

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ЖЕСТКО ОПЕРТОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

В. Г. КАРНАУХОВ*, В. И. КОЗЛОВ*, В. М. СИЧКО**, А. В. ЗАВГОРОДНИЙ**

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

**Николаевский государственный университет им. В. А. Сухомлинского

Получено 23.02.2010

Исследовано влияние физической нелинейности на динамические характеристики толстостенной вязкоупругой цилиндрической панели с жестким защемлением торцов при действии на нее равномерного гармонического поверхностного давления. Для описания термомеханического поведения вязкоупругого материала использована концепция комплексных характеристик. Физическая нелинейность обусловлена зависимостью свойств материала от температуры и нелинейной зависимостью диссипативной функции от температуры и деформаций, а также связанностью механических и тепловых полей. Для решения задачи использована итерационная процедура в сочетании с методом конечных элементов. Рассчитаны зависимость амплитуды колебаний, температуры и коэффициента демпфирования от частоты при колебаниях панели на первой изгибной моде. Показано, что физическая нелинейность существенно влияет на указанные динамические характеристики.

Досліджено вплив фізичної нелінійності на динамічні характеристики товстостінної в'язкоупругої циліндричної панелі з жорстким защемленням торців при дії на неї зовнішнього рівномірного гармонічного поверхневого тиску. Для моделювання термомеханічної поведінки в'язкоупругого матеріалу використано концепцію комплексних характеристик. Фізична нелінійність обумовлена залежністю властивостей матеріалу від температури й нелінійною залежністю дисипативної функції від температури й деформацій, а також зв'язаністю механічних і теплових полів. Для розв'язку задачі використано ітераційну процедуру в поєднанні з методом скінченних елементів. Розраховано залежності амплітуди, температури і коефіцієнта демпфування від частоти при коливаннях панелі на першій згинній моді. Показано, що фізична нелінійність суттєво впливає на вказані динамічні характеристики.

The paper deals with studying of influence of physical nonlinearity on the dynamic characteristics of a thick-walled viscoelastic cylindrical panel with rigidly clamped edges under action of the external uniform harmonic surface pressure. A thermomechanical behavior of viscoelastic material has been simulated using the conception of complex characteristics. The physical nonlinearity is induced by coupling of mechanical and temperature fields, temperature dependence of material characteristics and nonlinear dependence of dissipative function from the temperature and deformations. An iterative procedure and finite element method have been used for solving of the problem. Frequency dependencies of the amplitude, temperature and damping coefficient have been studied for the panel vibrating on the first bending mode. It has been shown that the physical nonlinearity essentially effects the considered dynamic characteristics.

ВВЕДЕНИЕ

Полимерные материалы и композиты на их основе находят широкое применение в различных областях современной техники. Они обладают вязкоупругими свойствами, обеспечивающими высокий уровень рассеяния механической энергии. Эта особенность позволяет с успехом использовать вязкоупругие материалы при решении задачи пассивного демпфирования стационарных и нестационарных колебаний элементов конструкций различного назначения. Обзор последних достижений по этой проблеме представлен в работах [1–3]. На эффективность пассивного демпфирования колебаний конструкций влияет ряд факторов, в частности, температура. Ее изменение (повышение) может быть вызвано как теплообменом с внешней средой, так и гистерезисными потерями в вязкоупругих материалах, когда имеет место так на-

зываемый диссипативный разогрев. Учет диссипативного разогрева особенно важен при длительном циклическом деформировании, поскольку при определенных условиях нагружения и теплообмена он может привести к специфическому типу разрушения элементов конструкции, связанному с достижением температурой некоторых критических точек (точек фазового перехода), например точки плавления, точки Кюри материала и др.

Для обеспечения высоких уровней демпфирования используются различные типы структурно-неоднородных композитов – слоистые и волокнистые материалы, материалы со сферическими или эллипсоидальными включениями и пр. Рациональный выбор типа и параметров структуры материала позволяет достичь оптимального соотношения между его жесткостью и коэффициентом демпфирования.

