ISSN 1028-7507 Акустичний вiсник. 2010. Том 13, N 3. С. 3–8

УДК 532.542.86.(088.8)

ТЕОРИЯ ФЕНОМЕНА РИЙКЕ В СИСТЕМЕ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Б. И. БАСОК, В. В. ГОЦУЛЕНКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 02.07.2010

Феномен Рийке теоретически описан посредством введения в дискретную модель теплоподвода его напорной характеристики. Она определет ту часть подведенной к потоку теплоты, которая преобразуется в его напор. Восходящая ветвь указанной характеристики является причиной возбуждения автоколебаний.

Феномен Рiйке теоретично описано завдяки введенню в дискретну модель теплопроводу його напiрної характеристики. Вона визначає ту частину пiдведеної до потоку теплоти, яка перетворюється у його напiр. Висхiдна гiлка вказаної характеристики є причиною збудження автоколивань.

The Rijke phenomenon is described theoretically by introducing of pressure head characteristic in the discrete model of a heat-conducting system. It defines the share of heat supplied to the flow converting to its pressure head. The ascending branch of mentioned characteristic is the reason for exciting of self-oscillations.

ВВЕДЕНИЕ

Нисходящие ветви отрицательных сопротивлений любой природы или их неоднозначность известны как причина самовозбуждения автоколебаний [1]. Автоколебания (помпаж) лопастных нагнетателей в практике их эксплуатации возникают из-за наличия восходящей ветви или петли гистерезиса их напорных характеристик [2]. Согласно теории центробежных нагнетательных машин, неустойчивая восходящая ветвь напорной характеристики располагается в области малых подач. Причина ее образования – вихревые потери, которые возрастают с уменьшением расхода и могут трактоваться как отрицательное сопротивление. В статье [3] показано, что дестабилизирующая роль вязкости является следствием закона запаздывания в передаче действия в вязкой среде, а это запаздывание может изменить знак эффективного трения, т. е. вызвать неустойчивость. В работе [4] рассмотрено образование отрицательного сопротивления и возникновение автоколебаний в потоке жидкости с экспоненциальной зависимостью ее вязкости от температуры, причиной которой является ее саморазогрев. Отрицательное сопротивление в жидкости также служит причиной периодической работы сифона в режиме разрывных (релаксационных) автоколебаний [5].

В монографии [6], авторы которой провели значительное число экспериментальных исследований феномена Рийке, утверждается, что причины самовозбуждения автоколебаний не могут быть объяснены классической моделью волновых процессов. В статье [7] обоснован механизм влияния отрицательного сопротивления на зависимости гидравлических потерь по длине трубы Рийке при постоянном тепловом потоке. Применение его позволило теоретически определить закономерности феномена Рийке. В исследовании [8] найдены нисходящие ветви теплового сопротивления, образующиеся при политропном подводе тепла. В работе [9] определена порождаемая гистерезисным аттрактором своеобразная форма автоколебаний феномена Рийке, которая наблюдалась в экспериментах Леммана [10]. В статье [11] рассмотрены способы стабилизации стационарного режима в трубе Рийке путем периодического импульсного изменения дополнительной акустической гибкости, что является разновидностью реализации принципа дискретно-импульсного ввода энергии. Теоретическое описание феномена Рийке, в основу которого положены механизмы отрицательных сопротивлений, качественно и количественно подтверждаются результатами экспериментов [6, 12].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ

Трубу Рийке (рис. 1) будем рассматривать как динамическую систему с сосредоточенными параметрами. Для вывода уравнений движения нагретой среды воспользуемся уравнениями баланса импульса массы, неразрывности и энергии. Характер движения нагретого воздуха в трубе определяется напорной характеристикой $F(Q_{\text{т}})$, зависящей

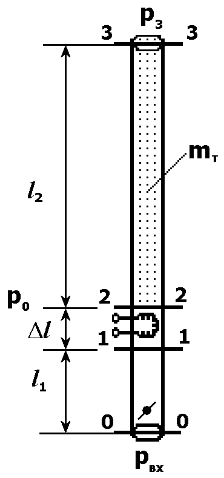


Рис. 1. Схема трубы Рийке

от теплового потока $W_э$, выделяемого электронагревателем. Задача данного исследования – обоснование схемы расчета напорной характеристики $F(Q_т)$ и определение автоколебаний в трубе Рийке как динамической системе с сосредоточенными параметрами.

