенными требованиями к проектированию гражданских объектов в виде водонапорных башен в сейсмически опасных районах. В работах [1, 2] изучение динамики таких объектов проводилось в основном с использованием эквивалентной маятниковой модели колебаний рассматриваемой механической системы. При разработке таких моделей для конкретных случаев существенную роль играют экспериментальные исследования.

В данной работе с использованием основных положений линейной теории движения твердых тел с полостями, частично заполненными идеальной жидкостью, и линейной теории упругих стержней, построена общая математическая модель динамики стержня, несущего на свободном конце резервуар с жидкостью. При этом предполагается, что к осесимметричному резервуару приложены внешние сосредоточенные силы и моменты, а к стержню – распределенная нагрузка.

С помощью вариационного принципа возможных перемещений математическая модель связанных колебаний стержня и жидкости в резервуаре

сведена к интегрированию уравнения колебания упругого стержня с учетом продольной сжимающей силы при определенных граничных условиях и интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Входящие в них коэффициенты определяются с помощью квадратур от решений основных внутренних краевых задач динамики жидкости в подвижных полостях, к которым относится спектральная задача о собственных колебаниях жидкости в неподвижном сосуде и неоднородная задача Неймана, связанная с нахождением потенциала Стокса – Жуковского.

При динамических расчетах строений на сейсмические и ветровые нагрузки в первую очередь необходимо располагать информацией об их частотах и формах собственных колебаний. В связи с этим предложен вариационный метод решения данной спектральной задачи, в рамках которого собственные числа входят как в разрешающие уравнения, так и в граничные условия. В результате решение исходной краевой задачи сведено к решению обобщенной алгебраической задачи на собственные значения.

Для резервуара, имеющего форму прямого кругового цилиндра, проанализирована эффективность предложенного алгоритма решения задачи и приведены некоторые результаты расчетов частот и форм колебаний данной механической системы.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ЖИДКОСТИ НА РЕЗЕРВУАР ПРИ ЗАДАННОМ ЕГО ДВИЖЕНИИ

Рассмотрим абсолютно жесткий резервуар (пока произвольной конфигурации), частично заполненный идеальной несжимаемой жидкостью и совершающий заданное движение в пространстве. Требуется определить движение жидкости и возникающие при этом силы и моменты, действующие на резервуар со стороны жидкости. При рассмотрении этой задачи будем пользоваться основными положениями теории движения тел, содержащих жидкость, изложенными в работах [3–6].

Пусть твердое тело и жидкость движутся в поле сил тяжести с вектором ускорения  $\vec{g}$ . Введем неподвижную прямоугольную систему координат  $O^*x^*y^*z^*$ , ось  $O^*z^*$  которой направлена противоположно вектору  $\vec{g}$ . Связанную с телом систему координат  $Oxyz$  расположим так, чтобы она в начальный момент времени  $t$  совпадала с системой координат  $O^*x^*y^*z^*$ . Орты осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  будем обозначать через  $\vec{i}_1, \vec{i}_2$  и  $\vec{i}_3$ , а соответствующие орты неподвижной системы –  $\vec{i}_1^*, \vec{i}_2^*$  и  $\vec{i}_3^*$ . При рассмотрении движения данной механической системы предполагаем перемещения, скорости и ускорения частиц жидкости и стенок резервуара настолько малыми, что произведениями, квадратами и более высокими их степенями можно пренебречь. Введенная гипотеза малости параметров движения системы позволяет существенно упростить постановку рассматриваемой задачи, сохранив при этом ее практическое значение. При огово-

ренных условиях, если начальное движение жидкости – безвихревое, то в силу теоремы Лагранжа, свойство его потенциальности будет сохраняться все время.

Предположим теперь, что резервуар совершает относительно системы координат некоторое заданное движение  $O^*x^*y^*z^*$ , характеризуемое вектором малого смещения  $\vec{u}(t)$  точки  $O$  относительно точки  $O^*$  и вектором малого поворота  $\vec{\theta}(t)$  подвижной системы координат  $Oxyz$  относительно  $O^*x^*y^*z^*$  (рис. 1).

Для описания движения жидкости в резервуаре воспользуемся потенциалом смещений  $\chi(x, y, z, t)$ , который связан с потенциалом скоростей  $\chi'(x, y, z, t)$  соотношением

$$\chi' = \frac{\partial \chi}{\partial t}. \tag{1}$$

В случае малых движений для потенциала смещений частиц жидкости справедливы те же соотношения, что и для потенциала скоростей:

$$\Delta \chi = 0, \quad \vec{w} = \nabla \chi. \tag{2}$$

Здесь  $\vec{w}$  – вектор смещений частиц жидкости;  $\Delta$  и  $\nabla$  – операторы Лапласа и Гамильтона соответственно. Таким образом, вектор смещения  $\vec{w}$  играет здесь роль, аналогичную вектору скорости частиц жидкости при описании картины ее движения с помощью потенциала скоростей.

Сформулируем граничные условия, которым должна удовлетворять гармоническая функция  $\chi$ . Обозначим через  $Q$  фиксированную область, ограниченную смачиваемой поверхностью полости  $S$  и свободной поверхностью жидкости  $\Sigma$  в ее невозмущенном состоянии. В силу принятых допущений о малости движений частиц жидкости и стенок резервуара граничные условия можно отнести к поверхностям  $\Sigma$  и  $S$ . На смачиваемой поверхности нормальная составляющая смещения жидкости равна соответствующей составляющей смещения стенки резервуара. На свободной поверхности жидкости она зависит еще и от смещения  $\xi(x, y, t)$  свободной поверхности жидкости в направлении оси  $Oz$  за счет ее волновых движений.

Учитывая сказанное, кинематическим граничным условиям для потенциала смещения жидкости  $\chi(x, y, z, t)$  можно придать следующую форму:

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_S = \vec{u} \cdot \vec{\nu} + (\vec{\theta} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nu} = \vec{u} \cdot \vec{\nu} + \vec{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nu}), \tag{3}$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_\Sigma = \vec{u} \cdot \vec{\nu} + \vec{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nu}) + \xi(x, y, t).$$

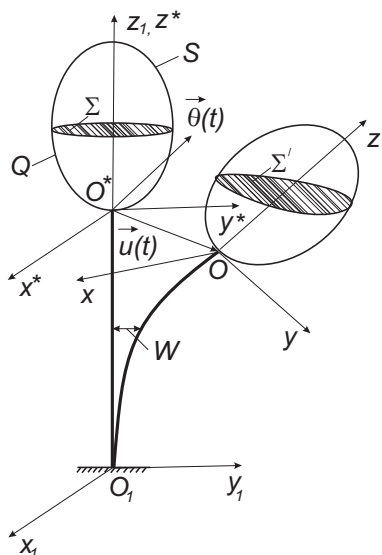


Рис. 1. Общий вид рассматриваемой системы

Здесь  $\vec{\nu}$  – орт внешней нормали к поверхности  $S$  или  $\Sigma$ ;  $\vec{r}$  – радиус-вектор произвольной точки  $s$  поверхности  $S$  или  $\Sigma$  относительно точки  $O$ .

Динамическое граничное условие на свободной поверхности жидкости устанавливается в предположении, что давление на ней равно постоянной величине  $p_0$ . Давление в произвольной точке жидкости  $p(x, y, z, t)$  можно определить из линеаризованного интеграла Лагранжа – Коши [7]:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + U + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  – массовая плотность жидкости;  $f(t)$  – произвольная функция времени;  $U$  – потенциал сил тяжести, который можно представить в виде

$$U = -\vec{g} \cdot \vec{r}^*, \quad \vec{r}^* = \vec{u} + \vec{r}, \quad (5)$$

где  $\vec{r}^*$  – радиус-вектор точки жидкости относительно начала  $O^*$  абсолютной системы координат;  $\vec{r}$  – радиус вектор этой же точки относительно точки  $O$ .

Таким образом, динамическое граничное условие на свободной поверхности жидкости можно записать следующим образом:

$$\left[ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \vec{g} \cdot \vec{r} + g\xi(x, y, t) \right]_{\Sigma} = f(t) - \frac{p_0}{\rho} + \vec{g} \cdot \vec{u}, \quad (6)$$

где  $g$  – модуль вектора  $\vec{g}$ . При выводе условия (6) было учтено, что радиус-вектор точки возмущенной свободной поверхности  $\Sigma'$  выражается через радиус-вектор соответствующей точки невозмущенной поверхности  $\Sigma$  по формуле

$$\vec{r}(x, y, z, t)|_{\Sigma'} = \vec{r}(x, y, z)|_{\Sigma} + \xi(x, y, t)\vec{i}_3. \quad (7)$$

Заметим, что правая часть уравнения (6) не зависит от координат на свободной поверхности, но зависит от времени  $t$ .