Одна из самых распространенных в технике гео-

метрий конструктивных элементов – цилиндрическая. В частности, широко распространены толстостенные цилиндрические панели из полимерных материалов и композитов на их основе [4]. Для демпфирования вынужденных резонансных колебаний такой панели в ее структуру вводятся вязкоупругие компоненты с высокими гистерезисными потерями. В зависимости от типа анизотропии матрицы и включений, а также их геометрической конфигурации такой материал может быть изотропным, трансверсально-изотропным или ортотропным. Например, если изотропная матрица содержит хаотически расположенные сферические включения из изотропного материала, то материал панели ведет себя как изотропный с приведенными макрохарактеристиками (подробнее см., например, в работе [5]). С использованием принципа соответствия из этих приведенных характеристик можно получить действительные и мнимые составляющие для параметров Ляме. Их зависимость от температуры диктуется температурной зависимостью механических свойств матрицы и включения.

В настоящем исследовании рассматривается физически нелинейная задача о колебаниях и диссипативном разогреве цилиндрической панели из изотропного вязкоупругого материала при моногармоническом механическом нагружении. Физическая нелинейность обусловлена зависимостью свойств материала от температуры и нелинейной зависимостью диссипативной функции от температуры и амплитуд деформаций. Рассматривается случай граничных механических условий, отвечающих жесткому закреплению торцов. Панель нагружена равномерным поверхностным давлением, изменяющимся во времени по гармоническому закону с частотой, близкой к резонансной. Для решения нелинейных задач используется итерационная процедура, сводящая исходную нелинейную задачу к последовательности линейных задач о колебаниях неоднородного вязкоупругого тела и задач теплопроводности с известным источником тепла, каждая из которых решается методом конечных элементов. Для моделирования механического поведения неупругого материала при моногармонических колебаниях используем концепцию комплексных характеристик, представленную в монографии [6].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка нелинейной задачи о колебаниях и диссипативном разогреве толстостенной вязкоупругой цилиндрической панели осуществлена в

статье [7]. Приведем некоторые из ее соотношений, которые будут использованы в дальнейшем. Для описания термомеханического состояния толстостенной цилиндрической панели применяется цилиндрическая система координат (z, r, θ) . Задача сводится к нелинейной системе комплексных дифференциальных уравнений, состоящих из уравнений движения [6, 8]:

$$\begin{aligned} & \mu \nabla^2 u_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial r} - \\ & - \mu \frac{u_r}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \\ & + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \rho \omega^2 u_r = 0, \\ & \mu \nabla^2 u_\theta + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \theta} - \mu \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \\ & + \frac{2}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{\varepsilon_{kk}}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \rho \omega^2 u_\theta = 0, \\ & \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \\ & + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнения энергии [6, 8]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_q \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_q r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_q r \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = c \rho \frac{\partial T}{\partial t} - D. \end{aligned} \quad (2)$$

К ним необходимо добавить механические граничные условия, отвечающие случаю жесткого заземления торцов панели [9], и тепловые граничные условия конвективного теплообмена с окружающей средой, температура которой равна T_c :

$$\lambda_q \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_T(T - T_c). \quad (3)$$

В начальный момент времени температура материала панели равна T_0 . В соотношениях (1)–(3) λ , μ – зависящие от температуры комплексные параметры Ляме; λ_q – коэффициент теплопроводности изотропного материала; α_T – коэффициент теплоотдачи; c – коэффициент удельной массовой теплоемкости материала.

Фигурирующая в уравнении энергии (2) диссипативная функция D определяется по формуле

$$D = \frac{\omega}{2}(\sigma''_{ij}\epsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\epsilon''_{ij}), \quad (4)$$

где σ'_{ij} , ϵ'_{ij} , σ''_{ij} , ϵ''_{ij} – действительные и мнимые составляющие комплексных амплитуд компонент тензоров напряжений и деформаций.

Для оценки эффективности пассивного демпфирования вынужденных колебаний используется интегральная характеристика – отношение диссипированной за цикл энергии D к накопленной энергии U_T [6]:

$$\eta = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\int_V D r dr dz d\theta}{\int_V U_T r dr dz d\theta}, \quad (5)$$

$$U_T = \frac{1}{2}(\sigma'_{ij}\epsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\epsilon''_{ij}).$$

Для однородных состояний при действительном коэффициенте Пуассона и не зависящем от координат модуле сдвига она сводится к величине

$$\eta = 2\pi \frac{G''}{G'}, \quad (6)$$

представляющей собой обычный тангенс угла потерь материала. Если учитывать зависимость свойств материала от температуры или деформаций, система уравнений (1), (2) становится сложной нелинейной системой дифференциальных уравнений.