Для составления уравнения баланса импульсов, рассмотрим силы, действующие на нагретый столб воздуха, заключенный в сечениях 2–2 и 3–3 в трубе Рийке (см. рис. 1). К ним относятся $F_p=(p_2-p_3)S$ – сила поверхностного давления, $F_{веса}=\rho_т g l_2 S$ – сила веса и $F_{тр}$ – сила вязкостного трения по длине трубы при движении нагретой среды. Согласно принципу Даламбера,

$$m_т\frac{dw_т}{dt}=(p_2-p_3)S-\rho_т g l_2 S-F_{тр}, \qquad (1)$$

где $m_т=\rho_т l_2 S$ – масса нагретого столба воздуха; $w_т$ – скорость подъема нагретого воздуха после электронагревателя; S – площадь нормального сечения трубы.

Полагая $h_{тр}=F_{тр}/S$ и используя соотношения $p_1-p_2=h_т+h_{сет}$, $p_0=p_3+\rho_0 g l_2$, из равенства (1) имеем

$$L_a\frac{dQ_т}{dt}=F(Q_т)-P, \qquad (2)$$

где $h_т$ – потери давления из-за теплоподвода, выражение для которых будет получено ниже; p_0 – давление в сечении 2–2 снаружи трубы; $h_{сет}=k_{сет}Q_т^2$ – потери при обтекании сетки нагревателя. Кроме того, в выражении (2) $L_a=\rho_т l_2/S$ – акустическая масса нагретого столба воздуха [7,9], $F(Q_т)=A(Q_т)-h_{тр}(Q_т)-h_т(Q_т)-h_{сет}(Q_т)$ – напорная характеристика трубы Рийке [7, 9, 11]; $A(Q_т)=g l_2(\rho_0-\rho_т)$ – давление подъемной силы; $Q_т=w_т S$ – объемный расход нагретого воздуха; $P=p_0-p_1$.

Запишем уравнение неразрывности для участка между сечениями 0–0 и 2–2 вертикальной трубы:

$$\frac{dM}{dt}=Q_{вх}\rho_0-Q_т\rho_т. \qquad (3)$$

Здесь $M=M(t)$ – масса холодного столба воздуха, расположенного до электроспирали в момент времени t; $Q_{вх}$ – объемный расход воздуха, входящего в трубу через сечение 0–0; ρ_0 и $\rho_т$ – плотности потока до и после источника тепла соответственно. Тогда $dM=V d\rho_1$, где $V=Sl_1$ – объем трубы до электроспирали; $dp_1/d\rho_1=c_1^2$, где c_1 – скорость звука в среде до нагревателя.

Таким образом, уравнение (3) можно представить в следующей форме:

$$C_a\frac{dp_1}{dt}=\frac{\rho_0}{\rho_т}Q_{вх}-Q_т,$$

где $C_a=V/(c_1^2\rho_т)$ – акустическая гибкость трубы [2]. Далее,

$$\begin{aligned} p_{вх}&=p_0+\rho_0 g(l_1+\Delta l),\\ p_{вх}-p_1&=\rho_0 g l_1+k_{др}Q_{вх}^2+k_{тр}Q_{вх}^2, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $p_{вх}$ – давление окружающей среды на входе в трубу; $k_{др}Q_{вх}^2$ – гидравлические потери при обтекании дросселя; $k_{тр}Q_{вх}^2$ – гидравлические потери перед нагревателем, обусловленные вязкостью. Исключая в соотношениях (4) давление $p_{вх}$, получим