Кинематические граничные условия (3) позволяют представить потенциал смещений жидкости в следующем виде:

$$\chi(x, y, z, t) = \vec{u} \cdot \vec{\Phi} + \vec{\theta} \cdot \vec{\Psi} + \varphi. \quad (8)$$

Здесь  $\vec{\Phi}(x, y, z)$ ,  $\vec{\Psi}(x, y, z)$  и  $\varphi(x, y, z, t)$  – гармонические функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma \cup S} &= \vec{\nu}, & \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma \cup S} &= \vec{r} \times \vec{\nu}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_S &= 0, & \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} &= \xi(x, y, t). \end{aligned} \quad (9)$$

Решения для функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  можно выписать в явном виде:

$$\Phi_1 = x, \quad \Phi_2 = y, \quad \Phi_3 = z. \quad (10)$$

На функции  $\Psi_i(x, y, z)$  ( $i=1, 2, 3$ ) и  $\varphi(x, y, z, t)$  должны быть наложены дополнительные ограничения:

$$\int_{\Sigma \cup S} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} dS = 0, \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = 0, \quad (11)$$

вытекающие из условий разрешимости краевых задач Неймана для уравнения Лапласа. В справедливости выполнения первого условия можно убедиться, воспользовавшись формулами Гаусса – Остроградского.

Гармонические векторные функции  $\vec{\Phi}$  и  $\vec{\Psi}$  связаны с описанием поведения жидкости при поступательных и вращательных относительно точки  $O$  движениях резервуара для случаев, когда свободная поверхность жидкости остается невозмущенной.

Функцию  $\varphi(x, y, z, t)$ , характеризующую волновые движения жидкости, представим посредством разложения

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \varphi_n(x, y, z). \quad (12)$$

Здесь  $\varphi_n(x, y, z)$  – собственные функции спектральной задачи с параметром  $\kappa_n$  в граничном условии:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_n &= 0, & (x, y, z) &\in Q, \\ \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} - \kappa_n \varphi_n \right) \Big|_{\Sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} dS = 0, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \Big|_S = 0.$$

Краевая задача (13) описывает свободные колебания жидкости в неподвижном сосуде. При этом квадрат частоты  $\sigma_n^2$   $n$ -ой формы собственных колебаний жидкости связан с частотным параметром  $\kappa_n$  соотношением

$$\sigma_n^2 = g\kappa_n. \quad (14)$$

Известно, что совокупность собственных функций  $\varphi_n$  обладает свойством полноты в области  $\Sigma$  и удовлетворяет следующим соотношениям орто-

гональности [8]:

$$\int_{\Sigma} \varphi_n dS = 0, \quad \int_{\Sigma} \varphi_n \varphi_m dS = 0, \quad (15)$$

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} dS = 0 \quad (m \neq n).$$

Таким образом, окончательное выражение для потенциала смещений жидкости можно представить в виде

$$\chi = \vec{u} \cdot \vec{r}(x, y, z) + \vec{\theta} \cdot \vec{\Psi}(x, y, z) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) \varphi_i(x, y, z). \quad (16)$$

Для потенциала  $\chi(x, y, z, t)$  осталось выполнить динамическое условие на свободной поверхности жидкости. Для этого подставим выражение (16) в граничное условие (6), затем умножим его на  $\rho \partial \varphi_n / \partial \nu$  и проинтегрируем результат по невозмущенной поверхности  $\Sigma$ . Тогда с учетом условий ортогональности (15) получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат  $\beta_n(t)$ :

$$\mu_n (\ddot{\beta}_n + \sigma_n^2 \beta_n) + \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{\lambda}_n + \ddot{\vec{\theta}} \cdot \vec{\lambda}_{0n} - \vec{g} \cdot \vec{\lambda}_n = 0 \quad (17)$$

$$(n = 1, 2, \dots),$$

где коэффициенты этих уравнений определяются по формулам

$$\mu_n = \rho \int_{\Sigma} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS, \quad (18)$$

$$\vec{\lambda}_n = \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS, \quad \vec{\lambda}_{0n} = \rho \int_{\Sigma} \vec{\Psi} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS.$$

Здесь и везде далее двоеточие означает двукратное дифференцирование по времени  $t$ . Следует заметить, что третья компонента вектора  $\vec{\lambda}_n$  равна нулю.

Нахождение коэффициентов (18), которые в дальнейшем будем называть гидродинамическими, связано с решением неоднородной краевой задачи для потенциала Стокса – Жуковского  $\vec{\Omega}$  и однородной спектральной задачи (13) с параметром в граничном условии.

Интегрируя уравнения (17) с учетом задания формы свободной поверхности и распределения поля скоростей на ней в начальный момент времени определяем движение жидкости в резервуаре при заданных его поступательных и угловых ускорениях.

Полученные результаты позволяют перейти к вычислению сил и моментов, действующих на резервуар со стороны жидкости при заданном его движении. Их можно разделить на две группы. К первой из них отнесем статические силы  $\vec{P}^{(s)}$  и моменты  $\vec{M}_0^{(s)}$  относительно точки  $O$ , которые обусловлены массовыми силами и не связаны с ускорениями, возникающими при движении системы координат  $Oxyz$  относительно  $O^*x^*y^*z^*$ . Ко второй группе отнесем силы  $\vec{P}^{(d)}$  и моменты  $\vec{M}_0^{(d)}$  относительно точки  $O$ , которые действуют на резервуар со стороны жидкости за счет ее подвижности в емкости.

Векторы статических сил и моментов  $\vec{P}^{(s)}$  и  $\vec{M}_0^{(s)}$  определяются по формулам

$$\vec{P}^{(s)} = m_w \vec{g}, \quad \vec{M}_0^{(s)} = \vec{L} \times \vec{g}, \quad (19)$$

$$\vec{L} = \rho \int_{Q'} \vec{r} dQ',$$

где  $m_w$  – масса жидкости;  $Q'$  – область, занятая жидкостью в ее возмущенном состоянии.

Для нахождения вектора  $\vec{L}$  область  $Q'$  представим в виде суммы области  $Q$ , занимаемой жидкостью в ее невозмущенном состоянии, и области возмущенного слоя жидкости  $Q^*$ . Элементарный объем области  $Q^*$  можно вычислить как объем цилиндра с площадью основания  $d\Sigma$  и высотой  $\xi(x, y, t)$ :

$$dQ^* = \xi(x, y, t) d\Sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} d\Sigma.$$

С учетом этого выражения с точностью до величин первого порядка малости получаем:

$$\vec{L} = \rho \int_Q \vec{r} dQ + \rho \int_{Q^*} \vec{r} dQ^* =$$

$$= m_w \vec{r}_{c_w} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) \vec{\lambda}_i, \quad (20)$$

где  $\vec{r}_{c_w}$  – радиус-вектор относительно точки  $O$  центра масс затвердевшей жидкости:

$$\vec{r}_{c_w} = \frac{\rho}{m_w} \int_Q \vec{r} dQ.$$

Таким образом, вектор  $\vec{M}_0^{(s)}$  будет определяться по формуле

$$\vec{M}_0^{(s)} = m_w (\vec{r}_{c_w} \times \vec{g}) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) (\vec{\lambda}_i \times \vec{g}). \quad (21)$$

Перейдем к определению динамических составляющих главных векторов сил и моментов  $\vec{P}^{(d)}$  и  $\vec{M}_0^{(d)}$ , действующих на резервуар со стороны жидкости. Их можно определить на основе теорем об изменении количества движения жидкости в области  $Q$ . С точностью до членов первого порядка малости имеем [7]:

$$\vec{P}^{(d)} = -\frac{\partial \vec{K}}{\partial t}, \quad \vec{M}_0^{(d)} = -\frac{\partial \vec{G}_0}{\partial t}. \quad (22)$$

Входящие в эти выражения векторы количества движения  $\vec{K}$  и кинетического момента  $\vec{G}_0$  относительно точки  $O$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \rho \int_Q \vec{V} dQ = \rho \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \nabla \chi dQ, \\ \vec{G}_0 &= \rho \int_Q (\vec{r} \times \vec{V}) dQ = \rho \int_Q (\vec{r} \times \nabla) \frac{\partial \chi}{\partial t} dQ, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\vec{V}$  – вектор скорости частиц жидкости.

Подставив в выражения (23) потенциал смещений (16), получим

$$\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = \rho \int_Q \nabla \left( \ddot{u} \cdot \vec{r} + \ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi} + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \varphi_i \right) dQ, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{G}_0}{\partial t} &= \rho \int_Q \left[ \vec{r} \times \nabla (\ddot{u} \cdot \vec{r}) + \vec{r} \times \nabla (\ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \cdot (\vec{r} \times \nabla \varphi_i) \right] dQ. \end{aligned} \quad (25)$$

Преобразуем выражения (24) и (25) к более удобной форме, используя гармоничность функций  $\vec{r}$ ,  $\vec{\Psi}$  и  $\varphi$ , общую формулу Гаусса – Остроградского

$$\int_Q \Lambda(\nabla) dQ = \int_{S \cup \Sigma} \Lambda(\vec{\nu}) dS$$

и формулу Грина

$$\int_Q (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dQ = \int_{S \cup \Sigma} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) dS,$$

где  $\Lambda$  – линейный оператор;  $\varphi$  и  $\psi$  – непрерывные вместе с частными производными до второго порядка скалярные функции.

