

УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С НЕЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ СВОЙСТВАМИ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

В. Г. КАРНАУХОВ*, В. И. КОЗЛОВ*,
В. М. СИЧКО**, М. И. ВЕРТЕЛЕЦКИЙ**

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

**Николаевский государственный университет им. В. А. Сухомлиńskiego

Получено 04.10.2010

Рассмотрена задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругих оболочек вращения с независимыми от температуры свойствами с учетом поперечных деформаций. Разработан конечно-элементный метод решения этой задачи. В качестве примера рассчитаны амплитудно- и температурно-частотные динамические характеристики цилиндрической панели при колебаниях на первой изгибной моде для случаев шарнирного и жесткого опирания торцов. Исследовано влияние механических граничных условий на указанные динамические характеристики.

Розглянуто задачу про вимушені резонансні коливання й дисипативний розігрів в'язкоупругих оболонок обертання з незалежними від температури властивостями з врахуванням поперечних деформацій. Розроблено скінченно-елементний метод розв'язування цієї задачі. Як приклад, розраховані амплітудно- та температурно-частотні динамічні характеристики циліндричної панелі при коливаннях на першій згинній моді для випадків шарнірного та жорсткого опирання торців панелі. Досліджено вплив механічних граничних умов на вказані динамічні характеристики.

A problem on forced harmonic vibrations and dissipative heating of viscoelastic shells of revolution with temperature-independent properties and allowance of shear strain has been considered. A finite-element method for solving of the above problem has been developed. As an example, the amplitude and temperature characteristics of the cylindrical panel vibrating on the first bending mode have been calculated for the cases of simply supported and rigidly clamped edges. The effect of mechanical boundary conditions on the mentioned dynamic characteristics has been studied.

ВВЕДЕНИЕ

Оболочки вращения из вязкоупругих материалов и композитов на их основе широко используются в современной технике в качестве конструктивных элементов [1, 2]. При действии механических нагрузок с частотами, близкими к резонансной, в них возникают опасные для работоспособности конструкции колебания. При этом в оболочке за счет диссипативного разогрева может наступить существенное повышение температуры и разрушение из-за достижения ею некоторых критических точек, например, точки плавления или деструкции материала [3].

Для предотвращения таких нежелательных явлений применяются различные пассивные и активные методы демпфирования резонансных колебаний. При пассивном демпфировании в конструкцию включаются компоненты (как правило, слой) с высокими гистерезисными потерями. С этой же целью при изготовлении элементов конструкций применяются композиционные материалы на полимерной основе с зернистой, волокни-

стой и слоистой структурой. Достаточно полный обзор исследований по пассивному демпфированию колебаний элементов конструкций представлен в работах [4, 5].

Высокий уровень гистерезисных потерь, присущих полимерным материалам, приводит к необходимости учета температурных эффектов, связанных с явлением так называемого диссипативного разогрева – повышения температуры в результате превращения механической энергии в тепловую. При расчете же на прочность тонкостенных элементов конструкций из композитных материалов возникает необходимость в разработке уточненных теорий, учитывающих, например, поперечные сдвиги [1, 6]. Таким образом, при гармоническом нагружении для расчета динамических характеристик тонкостенных элементов из полимеров и композитов на их основе необходимо учитывать связанность механических и тепловых полей, что существенно усложняет постановку задачи и ее решение. Диссипативный разогрев оказывает существенное влияние на все стороны механического поведения таких объектов – распреде-

ление механических полей, амплитудно-частотные характеристики, их статическую и динамическую устойчивость, эффективность пассивного и активного демпфирования колебаний и пр. [7, 8]

Для математического описания колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных элементов конструкций из вязкоупругих и полимерных материалов используются модели разного уровня строгости с использованием классических гипотез Кирхгофа–Лява и уточненных гипотез типа Тимошенко. Один из эффективных подходов к учету деформаций сдвига разработан в монографии [9]. Он будет использован и в данной работе для расчета таких динамических характеристик, как амплитудно- и температурно-частотная характеристика вязкоупругих оболочек вращения.

Свойства материала считаются независимыми от температуры. В этом случае решение исходной нелинейной задачи сводится к последовательному решению трех задач:

- 1) задачи о вынужденных колебаниях вязкоупругой цилиндрической панели при моногармоническом механическом нагружении;
- 2) расчету диссипативной функции по известному механическому состоянию тела;
- 3) задачи теплопроводности с известным источником тепла, определяемом диссипативной функцией.