$$p_0-p_1=k_{вх}Q_{вх}^2-\rho_0 g\Delta l,$$

где $k_{вх}=k_{др}+k_{тр}$. Величина Δl имеет порядок толщины спирали электронагревателя и ею можно пренебречь. Тогда

$$P=p_0-p_1\approx k_{вх}Q_{вх}^2$$

и, следовательно,

$$\frac{\rho_0}{\rho_т}Q_{вх}=\varphi(P),$$

где $\varphi(P)=k_\varphi\sqrt{P}$; $k_\varphi=\rho_0/(\sqrt{k_{вх}}\rho_т)$. Учитывая, что $p_0=\mathrm{const}$, получаем $dP(t)=-dp_1(t)$. Окончательно уравнение (3) принимает вид

$$C_a\frac{dP}{dt}=Q_т-\varphi(P). \qquad (5)$$

Полученная нелинейная диссипативная динамическая система (2), (5) формально совпадает с уравнениями теории помпажа лопастных нагнетателей [2]. В компрессорах в напор потока превращается механическая энергия вращения, а в трубе Рийке напор возникает из-за частичного преобразования в него подводимой теплоты.

Таким образом, в рамках рассматриваемой модели трубы Рийке задача о самовозбуждении термоакустических автоколебаний математически свелась к исследованию причин, приводящих к образованию периодических решений в нелинейной автономной системе дифференциальных уравнений (2), (5). Известно, что это наблюдается тогда и только тогда, когда соответствующее уравнение интегральных кривых

$$\frac{dP}{dQ_т} = \frac{L_a}{C_a}\frac{Q_т - \varphi(P)}{F(Q_т) - P} \tag{6}$$

имеет предельный цикл, структура которого определяется величиной волнового сопротивления $Z=\sqrt{L_a/C_a}$ [2].

Также установлено, что необходимое условие образования предельного цикла для уравнения (6) – наличие восходящей ветви $dF(Q_т)/dQ_т>0$ на напорной характеристике $F(Q_т)$ [2, 7]. В свою очередь, она появляется тогда, когда на зависимостях $h(Q_{тр})$ и $h(Q_т)$ имеются нисходящие участки отрицательных сопротивлений. Механизм возбуждения автоколебаний, основанный на обратной связи через отрицательное сопротивление, наиболее типичен для электрических систем [1] и в теории помпажа [2].

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТРУБЫ РИЙКЕ

Далее будет показано, что зависимости $h(Q_{тр})$ и $h(Q_т)$ действительно имеют нисходящие ветви отрицательных сопротивлений. Расчетное выражение для $h(Q_{тр})$ получим, использовав формулу Дарси – Вейсбаха, а тепловое сопротивление $h(Q_т)$ [8] определим из уравнения энергии для потока в форме первого закона термодинамики.

Расчет напорной характеристики трубы Рийке заключается в следующем. Задаемся мощностью $W_э$ теплового потока от электроспирали. Он идет на нагрев массового расхода $m=w_т\rho_т S$, который регулируется дросселем на входе в трубу. Для исключения потерь тепла в окружающую среду боковую поверхность трубы предполагаем теплоизолированной. Таким образом, наблюдается равенство тепловых потоков

$$W_э = c_{п_m}|_{T_0}^{T} m(T - T_0), \tag{7}$$

где $c_{п_m}|_{T_0}^{T}$ – средняя удельная массовая теплоемкость при политропном теплоподводе в интервале нагрева от температуры T_0 до T. Известно, что

$$c_{п_m} = c_{v_m}\frac{n-k}{n-1}\,,$$

где n – показатель политропы; k – показатель адиабаты; c_{v_m} – удельная массовая теплоемкость изохорного процесса. Для воздуха

$$c_{v_m}(T) = 10^3[0.657 + 0.00009349(T + T_0)].$$

Скорость нагретого воздуха после электроспирали определяем из уравнения неразрывности:

$$w_т = \frac{m}{S\rho_т}\,, \tag{8}$$

где $S=\pi 4d^2/4$; d – диаметр трубы. Плотность $\rho_т$ нагретого воздуха находится из соотношения

$$\rho_т(T) = \rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/(n-1)}, \tag{9}$$

где T_0 – температура окружающей среды. Соотношение (9) получено с использованием уравнений политропы и состояния: $p/\rho^n=p_0/\rho_0^n$ и $p/\rho=RT$.