Вычислим сначала составляющие выраже-

ния (24):

$$\begin{aligned} \rho \int_Q \nabla (\ddot{u} \cdot \vec{r}) dQ &= \ddot{u} \rho \int_Q dQ = m_w \ddot{u}, \\ \rho \int_Q \nabla (\ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi}) dQ &= \rho \int_{S \cup \Sigma} \left( \ddot{\theta} \cdot \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \nu} \right) \vec{r} dS = \\ &= \rho \int_Q (\ddot{\theta} \times \vec{r}) dQ = m_w (\ddot{\theta} \times \vec{r}_{c_w}), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \rho \int_Q \nabla \varphi_i dQ &= \rho \int_{S \cup \Sigma} \vec{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} dS = \\ &= \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} d\Sigma = \vec{\lambda}_i. \end{aligned}$$

В этих обозначениях главный вектор гидродинамических сил, действующих на резервуар, примет следующий вид:

$$\vec{P}^{(d)} = -m_w \ddot{u} - m_w (\ddot{\theta} \times \vec{r}_{c_w}) - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \vec{\lambda}_i. \quad (27)$$

Теперь перейдем к вычислению составляющих выражения (25):

$$\begin{aligned} \rho \int_Q [\vec{r} \times \nabla (\ddot{u} \cdot \vec{r})] dQ &= \\ &= \rho \int_Q (\vec{r} \times \ddot{u}) dQ = m_w (\vec{r}_{c_w} \times \ddot{u}), \\ \rho \int_Q [\vec{r} \times \nabla (\ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi})] dQ &= \\ &= \rho \int_{S \cup \Sigma} (\ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi}) \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \nu} dS = \mathbf{I}^{(w)} \cdot \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\rho \int_Q (\vec{r} \times \nabla \varphi_i) dQ = \rho \int_{\Sigma} \vec{\Psi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} dS = \vec{\lambda}_{0i},$$

где  $\mathbf{I}^{(w)}$  – тензор инерции жидкости для гармонических функций с компонентами

$$I_{ij}^{(w)} = \int_{S \cup \Sigma} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu} \Psi_i dS. \quad (29)$$

Важно отметить симметрию тензора  $\mathbf{I}^{(w)}$ , вытекающую из формулы Грина.

С учетом формул (21), (22), (25) и (28), главный момент  $\vec{M}_0^{(w)}$  относительно точки  $O$  сил давлений,

действующих со стороны жидкости на резервуар, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0^{(w)} &= \vec{M}_0^{(d)} + \vec{M}_0^{(s)} = \\ &= -m_w(\vec{r}_{c_w} \times \ddot{\vec{u}}) - \mathbf{I}^{(w)} \cdot \ddot{\vec{\theta}} - \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \vec{\lambda}_{0i} + m_w(\vec{r}_{c_w} \times \vec{g}) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (\vec{\lambda}_i \times \vec{g}). \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, вектора  $\vec{P}^{(d)}$  и  $\vec{M}_0^{(d)}$ , характеризующие воздействие жидкости на подвижный резервуар, выражаются через гидродинамические коэффициенты (14), (18), (29), параметры движения резервуара и обобщенные координаты  $\beta_i(t)$ , характеризующие волновые движения жидкости.

Если резервуар осесимметричен, ограничимся рассмотрением его поперечного движения в плоскости  $O^*x^*y^*z^*$ . Этот выбор произволен, поскольку в данном случае все поперечные направления равноценны. Тогда представления для векторов  $\vec{u}$ ,  $\vec{\theta}$  и  $\vec{g}$  упрощаются:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_2 \vec{i}_2, & \vec{\theta} &= \vartheta_1 \vec{i}_1, \\ \vec{g} &= -g \vec{i}_3^* = -g \vartheta_1 \vec{i}_2 - g \vec{i}_3. \end{aligned} \quad (31)$$

Выпишем проекции векторов  $\vec{P}^{(w)} = \vec{P}^{(s)} + \vec{P}^{(d)}$  и  $\vec{M}_0^{(w)}$  на оси  $O^*y^*$  и  $Ox$  соответственно. Опустив несущественные теперь индексы при компонентах векторов (31), получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{O^*y^*}^{(w)} &= -m_w \ddot{u} + m_w z_{c_w} \ddot{\vartheta} - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_i, \\ \vec{M}_{0x}^{(w)} &= m_w z_{c_w} \ddot{u} - I^{(w)} \ddot{\vartheta} - \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_{0i} + m_w z_{c_w} g \vartheta - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i g \lambda_i. \end{aligned} \quad (32)$$

Гидродинамические коэффициенты здесь приобретают вид

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \rho \int_{\Sigma} y \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dS, & \lambda_{0i} &= \rho \int_{\Sigma} \Psi \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dS, \\ I^{(w)} &= \rho \int_{S \cup \Sigma} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} dS, \end{aligned} \quad (33)$$

где потенциал Стокса–Жуковского  $\Psi$  определяется из решения следующей неоднородной краевой

задачи Неймана:

$$\Delta \Psi = 0, \quad (x, y, z) \in Q, \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right|_{S \cup \Sigma} = y \cos(\nu, z) - z \cos(\nu, y),$$

а  $\varphi_i$  – собственные функции спектральной задачи (13), обладающие свойством симметричности относительно плоскости  $Oyz$  и несимметричности относительно плоскости  $Oxz$ .

Заметим, что последние два слагаемых в выражении для  $\vec{M}_{0x}^{(w)}$  представляют собой моменты жидкости, которые обусловлены массовыми силами, возникающими за счет поворота резервуара на малый угол  $\vartheta$  и деформации свободной поверхности жидкости.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОПЕРЕЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ, ЗАКРЕПЛЕННОГО НА УПРУГОЙ ОПОРЕ

Рассмотрим частично заполненный жидкостью резервуар в форме тела вращения, который жестко прикреплен к верхнему краю вертикально расположенной упругой опоры, обладающей осевой симметрией. При этом предполагается, что оси симметрии резервуара и опоры совпадают, а нижний край опоры жестко закреплен. Перейдем к выводу уравнений поперечных колебаний рассматриваемой механической системы под воздействием внешних распределенных и сосредоточенных нагрузок, приложенных к резервуару и упругой опоре.

В большинстве практически важных случаев упругая опора представляет собой тонкостенную оболочку вращения, равномерно подкрепленную расположенными на ее внутренней поверхности стрингерами и шпангоутами. Уравнения колебаний такой оболочки могут быть существенно упрощены для случая, когда продольные и поперечные ребра расположены достаточно часто. Тогда в результате усреднения жесткостных и массовых характеристик такая структура заменяется некоторой конструктивно ортотропной оболочкой, жесткостные и массовые характеристики которой зависят от свойств элементов подкрепляющего набора. Если же длина такой оболочки значительно больше характерного линейного размера ее поперечного сечения, то можно предположить, что все поперечные сечения оболочки при ее изгибных колебаниях остаются плоскими и перпендикулярными к деформированной оси. Исходя из этого, рассматриваемую опору можно отождествить с

тонкостенным упругим стержнем с меняющимися по длине площадью поперечного сечения  $F$ , экваториальным моментом инерции  $J$ , модулем упругости при растяжении  $E$  и массовой плотностью материала  $\rho_1$ . Границы применимости такой упрощенной постановки задачи на примере свободных колебаний изотропной цилиндрической оболочки установлены в статье [9]. Этот же вопрос в рамках различных теорий стержней обсуждался в работе [10], в которой рассматривались собственные колебания цилиндрической оболочки с присоединенным к одному из ее торцов абсолютно жестким телом конечных размеров.

Для описания колебаний стержня введем в рассмотрение еще одну систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  с началом, связанным с закрепленным краем стержня. Ось  $O_1z_1$  совместим с осью симметрии системы, а оси  $Ox_1$  и  $Oy_1$  расположим параллельно осям  $O^*x^*$  и  $O^*y^*$  соответственно. Предположим, что к резервуару приложена суммарная сила  $P_{O^*y^*}$ , действующая в направлении оси  $O^*y^*$  и суммарный момент  $M_{Ox}$  системы внешних сил относительно оси  $Ox$ . Будем также считать, что на стержень действует переменная поперечная нагрузка  $q(z_1, t)$  в направлении оси  $O_1y_1$ . Кроме того, опора подвержена действию сжимающей осевой силы, обусловленной весом резервуара с жидкостью и собственным весом стержня. Составим уравнения связанных колебаний в поперечной плоскости  $O_1y_1z_1$  стержня и прикрепленного к нему резервуара с жидкостью. Поскольку уравнения движения жидкости в резервуаре при его поступательных и угловых перемещениях были получены в предыдущем разделе, перейдем к выводу уравнений движения стержня в плоскости  $O_1y_1z_1$ . Во внешнюю для него нагрузку следует включить результирующие силы и моменты, действующие со стороны резервуара с жидкостью. При выводе указанных уравнений будем пользоваться вариационным принципом возможных перемещений, который в сочетании с принципом Даламбера может быть применен и в динамических задачах. Обозначим через  $w(z_1, t)$  прогиб нейтральной линии стержня в сечении  $z_1$  в направлении оси  $O_1y_1$  под воздействием приложенных сил, а через  $l$  – длину стержня. В рассматриваемом случае компоненты векторов  $\vec{u}(t)$  и  $\vec{v}(t)$ , характеризующих движение резервуара, будут иметь вид, аналогичный (31).