Для моделирования механического поведения неупругого материала при моногармонических колебаниях использовалась концепция комплексных параметров, разработанная в монографии [10]. Задачи механики и теплопроводности решались методом конечных элементов. В качестве примера рассчитаны динамические характеристики цилиндрической одно- и трехслойной панели для случаев шарнирного и жесткого защемления ее торцов. Исследовано влияние механических граничных условий на ее динамические характеристики.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехслойную оболочку вращения, составленную из двух внешних слоев одинаковой толщины h_1 с одинаковыми вязкоупругими характеристиками и внутреннего вязкоупругого слоя толщиной h_2 . Оболочка отнесена к ортогональной системе координат (s, θ, z) [6]. В качестве базисной поверхности выберем срединную поверхность внутреннего слоя. Для сведения трехмерной задачи к

двумерной принимаем, что $\sigma_{zz} = 0$. При этом комплексные уравнения состояния для k -го слоя принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ss}^k &= B_{11}^k \varepsilon_{ss}^k + B_{12}^k \varepsilon_{\theta\theta}^k, \\ \sigma_{\theta\theta}^k &= B_{12}^k \varepsilon_{ss}^k + B_{22}^k \varepsilon_{\theta\theta}^k, \\ \sigma_{s\theta}^k &= 2G_{12}^k \varepsilon_{s\theta}^k, \\ \sigma_{sz} &= 2G_{13}^k \varepsilon_{sz}, \\ \sigma_{\theta z} &= 2G_{23}^k \varepsilon_{\theta z}, \\ k &= 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{1}$$

где для трансверсально-изотропного материала

$$\begin{aligned}B_{11}^k &= \frac{E_{11}^k}{1 - (\nu^k)^2}; \\ B_{12}^k &= \nu^k B_{11}^k; \\ B_{22}^k &= B_{11}^k; \\ G_{12}^k &= \frac{1 - \nu^k}{2} B_{11}^k; \\ G_{13}^k &= G_{23}^k.\end{aligned}\tag{2}$$

Входящие в уравнения состояния (1) сдвиговые деформации $\varepsilon_{sz}, \varepsilon_{\theta z}$ в пределах каждого слоя аппроксимируются квадратичными функциями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sz}^k &= \frac{1}{2} u_1(s, \theta) q^k(z), \\ \varepsilon_{\theta z}^k &= \frac{1}{2} v_1(s, \theta) q^k(z), \\ q^1(z) &= \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1} \left(1 - \frac{z^2}{a_0^2} \right), \\ q^2(z) &= \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{z^2}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) \right], \\ q^3(z) &= \frac{B_{11}^3}{2G_{13}^3} \left(1 - \frac{z^2}{a_3^2} \right),\end{aligned}\tag{3}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 – координаты поверхностей слоев оболочки; $u_1(s, \theta), v_1(s, \theta)$ – искомые функции.

В дальнейшем будем рассматривать такие оболочки, для которых можно пренебречь по сравнению с единицей отношениями z/R_1 и z/R_2 (R_1 и R_2 – радиусы главных кривизн поверхности отсчета). Тогда выражения для компонент вектора пе-

ремещений будут такими:

$$\begin{aligned} u^k &= u_0 - \frac{\partial w}{\partial s} z + u_1 f^k(z), \\ v^k &= v_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} z + v_1 f^k(z), \\ w^k &= w. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь u_0 и v_0 – тангенциальные перемещения поверхности $z=0$; w – нормальный прогиб оболочки;

$$\begin{aligned} f^1(z) &= \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1} \left(z - \frac{z^3}{3a_0^2} \right) + \\ &+ \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[\frac{2}{3} \frac{a_1^3}{a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) a_1 \right] - \\ &- \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1} \left(1 - \frac{a_1^2}{3a_0^2} \right) a_1; \end{aligned}$$

$$f^2(z) = \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[\frac{a_1^2}{a_0^2} z - \frac{z^3}{3a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) z \right]; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f^3(z) &= \frac{B_{11}^3}{2G_{13}^3} \left(z - \frac{z^3}{a_3^2} \right) - \\ &- \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[\frac{2}{3} \frac{a_1^3}{a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) a_1 \right] + \\ &+ \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1} \left(1 - \frac{a_1^2}{3a_0^2} \right) a_1. \end{aligned}$$