Таким образом, из формул (7) – (9) следует

$$w_т(T)=\frac{n-1}{n-k}\,\frac{W_э}{c_{v_m}\rho_0 S(T-T_0)}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(n-1)}. \tag{10}$$

Из соотношения (10) для объемного расхода $Q_т=Sw_т$ нагретого воздуха получается выражение

$$Q_т = \frac{n-1}{n-k}\,\frac{W_э}{c_{v_m}\rho_0(T-T_0)}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(n-1)}. \tag{11}$$

Запишем формулу Дарси – Вейсбаха, определяющую гидравлические вязкостные потери давления по длине трубы на участке движения нагретого воздуха:

$$h_{тр} = \lambda\frac{l}{d}\rho_т\frac{w_т^2}{2}\,. \tag{12}$$

Здесь $\lambda=\lambda(\mathrm{Re})$ – коэффициент гидравлических потерь по длине для гидравлически гладкой трубы, определяемый в зависимости от режима движения:

$$\lambda(\mathrm{Re}) = \begin{cases} \dfrac{64}{\mathrm{Re}} & \text{при} \quad \mathrm{Re} \le \mathrm{Re}_{кр}, \\[2ex] \dfrac{0.3164}{\mathrm{Re}^{0.25}} & \text{при} \quad \mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $\mathrm{Re}=w_{\text{т}}d/\nu$ – число Рейнольдса; $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ – критическое значение числа Рейнольдса, определяющее переход от ламинарного течения к турбулентному; $\nu=\nu(T)$ – коэффициент кинематической вязкости воздуха. Для гидравлически идеальных труб критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}}\approx 2320$.

Объединив выражения (12) и (13), окончательно прийдем к следующему соотношению для вязкостных потерь по длине трубы:

$$h_{\text{тр}}=\begin{cases} \dfrac{32 l_2 \nu(T) w_{\text{т}}(T)\rho_{\text{т}}(T)}{d^2}, \\ \qquad \text{если} \quad w_{\text{т}}(T)\le \dfrac{\nu(T)\mathrm{Re}_{\text{кр}}}{d}, \\ \dfrac{0.3164}{2}\dfrac{l_2}{d^{1.25}}[\nu(T)]^{0.25}[w_{\text{т}}(T)]^{0.75}\rho_{\text{т}}(T), \\ \qquad \text{если} \quad w_{\text{т}}(T) > \dfrac{\nu(T)\mathrm{Re}_{\text{кр}}}{d}. \end{cases} \qquad (14)$$

Таким образом, рассматривая температуру T нагретой части трубы как параметр, из (10) и (14) можно получить функциональную зависимость $h_{\text{тр}}=h_{\text{тр}}(w_{\text{т}})$.

Участок нисходящей ветви в зависимости $h_{\text{тр}}(w_{\text{т}})$, см. рис. 2, а, образуется в области ламинарного режима при малых значениях $w_{\text{т}}$. Это связано с тем, что с увеличением скорости нагретого воздуха $w_{\text{т}}$ при постоянном тепловом потоке $W_{\text{э}}=\mathrm{const}$ его температура T снижается. В свою очередь, это приводит к уменьшению вязкости воздуха ν. Напомним, что с ростом температуры вязкость газов (в отличие от жидкостей) не уменьшается, а наоборот, увеличивается. Следовательно, зависимость $\nu=\nu(T)$ – монотонно возрастающая. Тогда величина $\nu(T)w_{\text{т}}(T)\rho_{\text{т}}(T)$ с ростом $w_{\text{т}}$ уменьшается. Однако при дальнейшем увеличении $w_{\text{т}}$, когда $w_{\text{т}}>\nu\mathrm{Re}_{\text{кр}}/d$, режим движения становится турбулентным. Исходя из второго соотношения (14), $h_{\text{тр}}(w_{\text{т}})$ в этом случае становится монотонно возрастающей функцией. Таким образом, в области ламинарного режима движения на зависимости гидравлических потерь по длине нагретого участка трубы Рийке образуется участок отрицательного сопротивления.