Перемещение резервуара в направлении оси  $Oy$  и угол его поворота относительно оси  $Ox$  можно выразить через функцию  $w(z_1, t)$  и ее производную

в сечении  $z_1 = l$ :

$$u = w(l, t), \quad \vartheta = -\left. \frac{\partial w}{\partial z_1} \right|_{z_1=l}. \quad (35)$$

Если исходная форма стержня – равновесная, то, согласно принципу возможных перемещений, должно выполняться равенство вариации потенциальной энергии деформации изгиба стержня  $\delta W$  и суммы работ внешних сил на возможных перемещениях  $\delta w$  стержня:

$$\delta W = \sum_{i=1}^5 \delta A_i, \quad (36)$$

где

$$\delta W = \int_0^l EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial z_1^2} dz_1.$$

Работа  $\delta A_1$  сил инерции и массовых сил, действующих на корпус резервуара на возможных его перемещениях может быть вычислена следующим образом:

$$\delta A_1 = - \int_{Q_0} \rho_0 \ddot{u}^* \cdot \delta \vec{u}^* dQ + \int_{Q_0} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{g}) dQ, \quad (37)$$

где  $\rho_0$  – массовая плотность материала, из которого изготовлен резервуар;  $Q_0$  – объем резервуара;  $\vec{u}^* = \vec{u} + (\vec{v} \times \vec{r})$ . После вычисления объемных интегралов в соотношении (37) с учетом разложений смещений по осям соответствующих систем координат выражение для  $\delta A_1$  примет вид

$$\begin{aligned} \delta A_1 = & -I^{(0)} \ddot{\vartheta} \delta \vartheta + m_0 z_{c_0} (\ddot{\delta} u + \ddot{u} \delta \vartheta) - \\ & - m_0 \ddot{u} \delta u + g m_0 z_{c_0} \vartheta \delta \vartheta, \end{aligned} \quad (38)$$

$$I^{(0)} = \rho \int_{Q_0} (y^2 + z^2) dQ.$$

Здесь  $I^{(0)}$  – момент инерции корпуса резервуара относительно оси  $Ox$ ;  $m_0$  и  $z_{c_0}$  – масса резервуара и координата его центра тяжести на оси  $Oz$ .

Работа  $\delta A_2$  сил инерции стержня и распределенной нагрузки  $q(z_1, t)$  на его возможном перемещении  $\delta w$  может быть представлена выражением

$$\delta A_2 = - \int_0^l \rho_1 F \ddot{w} \delta w dz_1 + \int_0^l q(z_1, t) \delta w dz_1, \quad (39)$$

где  $\rho_1$  – массовая плотность материала стержня.

Вариация работы  $\delta A_3$  сжимающей силы  $N(z_1)$  может быть вычислена по формуле

$$\delta A_3 = \int_0^l N(z) \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w_1}{\partial z_1} dz_1. \quad (40)$$

Здесь сила  $N(z)$ , не меняющая своего направления и своей величины в процессе колебания системы, имеет следующий вид:

$$N(z_1) = mg + \rho_1 F g (l - z_1), \quad (41)$$

где  $m = m_0 + m_w$  – масса резервуара с жидкостью.

Вариация работы  $\delta A_4$  приложенных к резервуару суммарных внешних сил  $P_{O^*y^*}$  и моментов  $M_{Ox}$  относительно оси  $Ox$  определяется выражением

$$\delta A_4 = P_{O^*y^*} \delta u + M_{Ox} \delta \vartheta. \quad (42)$$

С учетом формул (32) вариация работы  $\delta A_5$  сил, действующих на резервуар со стороны жидкости, примет вид

$$\begin{aligned} \delta A_5 = & \left( -m_w \ddot{u} + m_w z_{c_w} \ddot{\vartheta} - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_i \right) \delta u + \\ & + \left( m_w z_{c_w} \ddot{u} - I^{(w)} \ddot{\vartheta} - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_{0i} + \right. \\ & \left. + g m_w z_{c_w} \vartheta - g \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \lambda_i \right) \delta \vartheta. \end{aligned} \quad (43)$$

Собрав полученные результаты вместе, вариационное уравнение (36) с учетом кинематических соотношений (35) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[ EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial z_1^2} - N(z) \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \right. \\ & \left. + \rho_1 F \ddot{w} \delta w - q(z_1, t) \delta w \right] dz_1 + \\ & + \left[ I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + m \ddot{w} \delta w + \right. \\ & + m z_c \left( \ddot{w} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \delta w \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \left( \lambda_i \delta w - \lambda_{0i} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right) - \\ & - g m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - g \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \lambda_i \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - \\ & \left. - P_{O^*y^*} \delta w + M_{Ox} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right]_{z_1=l} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь  $I = I^{(0)} + I^{(w)}$  – момент инерции относительно оси  $Ox$  резервуара и подвижной жидкости;  $z_c$  – координата центра масс системы “резервуар – жидкость” на оси  $Oz$ , вычисляемая по формуле

$$z_c = \frac{m_0 z_{c_0} + m_w z_{c_w}}{m_0 + m_w}.$$

Преобразуем интегралы, входящие в уравнение (44) и содержащие производные от вариации прогиба стержня. С помощью интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial z_1^2} = \\ & = \left[ EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_1} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right) \delta w \right]_0^l + \\ & + \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right) \delta w dz_1, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^l N(z) \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} dz_1 = - \left[ N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \delta w \right]_0^l + \\ & + \int_0^l \frac{\partial}{\partial z_1} \left( N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) \delta w dz_1, \end{aligned}$$

где в силу условий закрепления нижнего края стержня  $\delta w$  и  $\partial \delta w / \partial z_1$  при  $z_1 = 0$  равны нулю.

Подставляя выражения (45) в вариационное уравнение (44) и учитывая произвольность вариации  $\delta w$  в области интегрирования, а также произвольность вариаций  $\delta w$  и  $\partial \delta w / \partial z_1$  при  $z_1 = l$ , получаем следующую краевую задачу относительно прогиба стержня  $w(z, t)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left( N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) + \\ & + \rho_1 F \ddot{w} = q(z_1, t), \end{aligned} \quad (46)$$

$$z_1 \in (0, l),$$



$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial z_1} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right) + N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \right]_{z_1=l} &= \\ &= \left( m\ddot{w} + mz_c \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \right)_{z_1=l} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_i - P_{O^*y^*}, \\ \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right)_{z_1=l} &= \\ &= \left( gmz_c \frac{\partial w}{\partial z_1} - mz_c \ddot{w} - I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \right)_{z_1=l} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_{0i} + g \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \lambda_i - M_{Ox}, \\ w(0, t) = \frac{\partial w(z_1, t)}{\partial z_1} \Big|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Уравнение (46) относительно функции  $w(z_1, t)$  – известное уравнение изгибных колебаний сжатого осевой силой  $N(z_1)$  стержня, к которому приложена распределенная нагрузка  $q(z_1, t)$ . Поскольку поперечная сила и изгибающий момент стержня в некотором его сечении определяются по формулам

$$\begin{aligned} Q &= - \left[ \frac{\partial}{\partial z_1} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right) + N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \right], \\ M &= -EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2}, \end{aligned}$$

то первое и второе граничные условия в (47) выражают собой соответственно условия равновесия сил и моментов, действующих в сечении стержня при  $z=l$ .

В эти граничные условия входят заранее неизвестные обобщенные координаты  $\beta_i(t)$ , характеризующие волновые движения жидкости в подвижном резервуаре. Поэтому к уравнениям (46), (47) необходимо еще добавить уравнения (17) с учетом кинематических соотношений (35):

$$\begin{aligned} \mu_n (\ddot{\beta}_n + \sigma_n^2 \beta_n) + \lambda_n \ddot{w}(l, t) - \\ - \lambda_{0n} \frac{\partial \ddot{w}(l, t)}{\partial z_1} - g \lambda_n \frac{\partial w(l, t)}{\partial z_1} = 0, \end{aligned} \tag{48}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Уравнения (46)–(48) вместе с начальными условиями, наложенными на свободную поверхность жидкости и стержень, полностью определяют

взаимосвязанные колебания механической системы “стержень – резервуар – жидкость” под воздействием приложенных к ней внешних сил и моментов. Следует заметить, что уравнение (48) можно получить также из вариационного уравнения (36), добавив в его правую часть работу сил давления на свободной поверхности жидкости на ее возможных перемещениях.