Для композитного материала с зернистой структурой приведенные характеристики могут быть определены по представленным в работе [5] формулам:

мулам:

$$\begin{aligned} K^* &= \langle K \rangle - \frac{c_1 c_2 (K_1 - K_2)^2}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + \bar{K}}, \\ c_1 &= \frac{v_1}{v_1 + v_2}, \quad c_2 = \frac{v_2}{v_1 + v_2}, \\ \mu^* &= \langle \mu \rangle - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \bar{\mu}}, \\ \bar{K} &= \frac{4}{3} \mu_c, \quad \bar{\mu} = \frac{(9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)}, \\ \langle K \rangle &= c_1 K_1 + c_2 K_2, \quad \langle \mu \rangle = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь c_1 , c_2 – объемное содержание матрицы и включений; $K_c = \langle K \rangle$, $\mu_c = \langle \mu \rangle$, если жесткость матрицы больше жесткости включений; $K_c = \langle 1/K \rangle^{-1}$, $\mu_c = \langle 1/\mu \rangle^{-1}$, если жесткость включений больше жесткости матрицы.

Согласно принципу соответствия [10], для вязкоупругих материалов в соотношениях (7) действительные упругие характеристики необходимо заменить на комплексные.

2. РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Как уже отмечалось, для исследования термомеханического поведения толстостенной вязкоупругой цилиндрической панели применялись итерационные процедуры в сочетании с методом конечных элементов при использовании вариационной формулировки задачи. При этом исходная задача механики свелась к нахождению стационарных точек функционала [6]

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} \int_V \left[A_{zz} \epsilon_{zz}^2 + A_{rr} \epsilon_{rr}^2 + A_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta}^2 + \right. \\ &+ 2(A_{zr} \epsilon_{zz} \epsilon_{rr} + A_{z\theta} \epsilon_{zz} \epsilon_{\theta\theta} + A_{r\phi} \epsilon_{rr} \epsilon_{\theta\theta}) + \\ &+ 4(G_{zr} \epsilon_{zr}^2 + G_{z\theta} \epsilon_{z\theta}^2 + G_{r\theta} \epsilon_{r\theta}^2) - \\ &\left. - \rho \omega^2 (w^2 + u^2 + v^2) \right] r dr dz d\theta - \\ &- \int_{\Sigma_p} (p_{nz} w + p_{nr} u + p_{r\theta} v) d\Sigma_p, \end{aligned} \quad (8)$$

а задача теплопроводности (2), (3) – к решению вариационного уравнения [6]

$$\int_V \left[c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \delta T + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \delta \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \delta \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \delta \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + D\delta T \right] r dr dz d\theta + \int_{\Sigma} \alpha_T (T - T_c) \delta T d\Sigma = 0, \quad (9)$$

где A_{ij}, G_{ij} – комплексные механические характеристики материала.

Вариационная задача механики $\delta\mathcal{E}=0$ решалась методом конечных элементов с использованием 24-узловых шестигранных изопараметрических элементов. В качестве локальной системы координат, в которой определяются аппроксимирующие функции и проводится интегрирование, использовалась нормализованная система координат. Для построения базисных функций, аппроксимирующих составляющие перемещений и температуру в пределах элемента, применялись алгебраические и тригонометрические полиномы. При этом предполагалось, что амплитуды компонент вектора перемещений и температура аппроксимируются выражениями

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^{24} L_i w_i; \\ u &= \sum_{i=1}^{24} L_i u_i; \\ v &= \sum_{i=1}^{24} L_i v_i; \\ T &= \sum_{i=1}^{24} L_i T_i. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь w_i, u_i, v_i, T_i – узловые значения перемещений и температуры; L_i – аппроксимирующие функции, которые представляют собой комбинации алгебраических N_j ($j=1, 2, \dots, 8$) и тригоно-

метрических H_k ($k=1, 2, 3$) полиномов [11–13]:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1);$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1);$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1);$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1);$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta);$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi);$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta);$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi);$$

$$H_1 = \frac{\sin(\theta - \theta_2) - \sin(\theta - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3)}{\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3)};$$

$$H_2 = \frac{\sin(\theta - \theta_3) - \sin(\theta - \theta_1) + \sin(\theta_3 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 - \theta_3) - \sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3 - \theta_1)};$$

$$H_3 = \frac{\sin(\theta - \theta_1) - \sin(\theta - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_3 - \theta_1) - \sin(\theta_3 - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Аппроксимирующие функции строились таким образом, чтобы алгебраические полиномы N_j описывали напряженно-деформированное состояние и распределение температуры в плоскости (r, z) , а тригонометрические функции – по окружной координате.