При подводе теплоты даже в гидравлически идеальной жидкости возникают потери – тепловое сопротивление. По-видимому, это понятие впервые было введено в монографии [13]. Для несжимаемой жидкости Б. В. Раушенбахом в [10] была получена возрастающая зависимость для $h_{\text{т}}(w_{\text{т}})$. При произвольном политропном подводе теплоты получим выражение для $h_{\text{т}}(w_{\text{т}})$ из уравнения энергии для идеального газа:

$$q+\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{w_1^2}{2}+u_1=\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{w_2^2}{2}+u_2+\Delta h_{\text{т}}, \qquad (15)$$

где $\Delta h_{\text{т}}$ – потери энергии из-за теплового сопротивления; q – подводимый удельный тепловой поток; u_1 и u_2 – удельная внутренняя энергия воздуха до и после нагревателя соответственно. В соотношении (15) не учитывается потенциальная энергия подъема столба газа ввиду ее незначительного изменения при достаточно близком расположении рассмотренных сечений 1–1 и 2–2. При политропном подводе теплоты, когда

$$q=c_v\frac{n-k}{n-1}(T_2-T_1),$$

где c_v – удельная теплоемкость изохорного процесса; n и k показатели политропы и адиабаты соответственно, с учетом зависимостей

$$\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}=R(T_2-T_1),$$

$$R(T_2-T_1)=c_v(k-1)(T_2-T_1),$$

уравнение (15) позволяет определить $\Delta h_{\text{т}}$ в таком виде:

$$\Delta h_{\text{т}}=n\frac{k-1}{1-n}c_v(T_2-T_1)+\frac{w_1^2-w_2^2}{2},$$

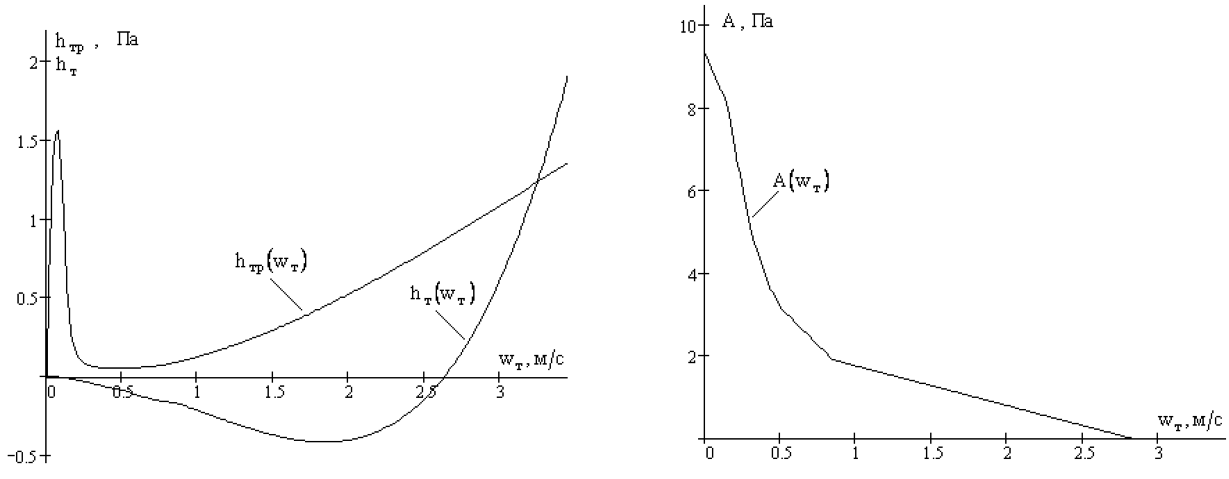
откуда, полагая $h_{\text{т}}=\rho_1\Delta h_{\text{т}}$, для теплового сопротивления получаем выражение