Для того, чтобы в дальнейшем упростить расчеты при исследовании движения рассматриваемой механической системы, целесообразно в вариационном уравнении (44) и уравнениях (46)–(48) перейти к безразмерным величинам. Используя теорию размерностей и выбрав для системы характерный линейный размер  $R_0$ , запишем следующие формулы перехода от размерных к безразмерным величинам (они обозначены черточкой сверху):

$$\begin{aligned} \varphi_n &= R_0 \bar{\varphi}_n, & \Psi &= R_0^2 \bar{\Psi}, \\ w &= R_0 \bar{w}, & t^2 &= \frac{R_0}{g} \bar{t}^2, \\ \sigma_n^2 &= \frac{g}{R_0} \bar{\sigma}_n^2, & \mu_n &= \rho R_0^3 \bar{\mu}_n, \\ I &= \rho R_0^5 \bar{I}, & \bar{I} &= \frac{\rho_0}{\rho} I^{(0)} + I^{(w)}, \\ \beta_n &= R_0 \bar{\beta}_n, & \lambda_n &= \rho R_0^3 \bar{\lambda}_n, \\ EJ &= E_0 J_0 \bar{E} \bar{J}, & N &= \frac{E_0 J_0}{R_0^2} \bar{N}, \\ \bar{N} &= D \left( \bar{m} + \frac{\rho_1}{\rho} (\bar{l} - \bar{z}_1) \right), & D &= \frac{\rho R_0^5 g}{E_0 J_0}, \\ m &= \rho R_0^3 \bar{m}, & \bar{m} &= \left( \frac{\rho_0}{\rho} \bar{m}_0 + \bar{m}_w \right), \\ F &= R_0^2 \bar{F}, & q &= \frac{E_0 J_0}{R_0^3} \bar{q}, \\ P_{O^*y^*} &= \frac{E_0 J_0}{R_0^2} \bar{P}_{O^*y^*}, & M_{Ox} &= \frac{E_0 J_0}{R_0} \bar{M}_{Ox}. \end{aligned} \tag{49}$$

Здесь  $E_0 J_0$  – изгибная жесткость стержня в его характерном сечении.

С учетом этих формул вариационное уравнение (44) можно представить в безразмерном виде (черточки над безразмерными величинами для

упрощения записи в дальнейшем опускаем):

$$\int_0^l \left[ EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial z_1^2} - N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\rho_1}{\rho} DF \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w - q(z_1, t) \delta w \right] dz_1 +$$

$$+ \left\{ D \left[ I \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + m z_c \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} \delta w \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \beta_i}{dt^2} \left( \lambda_i \delta w - \lambda_{0i} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right) - m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \lambda_i \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right] - P_{O^*y^*} \delta w + M_{Ox} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right\}_{z_1=l} = 0. \quad (50)$$

В свою очередь безразмерное уравнение (48) принимает следующую форму:

$$\mu_n \left( \frac{d^2 \beta_n}{dt^2} + \sigma_n^2 \beta_n \right) + \left( \lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \lambda_{0n} \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} - \lambda_n \frac{\partial w}{\partial z_1} \right)_{z_1=l} = 0. \quad (51)$$

В дальнейшем вариационное уравнение (50) будет использовано для построения приближенных решений задач динамики рассматриваемой системы.

В уравнения (50) и (51) входят гидродинамические коэффициенты  $\sigma_n^2$ ,  $\lambda_n$ ,  $\lambda_{0n}$  и  $I^{(w)}$ , нахождение которых связано с решениями однородной спектральной задачи с параметром в граничном условии (13) и неоднородной краевой задачи Неймана (34) для потенциала Стокса – Жуковского  $\Psi$ . Поэтому перед дальнейшим исследованием динамики рассматриваемой системы упомянутые коэффициенты необходимо определить.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ РЕЗЕРВУАРА В ФОРМЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Краевые задачи (13) и (34) для резервуаров, имеющих осевую симметрию, удобно решать в цилиндрической системе координат

$$x = r \cos \eta, \quad y = r \sin \eta, \quad z = z, \quad (52)$$

где  $r$  и  $\eta$  – полярные координаты проекции произвольной точки на плоскость  $Oxy$ .

Представляя функцию  $\varphi(x, y, z)$  краевой задачи (13) в виде

$$\varphi(x, y, z) = f(\eta) \psi(r, z), \quad (53)$$

получаем следующие уравнения относительно функций  $\psi(r, z)$  и  $f(\eta)$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} \psi = 0, \quad (r, z) \in G,$$

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - \kappa \psi \right)_{L_0} = 0, \quad \left( \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)_{L_1} = 0, \quad (54)$$

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + m^2 f = 0.$$

Здесь  $L_0$  и  $L_1$  – линии пересечения меридионального сечения со свободной поверхностью  $\Sigma$  и смачиваемой поверхностью  $S$  соответственно;  $G$  – область, ограниченная линиями  $L_0, L_1$  и осью  $Oz$ .

Уравнение относительно функции  $f(\eta)$  решается в тригонометрических функциях. Условие периодичности функции  $\varphi(r, z, \eta)$  по переменной  $\eta$  с периодом  $2\pi$  приводит к целочисленным значениям параметра  $m$ . В дальнейшем займемся изучением несимметричных колебаний жидкости в плоскости  $Oyz$ , для которых главный вектор гидродинамических сил, приложенных к движущемуся резервуару, отличен от нуля, т. е. коэффициенты  $\lambda_n$  и  $\lambda_{0n}$  не обращаются тождественно в нуль. Колебания такого класса соответствуют значению  $m=1$ . Таким образом, при движении резервуара в плоскости  $Oyz$  функцию  $\varphi(r, z, \eta)$  будем представлять в виде

$$\varphi(r, z, \eta) = \psi(r, z) \sin \eta. \quad (55)$$

В силу осевой симметрии резервуара функцию  $\Psi(r, z, \eta)$  краевой задачи (34) можно искать в форме

$$\Psi(r, z, \eta) = F(r, z) \sin \eta. \quad (56)$$

Тогда для функции  $F(r, z)$  получаем двумерную неоднородную краевую задачу Неймана в области меридионального сечения резервуара:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} F = 0, \quad (r, z) \in G, \quad (57)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \nu} \right)_{L_0 \cup L_1} = r \cos(\nu, z) - z \cos(\nu, r).$$

К граничным условиям задач (56) и (57) следует добавить условие ограниченности соответствующих функций на оси  $Oz$ .

Разработке методов решения рассматриваемых краевых задач для различных форм резервуаров, в том числе и содержащих конструктивные устройства в виде ребер-перегородок, посвящены монографии [3, 8, 12].

Ниже будем рассматривать резервуар в форме прямого кругового цилиндра с плоским днищем. В качестве характерного линейного размера системы выберем радиус цилиндра, а начало цилиндрической системы координат поместим в плоскости днища. В этом случае решение краевой задачи (54) можно получить методом разделения переменных. При этом безразмерные функции  $\varphi_n(r, z, \eta)$  будут иметь следующий вид:

$$\varphi_n(r, z, \eta) = \frac{\text{ch}(K_n z)}{K_n \text{sh}(K_n h)} \frac{J_1(K_n r)}{J_1(K_n)} \sin \eta, \quad (58)$$

где  $J_1(x)$  – функции Бесселя первого рода и первого порядка;  $K_n$  –  $n$ -ый корень уравнения  $J_1'(K_n) = 0$ ;  $h$  – глубина жидкости в резервуаре. Собственные значения  $\kappa_n$  задачи (54) определяются по формуле

$$\kappa_n = \sigma_n^2 = K_n \text{th}(K_n h). \quad (59)$$

Решения (58) нормированы таким образом, что

$$\left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right|_{z=h, r=1, \eta=\pi/2} = 1.$$

Принятая нормировка позволяет рассматривать обобщенные координаты  $\beta_n(t)$  в разложениях (12) как смещения точки невозмущенной свободной поверхности жидкости с координатами  $r=1, \eta=\pi/2$  в направлении оси  $Oz$  при  $n$ -ой форме собственных колебаний жидкости.

При нахождении функции  $F(r, z)$ , удовлетворяющей краевой задаче (57), выделяется слагаемое, пропорциональное  $(-zr)$ , а оставшаяся часть записывается в виде разложения в обобщенный ряд Фурье–Бесселя. Поэтому функция  $\Psi(r, z, \eta)$  может быть представлена в следующей форме:

$$\Psi(r, z, \eta) = -zr \sin \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(K_n^2 - 1)} Z_n(z) \frac{J_1(K_n r)}{J_1(K_n)} \sin \eta, \quad (60)$$

где

$$Z_n(z) = \frac{\text{sh}[K_n(z - h/2)]}{K_n \text{ch}(K_n h/2)}.$$

Полученные решения задач (13) и (34) позволяют определить безразмерные гидродинамические

коэффициенты для резервуара в форме кругового цилиндра:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= K_n \text{th}(K_n h), \\ \mu_n &= \frac{\pi(K_n^2 - 1)}{2K_n^3 \text{th}(K_n h)}, \\ \lambda_n &= \frac{\pi}{K_n^2}, \\ \lambda_{0n} &= \frac{\pi}{K_n^2} \left[ h - \frac{2}{K_n} \text{th} \left( \frac{K_n h}{2} \right) \right], \\ I^{(w)} &= \pi \left[ \frac{1}{3} h^3 - \frac{3}{4} h + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{K_n^3 (K_n^2 - 1)} \text{th} \left( \frac{K_n h}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

Для резервуара, имеющего форму произвольного тела вращения, определение гидродинамических коэффициентов сопряжено с применением приближенных методов решения соответствующих краевых задач.