При этом следует учесть, что в рассматриваемом случае $a_3 = -a_0$, $a_2 = -a_1$, $B_{11}^1 = B_{11}^3$, $G_{13}^1 = G_{13}^3$. Используя соотношения Коши и зависимости (3), (4), компоненты тензора деформаций k -го слоя оболочки запишем как

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss}^k &= \varepsilon_{ss}^0 + \chi_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z), \\ \varepsilon_{\theta\theta}^k &= \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \chi_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z), \\ \varepsilon_{s\theta}^k &= \varepsilon_{s\theta}^0 + \chi_{s\theta} z + \delta_{s\theta} f^k(z), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1}; \\ \chi_{ss} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \\ \delta_{ss} &= \frac{\partial u_1}{\partial s}; \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r} u_0 + \frac{w}{R_2}; \\ \chi_{\theta\theta} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \right); \\ \delta_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r} u_1; \\ \varepsilon_{s\theta}^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{r} v_0 \right); \\ \chi_{s\theta} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial s} - \frac{\cos \phi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \\ \delta_{s\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{r} v_1 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя выражения (7) в соотношения (1) и учитывая формулы (3), (5), запишем уравнения состояния в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^k &= B_{11}^k [\varepsilon_{ss}^0 + \chi_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z)] + \\ &+ B_{12}^k [\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \chi_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z)], \\ \sigma_{\theta\theta}^k &= B_{12}^k [\varepsilon_{ss}^0 + \chi_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z)] + \\ &+ B_{11}^k [\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \chi_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z)], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sigma_{s\theta}^k = 2G_{12}^k [\varepsilon_{s\theta}^0 + \chi_{s\theta} z + \delta_{s\theta} f^k(z)],$$

$$\sigma_{sz}^k = 2G_{13}^k \varepsilon_{sz}^k = G_{13}^k u_1 q^k(z),$$

$$\sigma_{\theta z}^k = 2G_{13}^k \varepsilon_{\theta z}^k = G_{13}^k v_1 q^k(z).$$

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ

Как уже было отмечено, для исследования термомеханического поведения вязкоупругой оболочки вращения применяется метод конечных элементов с использованием вариационной формулировки. При этом исходная задача механики сводится к нахождению стационарных точек двумерного

функціонала [11–13]

$$\delta \mathfrak{A}(s, z, \theta, t) = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = & \frac{1}{2} \iint_F \left\{ c_{11} [(\varepsilon_{ss}^0)^2 + (\varepsilon_{\theta\theta}^0)^2] + \right. \\ & + 2c_{12} \varepsilon_{ss}^0 \varepsilon_{\theta\theta}^0 + 4c_{44} (\varepsilon_{s\theta}^0)^2 + c_{55} (u_1^2 + v_1^2) + \\ & + D_{11} \chi_{ss}^2 + 2D_{12} \chi_{ss} \chi_{\theta\theta} + D_{11} \chi_{\theta\theta}^2 + \\ & + 4D_{44} \chi_{s\theta}^2 + 8D_{44}^X \chi_{s\theta} \delta_{s\theta} + D_{11}^\delta \delta_{ss}^2 + \\ & + 2D_{12}^\delta \delta_{ss} \delta_{\theta\theta} + D_{11}^\delta \delta_{\theta\theta}^2 + 4D_{44}^\delta \delta_{s\theta}^2 - \\ & - \omega^2 \rho_1 (u_0^2 + v_0^2 + w^2) - \omega^2 \rho_3 (u_1^2 + v_1^2) - \\ & \left. - \omega^2 \rho_2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + 2\omega^2 \rho_4 \left(\frac{\partial w}{\partial s} u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} v_1 \right) - P_z w \right\} r ds d\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} B_{ij}^k dz; \\ D_{ij} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} B_{ij}^k z^2 dz; \\ D_{ij}^X &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} B_{ij}^k z f^k(z) dz; \\ D_{ij}^\delta &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} B_{ij}^k (f^k(z))^2 dz; \\ c_{44} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12} dz; \\ D_{44} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k z^2 dz; \\ D_{44}^X &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k z f^k(z) dz; \\ D_{44}^\delta &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k (f^k(z))^2 dz; \\ c_{55} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{13} (q^k(z))^2 dz; \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k dz; \\ \rho_2 &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z^2 dz; \\ \rho_3 &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z f^k(z) dz; \\ \rho_4 &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k (f^k(z))^2 dz \end{aligned} \quad (11b)$$

(ρ^k – плотности материалов слоев; P_z – интенсивность поверхностной нагрузки). В выражениях (11a), (11b) по индексу $k = 1, 2, 3$ следует проводить суммирование.