$$\begin{aligned} h_{\text{т}} &= n\rho_1\frac{k-1}{1-n}c_v(T_2-T_1)+ \\ &+\frac{\rho_1 w_1^2}{2}\left[1-\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{2/(n-1)}\right]. \end{aligned} \qquad (16)$$

Для изобарного процесса $n=0$ и из формулы (16) следует

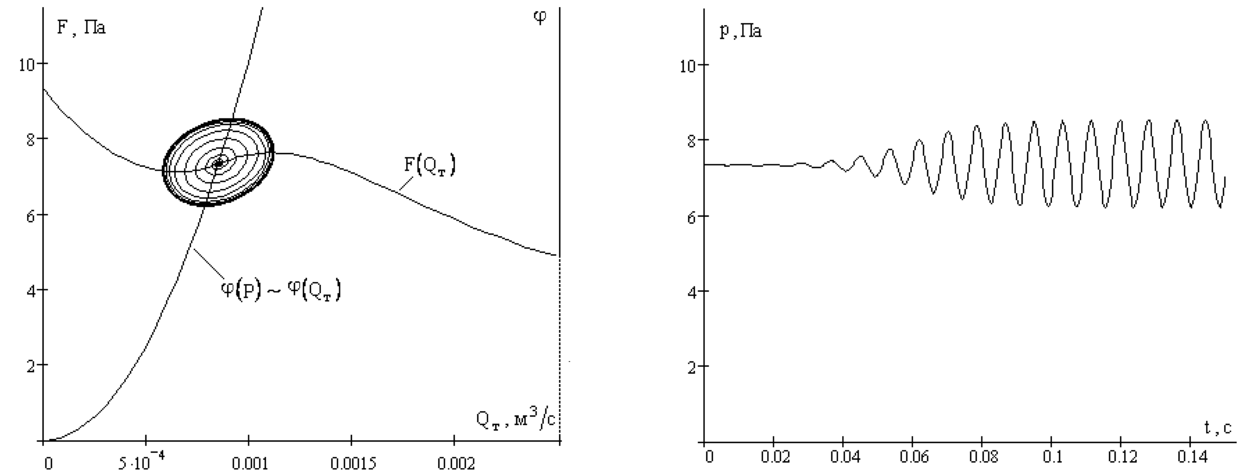
$$h_{\text{т}}=\frac{\rho_{\text{т}}^2}{2\rho_0}\left[1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right]w_{\text{т}}^2. \qquad (17)$$

Зависимости (10) и (17) можно рассматривать как параметрическое (через температуру T) представление функции $h_{\text{т}}=h_{\text{т}}(w_{\text{т}})$ или $h_{\text{т}}=h_{\text{т}}(Q_{\text{т}})$, если учесть, что $Q_{\text{т}}=w_{\text{т}}S$. Аналогично, исключая T из уравнения (9) и зависимости для давления подъемной силы $A=gl_2(\rho_0-\rho_{\text{т}}(T))$, получаем функцию $A=A(w_{\text{т}})$ или $A=A(Q_{\text{т}})$. Местное гидравлическое сопротивление $h_{\text{сет}}(Q_{\text{т}})$, вызванное внесением в трубу электроспирали, определяется ее конструкцией. Для простоты будем им пренебрегать.