Для определения стационарного значения функционала (8) разобьем объем тела на M конечных элементов. Используя для определения узловых значений компонент вектора перемещений изложенную в [12] методику, получим $3n$ линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_j} &= 0, \\ \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial u_j} &= 0, \\ \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_j} &= 0, \\ j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

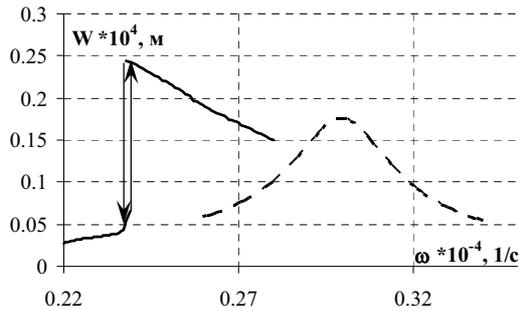


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика цилиндрической панели при шарнирном опирании торцов

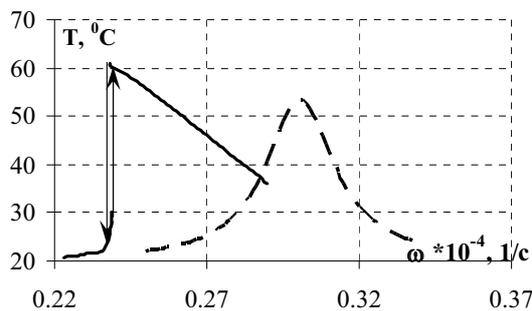


Рис. 2. Температурно-частотная характеристика цилиндрической панели при шарнирном опирании торцов

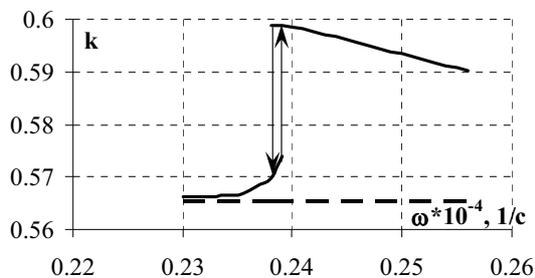


Рис. 3. Зависимость коэффициента демпфирования от частоты для цилиндрической панели при шарнирном опирании торцов

Здесь n – количество узловых точек.

Просуммировав выражения (11) по всем конечным элементам, получим для общей (глобальной) нумерации узлов систему уравнений, в которой интегрирование по объему исследуемой области заменено суммой интегралов, взятых по объемам отдельных конечных элементов, а интегрирование

по поверхности – суммой интегралов по граням элементов, на которых заданы граничные условия в напряжениях. Для вычисления интегралов, входящих в коэффициенты системы (11), применяются квадратурные формулы Гаусса [13]. По найденным узловым значениям перемещений вычисляются деформации, напряжения и диссипативная функция в точках интегрирования Гаусса, так как в них указанные величины имеют самую высокую точность.

Трехмерное вариационное уравнение энергии (9) с известным источником тепла решается на той же сетке конечных элементов. При этом производная по времени $\partial T / \partial t$ не варьируется, а заменяется выражением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t},$$

и в дальнейшем реализуется неявная схема решения нестационарной задачи теплопроводности.

3. АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим динамическую задачу о колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругой цилиндрической панели постоянной толщины. На внешней поверхности панели действует равномерно распределенное механическое давление, изменяющееся по гармоническому закону $P = P_0 \cos \omega t$ с частотой, близкой к первой резонансной частоте тела. Механические граничные условия отвечают шарнирному опиранию торцов панели. Расчеты выполнены для панели с внешним радиусом $R = 0.11$ м, толщиной $h = 0.02$ м и длиной $l = 0.1$ м. Механические характеристики материала выбраны следующими: $\rho = 0.936 \cdot 10^3$ кг/м³, $G = G' + iG''$, $\nu = 0.32$, $G' = (968 - 8.69T) \cdot 10^6$ Па, $G'' = (87.1 - 0.7T) \cdot 10^6$ Па.