#### 4. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ ”СТЕРЖЕНЬ – РЕЗЕРВУАР – ЖИДКОСТЬ”

Рассмотрим решение спектральной задачи, описывающей собственные взаимосвязанные колебания стержня и прикрепленного к нему резервуара, который частично заполнен жидкостью. Ее математическую формулировку получаем из уравнений (46)–(48), в которых необходимо положить

$$\begin{aligned} q(z_1, t) &= P_{O^*y^*} = M_{Ox} = 0, \\ w(z_1, t) &= \exp^{i\omega t} \eta(z_1), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\beta_n(t) = \exp^{i\omega t} b_n.$$

После перехода к безразмерным величинам по формулам (49), получим следующую задачу отно-

сительно функции  $\eta(z_1)$  и чисел  $b_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz_1^2} \left( EJ \frac{d^2 \eta}{dz_1^2} \right) + \frac{d}{dz_1} \left( N \frac{d\eta}{dz_1} \right) - \\ - \omega^2 \frac{\rho_1}{\rho} DF \eta = 0, \quad z_1 \in (0, l), \\ \left( EJ \frac{d^2 \eta}{dz_1^2} \right)_{z_1=l} = \\ = \omega^2 D \left[ \left( mz_c \eta + I \frac{d\eta}{dz_1} \right)_{z_1=l} - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{\infty} b_i \lambda_{0i} \right] + Dmz_c \frac{d\eta}{dz_1} \Big|_{z_1=l} + D \sum_{i=1}^{\infty} b_i \lambda_i, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dz_1} \left( EJ \frac{d^2 \eta}{dz_1^2} \right) + N \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=l} = \\ = -\omega^2 D \left[ m \left( \eta + z_c \frac{d\eta}{dz_1} \right)_{z_1=l} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \lambda_i \right], \end{aligned}$$

$$\eta(0) = \frac{d\eta}{dz_1} \Big|_{z_1=0} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mu_i (\sigma_i^2 - \omega^2) b_i + \\ + \left[ \omega^2 \left( \lambda_{0i} \frac{d\eta}{dz_1} - \lambda_i \eta \right) - \lambda_i \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=l} = 0, \end{aligned} \quad (64)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

Краевая задача (63) вместе с уравнениями (64), связывающими обобщенные координаты  $b_i$  со значениями прогиба стержня и его производной в сечении  $z_1=l$ , образуют однородную спектральную задачу. Ее собственные числа  $\omega_j^2$  являются квадратами частот собственных колебаний рассматриваемой системы, а собственные функции  $\eta_j(z_1)$  – формами свободных колебаний стержня. В соответствии с разложением (12) числа  $b_i^{(j)}$  характеризуют волновые движения жидкости в резервуаре для  $j$ -ой формы собственных колебаний системы.

Точное решение задачи (63), (64) можно построить только для случаев, когда входящее в соотношения (63) уравнение имеет постоянные коэффициенты. Выполнение этого требования сильно сужает класс пригодных для рассмотрения конструкций. Кроме того, указанное решение имеет достаточно громоздкий вид, что затрудняет его применение при конкретных расчетах. Исходя из этого, далее будем строить приближенное решение

задачи (63), (64) с использованием ее эквивалентной вариационной формулировки. После подстановки формул (62) в соотношение (50), вариационное уравнение для задачи (63) примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[ EJ \frac{d^2 \eta}{dz_1^2} \frac{d^2 \delta \eta}{dz_1^2} - N(z_1) \frac{d\eta}{dz_1} \frac{d\delta \eta}{dz_1} \right] dz_1 - \\ - mz_c D \left( \frac{d\eta}{dz_1} \frac{d\delta \eta}{dz_1} \right)_{z_1=l} - \\ - \omega^2 D \int_0^l \frac{\rho_1}{\rho} F \eta \delta \eta dz_1 - \\ - \omega^2 D \left[ I \frac{d\eta}{dz_1} \frac{d\delta \eta}{dz_1} + mz_c \left( \eta \frac{d\delta \eta}{dz_1} + \frac{d\eta}{dz_1} \delta \eta \right) + \right. \\ \left. + m\eta \delta \eta + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left( \lambda_i \delta \eta - \lambda_{0i} \frac{d\delta \eta}{dz_1} \right) \right]_{z_1=l} - \\ - D \sum_{i=1}^{\infty} b_i \lambda_i \frac{d\delta \eta}{dz_1} \Big|_{z_1=l} = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Поскольку силовые граничные условия в формулировке (63) являются естественными граничными условиями для соответствующего квадратичного функционала, решение задачи (65) будем искать на классе функций, которые подчинены лишь кинематическим граничным условиям при  $z_1=0$ . Это существенно упрощает построение систем базисных функций при решении исходного вариационного уравнения методом Ритца.

Представим функцию  $\eta(z_1)$  в виде следующего отрезка обобщенного ряда:

$$\eta(z_1) = \sum_{q=1}^{m_0} a_j W_j(z_1). \quad (66)$$

Здесь  $a_j$  – подлежащие определению в дальнейшем постоянные;  $W_j(z_1)$  – координатные функции, которые имеют вид

$$W_j(z_1) = z_1^2 P_j \left( \frac{2z_1}{l} - 1 \right); \quad (67)$$

где  $P_j(x)$  – смещенные на единицу по индексу  $j$  многочлены Лежандра. Значения функций  $P_j(x)$  и их производных без заметного накопления вычислительных погрешностей можно найти по следу-

ющим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 1, & P_2(x) &= x, \\ P_{j+2}(x) &= \frac{1}{j+1} [(2j+1)xP_{j+1}(x) - jP_j(x)], \\ P'_{j+2}(x) &= xP'_{j+1}(x) + (j+1)P_{j+1}(x), \\ P''_{j+2}(x) &= xP''_{j+1}(x) + (j+2)P'_{j+1}(x). \end{aligned} \quad (68)$$

Заметим, что первоначально координатные функции строили на основе полиномиального представления решения, с удовлетворением граничных условий задачи при  $z_1=0$ . Замена в выражении (67) полученных таким образом степенных функций полиномами Лежандра, являющимися их линейной комбинацией, обусловлена тем, что в отличие от степенного базиса, предлагаемые координатные функции позволяют удерживать в разложении (66) достаточно большое количество членов, при котором не нарушается устойчивость вычислительного процесса. Это позволяет получать требуемые результаты с высокой точностью.

Подставим разложения (66) в уравнения (64) и (65), для симметрии предварительно умножив первое из них на  $D$ , и положим в соотношении (64)  $\delta\eta(z_1) = W_i(z_1)$ . Ограничиваясь конечным набором постоянных  $b_i$  ( $i=1, 2, \dots, n_0$ ), получаем однородную алгебраическую систему

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{B}) \vec{X} = 0, \quad (69)$$

в которой вектор-столбец  $\vec{X}$  имеет координаты  $\{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{n_0}\}$ .

Обозначим элементы симметричных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  через  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{ij}$  соответственно. Они определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= \int_0^l \left( EJ \frac{d^2 W_j}{dz_1^2} \frac{d^2 W_i}{dz_1^2} - \right. \\ &\quad \left. - N(z_1) \frac{dW_j}{dz_1} \frac{dW_i}{dz_1} \right) dz_1 - \\ &\quad - m z_c D \left( \frac{dW_j}{dz_1} \frac{dW_i}{dz_1} \right)_{z_1=l}, \\ &\quad i, j = 1, 2, \dots, m_0; \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j+m_0} &= -D \lambda_j \left( \frac{dW_i}{dz_1} \right)_{z_1=l}, \\ &\quad i = 1, 2, \dots, m_0, \quad j = 1, 2, \dots, n_0; \end{aligned}$$

$$\alpha_{i+m_0,j+m_0} = D \mu_i \sigma_i^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_0;$$

$$\begin{aligned} \beta_{i,j} &= D \int_0^l \frac{\rho_1}{\rho} F W_j W_i dz_1 + \\ &\quad + D \left[ m z_c \left( W_j \frac{dW_i}{dz_1} + \frac{dW_j}{dz_1} W_i \right) + \right. \\ &\quad \left. + I \frac{dW_j}{dz_1} \frac{dW_i}{dz_1} + m W_i W_j \right]_{z_1=l}, \\ &\quad i, j = 1, 2, \dots, m_0; \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \beta_{i,j+m_0} &= D \left( \lambda_j W_i - \lambda_{0j} \frac{dW_i}{dz_1} \right)_{z_1=l}, \\ &\quad i = 1, 2, \dots, m_0, \quad j = 1, 2, \dots, n_0; \end{aligned}$$

$$\beta_{i+m_0,j+m_0} = D \mu_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_0.$$

Здесь  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера; элементы матриц, лежащие ниже главных диагоналей, находим из условий симметрии.

Таким образом, определение частот и форм собственных колебаний системы “стержень – резервуар – жидкость” свелось к решению обобщенной алгебраической задачи на собственные значения (69). Предложенный подход применим для осесимметричных стержней с переменными упруго-массовыми характеристиками.