Для определения температуры диссипативного разогрева используется трехмерное вариационное уравнение энергии [12, 13]

$$\begin{aligned} & \iiint_T \left[c_T^k \rho^k \frac{\partial T}{\partial t} \delta T + \right. \\ & \left. + \lambda_T^k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \delta \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial s} \delta \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \delta \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \right. \\ & \left. + Q_k \delta T \right] r ds d\theta dz + \\ & + \iint_F \alpha_T (T - T_c) \delta T dF = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где c_T^k – коэффициент теплоемкости материала слоя оболочки; α_T – коэффициент конвективного теплообмена на поверхности F со средой с температурой T_c ; λ_T^k – коэффициент теплопроводности материала слоя; t – время.

Для сведения трехмерной вариационной задачи к двумерной принимаем, что нормальная составляющая q_z теплового потока изменяется по толщине оболочки по линейному закону:

$$q_z = q_0 + q_1 z = -\lambda_z^k \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (13)$$

В этом случае температура в каждом k -ом слое оболочки аппроксимируется квадратичным полиномом по толщинной координате z :

$$T = p_0 T_1 + p_1 T_2 + p_2 T_3, \quad (14)$$

где

$$p_0 = 1;$$

$$p_1 = \frac{\bar{\lambda}}{H^2} \int_{a_0}^z \frac{dz}{\lambda^k};$$

$$p_2 = \frac{\bar{\lambda}}{H^3} \int_{a_0}^z \frac{z dz}{\lambda_z^k};$$

$$\bar{\lambda} = \int_{a_0}^{a_1} \lambda^1 dz + \int_{a_1}^{a_2} \lambda^2 dz + \int_{a_2}^{a_3} \lambda^3 dz;$$

H – толщина оболочки.

Решение вариационной задачи (9) находится методом конечных элементов с использованием двенадцатиузловых изопараметрических четырехугольных элементов с аппроксимацией перемещений и геометрии оболочки в пределах четырехугольника полиномами третьей степени [12–14]. При этом прогиб в пределах элемента аппроксимируется бикубическими полиномами Эрмита

$$w = \sum_{i=1}^4 L_i w_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+4} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+8} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+12} \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i, \quad (15)$$

где w_i , $(\partial w / \partial s)_i$, $(\partial w / r \partial \theta)_i$, $(\partial^2 w / r \partial s \partial \theta)_i$ – амплитудные значения прогиба и его производных в узловых точках; L_k – полиномы Эрмита [11–14]:

$$L_1 = \frac{1}{16}(2 - 3\xi + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3);$$

$$L_2 = \frac{1}{16}(2 + 3\xi - \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3);$$

$$L_3 = \frac{1}{16}(2 + 3\xi - \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3);$$

$$L_4 = \frac{1}{16}(2 - 3\xi + \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3);$$

$$L_5 = \frac{l_{12}}{32}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3);$$

$$L_6 = \frac{l_{12}}{32}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3);$$

$$L_7 = \frac{l_{34}}{32}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3);$$

$$L_8 = \frac{l_{34}}{32}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3);$$

$$L_9 = \frac{l_{14}}{32}(2 - 3\xi + \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3);$$

$$L_{10} = \frac{l_{23}}{32}(2 + 3\xi - \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3);$$

$$L_{11} = \frac{l_{23}}{32}(2 + 3\xi - \xi^3)(-1 - \eta - \eta^2 + \eta^3);$$

$$L_{12} = \frac{l_{14}}{32}(2 - 3\xi - \xi^3)(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3);$$

$$L_{13} = \frac{l_{12}l_{14}}{64}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3);$$

$$L_{14} = \frac{l_{12}l_{23}}{64}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3);$$

$$L_{15} = \frac{l_{23}l_{34}}{64}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3);$$

$$L_{16} = \frac{l_{14}l_{34}}{64}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3);$$

l_{ij} – расстояние между соответствующими вершинами элемента.