а б

Рис. 2. Некоторые параметры рассматриваемой автоколебательной системы при $l=1$ м, $d=0.1$ м, $W_э=505$ Вт [12]:
а – сопротивления $h_{тр}(w_т)$ и $h_т(w_т)$; б – давление подъемной силы $A(w_т)$



а б

Рис. 3. Характеристики автоколебаний в трубе Рийке:
а – предельный цикл; б – временная зависимость $p(t)$

Движение воздуха в трубе Рийке (см. рис. 1) осуществляется под действием равнодействующей сил Архимеда и веса, суммарное давление которых $A=A(w_т)$ представляет монотонно убывающую зависимость (рис. 2, *б*). Восходящая ветвь напорной характеристики $F(Q_т)$ (рис. 3, *а*) порождается нисходящими ветвями отрицательных сопротивлений $h_{тр}(Q_т)$ и $h_т(Q_т)$ (см. рис. 2, *а*), из-за которых по аналогии со случаем, рассмотренным в [2], возбуждаются автоколебания феномена Рийке, зафиксированные на временной диаграмме рис. 3, *б*.

ВЫВОДЫ

1. Установлено, что ветви отрицательных сопротивлений вязкостного и теплового при конвективном подводе теплоты в трубе Рийке составляют причину возникновения одноименного феномена, заключающегося в возбуждении автоколебаний.

2. Представлено расчетное построение напорной характеристики $F(Q_т)$, описывающей преобразование теплоты в напор из-за которого

образуется сквозное движение нагретого воздуха трубе Рийке. Необходимое условие возбуждения автоколебаний в рамках феномена Рийке заключается в наличии восходящей ветви $dF(Q_т)/dQ_т > 0$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают глубокую благодарность и искреннюю признательность академику НАН Украины профессору В. Т. Гринченко за активное участие в обсуждении и анализе результатов, полученных в данной работе.

1. *Харкевич А. А.* Автоколебания.– М.: Гостехиздат, 1954.– 172 с.
2. *Казакевич В. В.* Автоколебания (помпаж) в компрессорах.– М.: Машиностроение, 1974.– 264 с.
3. *Гершуни Г. З.* Гидродинамическая неустойчивость. Изотермические течения // Соросов. образоват. ж.– 1997.– № 2.– С. 99–106.
4. *Мелких А. В., Селезнев В. Д.* Автоколебания неизотермического течения вязкой жидкости в канале // ТВТ.– 2008.– **46**, № 1.– С. 100–109.
5. *Куприн А. И., Гоцуленко В. Н.* К определению режима работы сифона // Инж.-физ. ж.– 1987.– **52**, № 6.– С. 916–920.
6. *Беляев Н. М., Белик Н. П., Польшин А. В.* Термоакустические колебания газожидкостных потоков в сложных трубопроводах энергетических установок.– К.: Вища школа, 1985.– 160 с.
7. *Гоцуленко В. В.* Математическое моделирование особенностей феномена Рийке // Мат. моделир.– 2004.– **16**, № 9.– С. 23–28.
8. *Гоцуленко В. В., Гоцуленко В. Н.* Тепловое сопротивление как механизм возбуждения автоколебаний // Сб. науч. тр. Днепродзерж. гос. техн. ун-та.– Днепродзержинск, 2009.– С. 95–100.
9. *Gotsulenko V. V.* Special modes of the Pijke phenomenon // J. Eng. Phys. Thermophys.– 2005.– **78**, № 2.– P. 375–379.
10. *Раушенбах Б. В.* Вибрационное горение.– М.: Физматтиз, 1961.– 500 с.
11. *Басок Б. И., Гоцуленко В. В.* Стабилизация неустойчивого положения равновесия при теплоподводе параметрическими колебаниями // Тр. ИПММ НАН Украины.– 2010.– **21**.– С. 19–31.
12. *Москвичев Д. Ю.* Исследование влияния акустических резонаторов на термоакустические процессы в установках с теплоподводом.– Новосибирск: Ин-т теор. прикл. мех. им. С. А. Христиановича РАН, 2007.– 118 с.
13. *Абрамович Г. Н.* Прикладная газовая динамика.– М.: Наука, 1969.– 824 с.