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть тонкостенный стержень, к верхнему торцу которого прикреплен цилиндрический резервуар, – однородный и имеет цилиндрическую форму. Введем следующие обозначения:  $r_0$  и  $\delta$  – радиус и толщина стержня;  $a = r_0/R_0$  – радиус стержня, отнесенный к радиусу резервуара;  $l_1 = l/r_0$ ,  $\delta_1 = \delta/r_0$  – длина и толщина стержня, отнесенные к его радиусу. Выберем в качестве характерного линейного размера рассматриваемой механической системы радиус резервуара  $R_0$ . Безразмерные площадь поперечного сечения, его экваториальный момент инерции и коэффициент  $D$  (формулы (49)) представим в следующем виде:

$$F = 2\pi a^2 \delta_1, \quad J = \pi a^4 \delta_1,$$

$$D = D_1 \frac{1}{\pi a^4 \delta_1}, \quad D_1 = \frac{\rho g R_0}{E_0}.$$

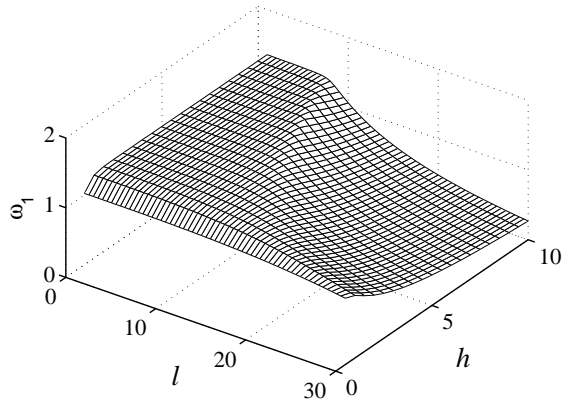
Приведем некоторые результаты расчетов собственных колебаний рассматриваемой механической системы, иллюстрирующие эффективность

Табл. 1. Значения частот  $\omega_i$  связанных колебаний рассматриваемой системы при  $h=1, l_1=20$  в зависимости от числа членов  $m_0$  и  $n_0$  в разложениях (66) и (12) соответственно

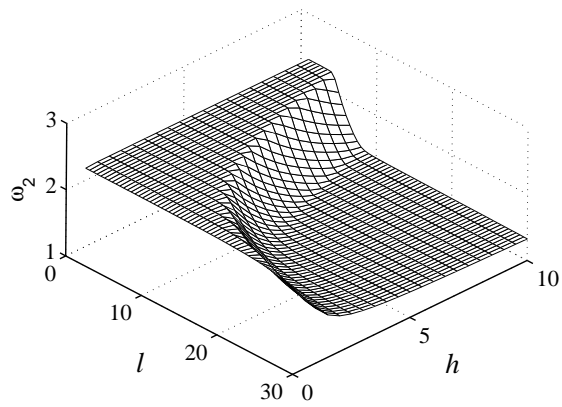
$m_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_{n_0+1}$	$\omega_{n_0+2}$	$\omega_{n_0+3}$
$n_0 = 1$							
3	1.3086905				6.8813844	84.34535	0.0000000
4	1.3086905				6.8813577	84.20592	301.67328
5	1.3086905				6.8813575	84.14868	299.39230
6	1.3086905				6.8813575	84.14739	296.54805
7	1.3086905				6.8813575	84.14727	296.49416
8	1.3086905				6.8813575	84.14727	296.46383
9	1.3086905				6.8813575	84.14727	296.46365
10	1.3086905				6.8813575	84.14727	296.46360
$n_0 = 2$							
3	1.3086864	2.3069021			6.9330735	84.87793	0.0000000
4	1.3086864	2.3069021			6.9330459	84.73512	305.50586
5	1.3086864	2.3069021			6.9330457	84.67563	303.38190
6	1.3086864	2.3069021			6.9330457	84.67431	300.29854
7	1.3086864	2.3069021			6.9330457	84.67418	300.24745
8	1.3086864	2.3069021			6.9330457	84.67418	300.21354
9	1.3086873	2.3069021			6.9330457	84.67418	300.21336
10	1.3086864	2.3069021			6.9330457	84.67418	300.21330
$n_0 = 3$							
3	1.3086859	2.3069007	2.9207033		6.9459150	85.03830	0.0000000
4	1.3086859	2.3069007	2.9207033		6.9458872	84.89454	306.55349
5	1.3086859	2.3069007	2.9207033		6.9458870	84.83435	304.47495
6	1.3086859	2.3069007	2.9207033		6.9458870	84.83303	301.32484
7	1.3086863	2.3069007	2.9207032		6.9458870	84.83290	301.27459
8	1.3086864	2.3069007	2.9207032		6.9458870	84.83290	301.23966
9	1.3086864	2.3069006	2.9207032		6.9458870	84.83290	301.23949
10	1.3086864	2.3069006	2.9207032		6.9458870	84.83290	301.23949
$n_0 = 4$							
3	1.3086858	2.3069004	2.9207026	3.4207562	6.9511865	85.10640	0.0000000
4	1.3086858	2.3069004	2.9207026	3.4207562	6.9511586	84.96226	306.98395
5	1.3086858	2.3069004	2.9207026	3.4207562	6.9511584	84.90177	304.92436
6	1.3086858	2.3069005	2.9207026	3.4207563	6.9511584	84.90045	301.74666
7	1.3086858	2.3069005	2.9207026	3.4207563	6.9511584	84.90032	301.69676
8	1.3086858	2.3069005	2.9207026	3.4207563	6.9511584	84.90032	301.66141
9	1.3086858	2.3069005	2.9207025	3.4207563	6.9511584	84.90032	301.66123
10	1.3086858	2.3069005	2.9207026	3.4207563	6.9511584	84.90032	301.66117

Табл. 2. Значения частот  $\omega_{n_0+1}$  связанных колебаний рассматриваемой системы при  $h=1, l_1=20, m_0=10$  в зависимости от числа членов  $n_0$  в разложениях (66)

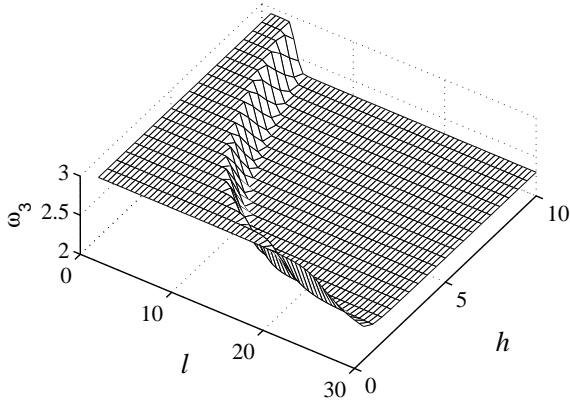
$n_0$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\omega_{n_0+1}$	6.954	6.955	6.956	6.957	6.959	6.960	6.960	6.960	6.960	6.961	6.962
$\omega_{n_0+2}$	84.93	84.96	84.97	84.98	84.98	84.99	84.99	84.99	84.99	85.00	85.00
$\omega_{n_0+3}$	301.9	302.0	302.1	302.1	302.1	302.2	302.2	302.2	302.2	302.2	302.2



a

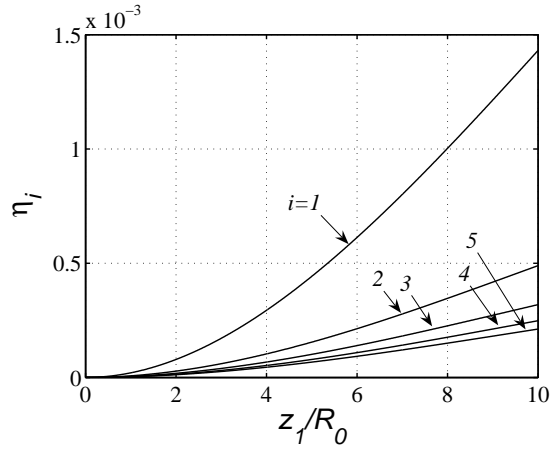


б

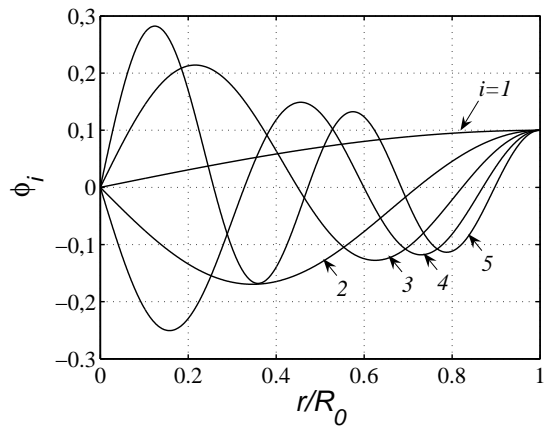


в

Рис. 2. Поведение частот  $\omega_i$  связанных колебаний системы в зависимости от длины стержня  $l$  и глубины заполнения резервуара жидкостью  $h$ :  
а -  $\omega_1$ ; б -  $\omega_2$ ; в -  $\omega_3$



a



б

Рис. 3. Нижние формы связанных колебаний стержня  $\eta_i$  и жидкости  $\varphi_i$  ( $i=1, \dots, 5$ ) при  $h=1$  и  $l_1=20$ :  
а -  $\eta_i$ ; б -  $\varphi_i$

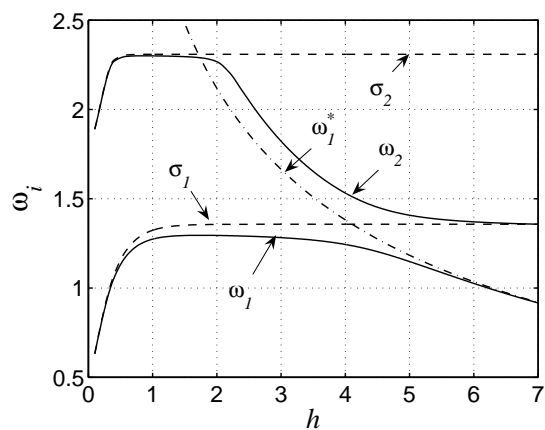


Рис. 4. Зависимость связанных и парциальных двух нижних частот системы от относительной глубины жидкости в резервуаре

предложенного метода решения спектральной задачи и влияние колебаний жидкости в резервуаре на частоты и формы колебаний системы в целом. При расчетах массой резервуара пренебрегали. Кроме того, полагалось, что

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 7.8, \quad D_1 = 0.476 \cdot 10^{-7}, \quad a = 0.5, \quad \delta_1 = 0.01.$$

Глубина жидкости в резервуаре  $h$  и длина стержня  $l$  варьировались.