Тангенциальные составляющие перемещений срединной поверхности и сдвиговые деформации оболочки в пределах элемента аппроксимируются кубическими полиномами

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{i=1}^{12} N_i u_0^i, \\ v_0 &= \sum_{i=1}^{12} N_i v_0^i, \\ u_1 &= \sum_{i=1}^{12} N_i u_1^i, \\ v_1 &= \sum_{i=1}^{12} N_i v_1^i, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$N_1 = \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 - \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10];$$

$$N_2 = \frac{1}{32}(1 + \xi)(1 - \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10];$$

$$N_3 = \frac{1}{32}(1 + \xi)(1 + \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10];$$

$$N_4 = \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 + \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10];$$

$$N_5 = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)(1 - \eta);$$

$$N_6 = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)(1 - \eta);$$

$$N_7 = \frac{9}{32}(1 + \xi)(1 - \eta^2)(1 - 3\eta);$$

$$N_8 = \frac{9}{32}(1 + \xi)(1 - \eta^2)(1 + 3\eta);$$

$$N_9 = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)(1 + \eta);$$

$$N_{10} = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)(1 + \eta);$$

$$N_{11} = \frac{9}{32}(1 - \xi)(1 - \eta^2)(1 + 3\eta);$$

$$N_{12} = \frac{9}{32}(1 - \xi)(1 - \eta^2)(1 - 3\eta).$$

В качестве глобальной системы координат, в которой объединяются все конечные элементы, используется цилиндрическая система координат (r, θ, s) . Меридиональная (s) и осевая (x) координаты связаны соотношениями

$$ds = Adx, \quad A = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2}.$$

В качестве локальной системы координат, в которой определяются аппроксимирующие функции и производится интегрирование, используется нормализованная система координат (ξ, η) . При этом связь между координатами s, r, θ и координатами ξ, η определяется зависимостями

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^{12} N_i s_i, \\ r &= \sum_{i=1}^{12} N_i r_i, \\ \theta &= \sum_{i=1}^{12} N_i \theta_i, \end{aligned} \quad (17)$$

где s_i, r_i, θ_i – узловые значения координат.

Соотношения (15) и (16) показывают, что используемый элемент имеет 64 степени свободы: 8 степеней $(w, \partial w/\partial s, u, v, \partial w/r\partial\theta, \partial^2 w/r\partial s\partial\theta, u_0, v_0)$ в каждой узловой точке и 4 степени свободы (u_0, v_0, u_1, v_1) в каждом узле, расположенном на сторонах четырехугольника.

Представим компоненты механического нагружения, которые действуют в пределах элемента, в виде разложения

$$P_i = \sum_{i=1}^{12} N_i P_i. \quad (18)$$

Учтя выражения для перемещений и деформаций (4), (7), из условия стационарности функционала (9) получим комплексную систему линейных алгебраических уравнений относительно тангенциальных перемещений, деформаций сдвига, прогиба и его производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_j} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_j} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i^s} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i^s} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1^j} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_1^j} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом дифференцирование по $w, \partial w/\partial s, \partial w/r\partial\theta, \partial^2 w/r\partial s\partial\theta$ проводится только в угловых точках, а по u_0, v_0, u_1, v_1 – во всех точках элемента. Комплексные коэффициенты системы алгебраических уравнений (19) выражаются через механические и геометрические характеристики оболочки, а правые части определяются путем разложения механической нагрузки по системе аппроксимирующих функций. Такой подход позволяет получить решение линейной задачи для слоистых оболочек вращения при механическом нагружении.

Двумерное вариационное уравнение энергии решается на той же сетке конечных элементов. При этом производная по времени dT/dt не варьируется и заменяется выражением

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}.$$

В дальнейшем используем неявную схему решения уравнения энергии.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

На основе разработанного подхода рассчитаны амплитудно- и температурно-частотные динамические характеристики одно- и трехслойной вязкоупругой цилиндрической панели с шарнирным и жестким закреплением торцов. Панель имеет следующие геометрические

и физические свойства (внутренний слой – 2, внешние слои – 1 и 3): размеры $R=0.1$ м, $h_1=h_3=0.0005$ м, $h_2=0.009$ м, $a=b=0.05$ м; плотности $\rho_1=\rho_3=2700$ кг/м³, $\rho_2=929$ кг/м³; модули упругости $E_1=E_3=7.3 \cdot 10^{10}$ Па, а для внутреннего слоя – $G'_2=794 \cdot 10^6$, $G''_2=73.1 \cdot 10^6$; коэффициенты теплопроводности $\lambda_1=\lambda_3=0.2 \cdot 10^3$ Вт/(м · К), $\lambda_2=0.5$ Вт/(м · К). Расчеты проводились для поверхностного давления $P_0=0.13 \cdot 10^5$ Па.