Панель находится в условиях теплообмена с окружающей средой, температура которой составляет $T_c = 20^\circ\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи между окружающей средой и материалом цилиндра принят постоянным – $\alpha_T = 25$ Вт/(м² · °C). При расчете температурных полей теплофизические характеристики были $\lambda_q = 0.5$ Вт/(м · °C) и $c\rho = 1.5$ МДж/(м³ · °C).

На рис. 1–3 представлены амплитудно-частотные, температурно-частотные характеристики и коэффициент демпфирования толстостенной цилиндрической панели с жестко заземленными торцами в окрестности первого резонанса, полученные с использованием трехмерной теории при $P_0 = 0.15 \cdot 10^5$ Па.

Сплошная линия отвечает результатам, полученным с использованием нелинейной, а штриховая – линейной теории. Рассматриваемый здесь тип физической нелинейности, обусловленный связанностью механических и тепловых полей, зависимостью механических свойств материалов от температуры, а также нелинейной зависимостью диссипативной функции от температуры и деформаций, порождает типичный для нелинейных систем неоднозначный сценарий поведения с устойчивыми и неустойчивыми ветвями и нелинейным гистерезисом. Интересной особенностью влияния указанного типа физической нелинейности на термомеханические свойства оказывается необычное для температуры скачкообразное изменение в окрестности резонансной частоты (см. рис. 2). Нелинейность приводит к существенному сдвигу частот, на которых достигается максимальный уровень колебаний и температуры диссипативного разогрева.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена физически нелинейная пространственная задача о колебаниях и диссипативном разогреве толстостенной вязкоупругой цилиндрической панели при жестком закреплении ее торцов. Панель нагружена равномерным давлением, изменяющимся во времени по гармоническому закону с частотой, близкой к первой изгибной частоте. Физическая нелинейность обусловлена температурной зависимостью механических свойств материала, нелинейной зависимостью диссипативной функции от температуры и деформаций, а также связанностью механических и тепловых полей. Для решения задачи использованы итерационные процедуры, сводящие исходную нелинейную формулировку к последовательности линейных задач о колебаниях неоднородной вязкоупругой панели и задач теплопроводности с известным источником тепла. Для решения указанных линейных задач использован конечно-элементный метод. Рассчитаны частотные зависимости амплитуды коле-

баний на первой изгибной моде, температуры разогрева и коэффициента демпфирования.

Показано, что выбранная физическая нелинейность приводит к типичному для нелинейных систем сценарию поведения с изменением частоты: здесь присутствуют неоднозначности, скачкообразный переход с одной ветви на другую и нелинейный гистерезис.

1. Савченко Е. В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций.– Нежин: Аспект-Поліграф, 2006.– 232 с.
2. Jones D. I. G. Handbook of viscoelastic vibrations damping.– New York: John Wiley & Sons, 2001.– 391 p.
3. Lakes R. S. Viscoelastic materials.– London: Cambridge Univ. Press, 2009.– 461 p.
4. Hamidzaden H. R., Jazar R. N. Vibrations of thick cylindrical structures.– New York: Springer, 2010.– 201 p.
5. Хорошун Л. П. (ред.) Статистическая механика и эффективные свойства материалов / Механика композитов. Том 3.– К.: ПТОО «АСК», 1993.– 390 с.
6. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении.– Житомир: ЖГТУ, 2005.– 428 с.
7. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Сичко В. М., Завгородний А. В. Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев трехслойной вязкоупругой цилиндрической панели с независимыми от температуры свойствами // Акуст. вісн.– 2010.– 13, № 1.– С. 22–29.
8. Коваленко А. Д. Основы термоупругости.– К.: Наук. думка, 1970.– 308 с.
9. Гринченко В. Т. Равновесие и установившееся колебания упругих тел конечных размеров.– К.: Наук. думка, 1978.– 264 с.
10. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости.– М.: Мир, 1974.– 340 с.
11. Hensen J. S., Hepler G. K. A Mindlin shell element which satisfies rigid body requirements // AIAA J.– 1985.– 22, № 2.– P. 288–295.
12. Козлов В. И. Колебания и диссипативный разогрев многослойной оболочки вращения из вязкоупругого материала // Прикл. мех.– 1996.– 32, № 6.– С. 82–89.
13. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.– М.: Мир, 1975.– 541 с.