В табл. 1 и 2 представлены зависимости частот  $\omega_i$  связанных колебаний жидкости и упругого стержня при  $h=1$  и  $l_1=20$  в зависимости от числа членов  $m_0$  и  $n_0$  в разложениях (66) и (12). Эти данные свидетельствуют о том, что спектр системы состоит из двух типов частот. К первому из них относятся частоты, которые обусловлены в основном колебаниями жидкости на свободной поверхности. Эти частоты будем называть частотами “преимущественно волновых колебаний”. Ко второму типу будем относить частоты, которые обусловлены в основном упругими и инерционными свойствами стержня и прикрепленной на его торце массы жидкости, занимающей конечный объем. В данном примере при  $n_0 \leq 15$  частоты второго типа начинаются с  $\omega_{n_0+1}$ . С увеличением  $n_0$  частоты первого и второго типов начинают перемежаться. Расчеты показывают, что для получения младших частот  $\omega_k$  первого типа с точностью до пяти значащих цифр необходимо положить  $n_0 = k+1$  при удержании  $m_0 = 10$  членов в разложении (66). Для получения трех частот второго типа с такой же точностью при  $m_0 = 10$  необходимо удерживать до 30 членов в разложении (12). Увеличение длины стержня не приводит к ухудшению установленной скорости сходимости решений.

Поведение первых трех низших частот  $\omega_i$  связанных колебаний системы в зависимости от длины стержня  $l$  и глубины жидкости в резервуаре  $h$ , отнесенных к  $R_0$ , показано на рис. 2. На рис. 3 представлены низшие формы связанных колебаний стержня  $\eta_i$  и жидкости  $\varphi_i$  ( $i=1, \dots, 5$ ), полученные при  $h=1$  и  $l_1=20$ . Графики показывают, что первым пяти формам колебаний свободной поверхности, соответствующим “преимущественно волновым колебаниям жидкости”, отвечают колебания стержня по его первой форме с различными амплитудными значениями. Высшие формы колебаний стержня проявляются на втором типе частотного спектра системы.

Далее рассмотрим два спектра частот:  $\{\sigma_i\}$  и  $\{\omega_i^*\}$ . Первый из них совпадает с набором собственных частот системы при абсолютно жесткой опоре, а второй представляет собой частоты коле-

баний упругого стержня с присоединенным к нему резервуаром конечных размеров, поверхность жидкости в котором закрыта жесткой крышкой. Такие частоты можно получить из алгебраической системы (69), положив в ней  $n_0=0$ . В этом случае исходная система с  $n=n_0+m_0$  степенями свободы после наложения на нее  $n_0$  связей переходит в систему с  $m_0$  степенями свободы. Введение частот  $\{\sigma_i\}$  и  $\{\omega_i^*\}$  соответствует разделению исходной механической системы на две подсистемы, называемые парциальными системами. Понятие о парциальных системах позволяет сформулировать некоторые общие выводы о влиянии параметров системы на ее собственные частоты. Один из них можно выразить в виде неравенств

$$\omega_i \leq \omega_i^* \leq \omega_{i+n_0}, \quad i = 1, 2, \dots, m_0,$$

т. е. парциальные частоты всегда лежат в интервале, ограниченном частотами связанной системы.

Более подробную информацию о поведении связанных и парциальных частот в зависимости от безразмерной глубины жидкости в резервуаре дает рис. 4. Результаты расчетов получены для стержня, относительная длина которого равна  $l_1=30$ . Сплошные линии на рисунке соответствуют двум низшим частотам связанных колебаний системы  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а штриховые – парциальным частотам  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Здесь же штрих-пунктирной линией обозначена зависимость парциальной частоты  $\omega_1^*$  от параметра  $h$ . Численные значения этих частот для некоторых значений  $h$  приведены в табл. 3. Из графика и таблицы видно, что отсутствие связанности между парциальными системами достигается в данном примере при  $h < 1$ . При этом низшие частоты связанных колебаний системы близки к частотам  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  первой парциальной системы. Если  $h \rightarrow 0$ , то  $\omega_1^*$  стремится к частоте колебаний стержня с одним заземленным и другим свободным торцом. Слабая связанность между парциальными частотами наблюдается при  $h > 5$ . Для этого случая первая частота системы  $\omega_1$  близка к первой частоте  $\omega_1^*$  второй парциальной системы. В то же время, при близости парциальных частот между собой связанные частоты заметно отличаются от их значений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Построена общая математическая модель динамики упругих стержней, несущих резервуары, частично заполненные жидкостью.
2. Разработан вариационный метод решения спектральной задачи, описывающей свобод-



Табл. 3. Значения связанных и парциальных частот системы при некоторых безразмерных глубинах жидкости в резервуаре

$h$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\omega_1^*$	$\omega_2^*$
0.2	0.8007	2.0454	0.8056	2.0498	5.8171	43.908
0.6	1.1831	2.2972	1.2153	2.3051	3.8676	39.627
1.0	1.2735	2.2999	1.3232	2.3089	3.0533	37.927
1.4	1.2926	2.2969	1.3491	2.3090	2.5742	36.750
1.8	1.2950	2.2867	1.3551	2.3090	2.2477	35.573
2.2	1.2929	2.2046	1.3565	2.3090	2.0060	34.165
2.6	1.2886	1.9985	1.3568	2.3090	1.8173	32.457
3.0	1.2820	1.8219	1.3569	2.3090	1.6645	30.489
3.4	1.2716	1.6826	1.3569	2.3090	1.5374	28.368
3.8	1.2552	1.5748	1.3569	2.3090	1.4295	26.224
4.2	1.2298	1.4951	1.3569	2.3090	1.3364	24.161
4.6	1.1934	1.4411	1.3569	2.3090	1.2551	22.249
5.0	1.1481	1.4076	1.3569	2.3090	1.1833	20.517

ные колебания стержня и прикрепленного к его верхнему торцу резервуара с жидкостью.

- Анализ полученных решений свидетельствует об эффективности предложенного алгоритма. Следует подчеркнуть, что рассматриваемая математическая модель имеет смысл только для низших форм поперечных колебаний, поскольку при повышении частоты собственных колебаний системы утрачивают силу допущения, используемые при описании колебаний стержня.
- Расчеты показывают, что эффект волновых движений жидкости в резервуаре при его поперечных колебаниях может быть весьма существенным и в общем случае нельзя им пренебрегать.
- Sweedan A. M. I.* Equivalent mechanical model for seismic forces in combined tanks subjected to vertical earthquake excitation // *Thin-Wall. Struct.*– 2009, **47**.– P. 942–952.
- Dutta S., Mandal A., Dutta S.C.* Soilstructure interaction in dynamic behaviour of elevated tanks with alternate frame staging configurations // *J. Sound Vib.*– 2004, **277**.– P. 825–853.
- Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью.– М.: Машиностроение, 1968.– 532 с.
- Микишев Г. Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов.– М.: Машиностроение, 1978.– 148 с.
- Нариманов Г. С.* О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью // *Прикладная математика и механика.*– 1956.– **20**, N 1.– С. 21–38.
- Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тел с полостями, содержащими жидкость.– М.: Наука, 1965.– 439 с.
- Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика: том 1.– М.: Гостехиздат, 1948.– 535 с.
- Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях.– К.: Наук. думка, 1969.– 250 с.
- Forsberg K.* Axisymmetric and beam-type vibrations of thin cylindrical shells // *AIAA J.*– 1969, **2**.– P. 221–227.
- Trotsenko Yu. V.* Frequencies and modes of vibration of a cylindrical shell with attached rigid body // *J. Sound Vib.*– 2006, **292**.– P. 535–551.
- Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем.– М.: Физ.-мат. л-ра, 1963.– 880 с.
- Троценко В. А.* Колебания жидкости в подвижных полостях с перегородками.– К.: Ин-т мат. НАН Украины, 2006.– 320 с.