На рис. 1, 2 представлены амплитудно- и температурно-частотные характеристики однослойной цилиндрической панели с шарнирно и жестко закрепленными торцами (здесь и далее, кривые 1 и 2 соответственно) в окрестности первого резонанса. Аналогичные результаты для трехслойной цилиндрической панели показаны на рис. 3, 4. Как видно, при одном и том же уровне нагружения амплитуда и температура диссипативного разогрева для шарнирного опирания оказываются более высокими по сравнению со случаем жесткого защемления торцов. Из представленных числовых результатов следует, что для жесткого защемления при одних и тех же условиях нагружения пассивное демпфирование оказывается более эффективным для шарнирного закрепления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием уточненной теории, учитывающей поперечные деформации сдвига, предложен конечно-элементный метод решения задач о колебаниях и диссипативном разогреве одно- и трехслойных вязкоупругих оболочек вращения. Механическое поведение вязкоупругого материала моделировалось на основе концепции комплексных характеристик. Рассмотрен случай независимых от температуры свойств материалов. Соответствующая связанная задача сведена к:

- 1) решению линейной динамической задачи о колебаниях оболочки из вязкоупругого материала;
- 2) расчету диссипативной функции по известному решению задачи механики;
- 3) решению линейной задачи теплопроводности с известным источником тепла.

В качестве примера рассчитаны амплитудно- и температурно-частотные зависимости для одно- и трехслойной цилиндрической панели при действии на нее гармонического поверхностного давления с

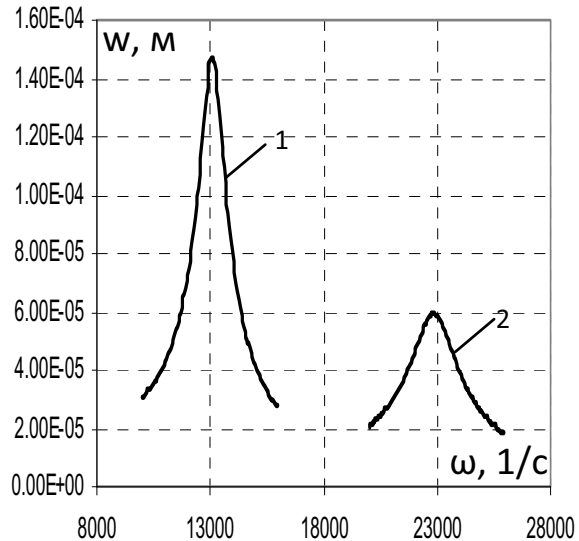


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика однослойной цилиндрической панели:
1 – шарнирное закрепление торцов,
2 – жесткое закрепление торцов

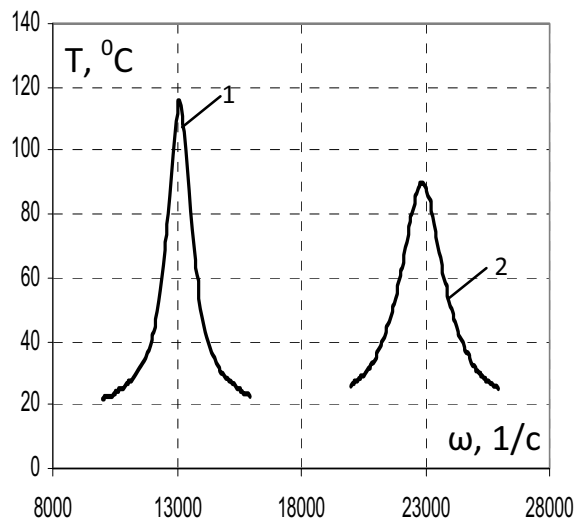


Рис. 2. Температурно-частотная характеристика однослойной цилиндрической панели:
1 – шарнирное закрепление торцов,
2 – жесткое закрепление торцов

частотой, близкой к первой резонансной. Исследовано влияние механических граничных условий на указанные динамические характеристики. Показано, что граничные условия существенно влияют на динамические характеристики и на эффективность пассивного демпфирования колебаний панели.

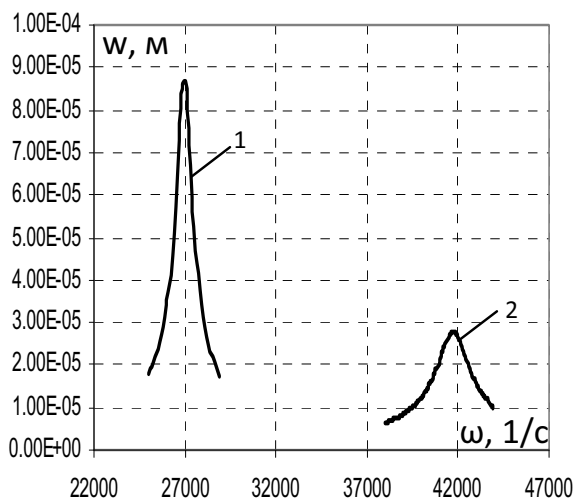


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика трехслойной цилиндрической панели:

1 – шарнирное закрепление торцов,
2 – жесткое закрепление торцов

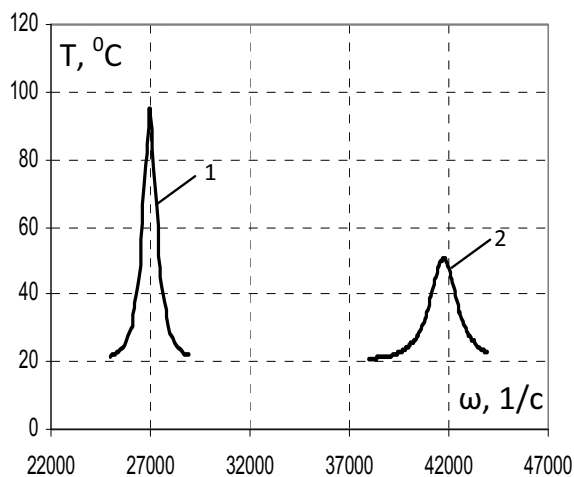


Рис. 4. Температурно-частотная характеристика трехслойной цилиндрической панели:

1 – шарнирное закрепление торцов,
2 – жесткое закрепление торцов

1. *Механика композитов: в 12-ти томах / Под общ. ред. А. Н. Гузя.*– К.: АСК, 1992–2005.
2. *Hamidzaden H. R., Jazar R. N. Vibrations of thick cylindrical structurals.*– New York: Springer, 2010.– 201 p.
3. *Карнаухов В. Г. Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании // Прикл. мех.*– 2004.– **40**, № 6.– С. 30–70.
4. *Савченко Е. В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций.*– Нежин: Аспект – Поліграф, 2006.– 232 с.
5. *Jones D. I. G. Handbook of Viscoelastic Vibrations Damping.*– New York: John Wiley and Sons, 2001.– 391 p.
6. *Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек.*– М.: Наука, 1974.– 446 с.
7. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек.*– К.: Наук. думка, 1986.– 224 с.
8. *Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости.*– К.: Наук. думка, 1982.– 260 с.
9. *Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек.*– К.: Вища школа, 1986.– 191 с.
10. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении.*– Житомир: Изд-во ЖГТУ, 2005.– 428 с.
11. *Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.*– М.: Мир, 1975.– 541 с.
12. *Козлов В. И. Колебания и диссипативный разогрев многослойной оболочки вращения из вязкоупругого материала // Прикл. мех.*– 1996.– **32**, № 6.– С. 82–89.
13. *Козлов В. И., Якименко С. Н. Термомеханическое поведение вязко-упругих тел вращения при осесимметричном гармоническом деформировании // Прикл. мех.*– 1989.– **25**, № 5.– С. 22–28.
14. *Hensen J. S., Heppler G. K. A Mindlin shell element which satisfies rigid body requirements // AIAA J.*– 1985.– **22**, № 2.– P. 288–295.