

УДК 539.3:534.1:534.232

МЕТОДИКА КОМПЛЕКСНОГО СРАВНЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ КУБИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПО УПРУГИМ И ВОЛНОВОДНЫМ СВОЙСТВАМ

В. А. МОЙСЕЕНКО

*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка**Получено 16.10.2009*

В трехмерной постановке предложена эффективная методика комплексного сравнения анизотропных акустических материалов кубической структуры по упругим и волноводным свойствам. С ее использованием для широкого набора реальных анизотропных материалов кубической структуры исследовано поведение дискретных и обобщенных упругих и волноводных характеристик. Проведены соответствующее комплексное сравнение и классификация рассмотренных материалов.

У тривимірній постановці запропоновано ефективну методику комплексного порівняння анізотропних акустичних кристалів кубічної структури за пружними й хвилеводними властивостями. З її використанням для широкого набору реальних анізотропних матеріалів кубічної структури досліджено поведінку дискретних і узагальнених пружних та хвилеводних характеристик. Проведені відповідне комплексне порівняння й класифікація розглянутих матеріалів.

An efficient technique for complex comparison of anisotropic acoustical crystals of a cubic structure by their elastic and waveguide properties has been offered in the three-dimensional statement. Using this technique, the behavior of discrete and generalized elastic and waveguide characteristics has been studied for wide variety of real anisotropic materials of a cubic structure. The corresponding complex comparison and classification of the considered materials have been conducted.

ВВЕДЕНИЕ

Практическая разработка и применение элементов и устройств функциональной электроники в аппаратуре нового поколения бурно развивается в направлении использования анизотропных акустических кристаллов, стимулируя постоянное появление новых анизотропных материалов. Исследование закономерностей и особенностей поведения волновых, кинематических, силовых и энергетических характеристик при формировании физико-механических полей в волноводах из таких материалов требует специального их подбора, что всегда остается сложной задачей.

Для изотропных материалов этой проблемы не существует, так как их сравнение и упорядочивание по упругим свойствам полностью соответствует сравнению и упорядочиванию по волноводным свойствам на основе отношения фазовых скоростей продольных и сдвиговых монохромных волн. В любом изотропном материале с заданными модулями упругости λ , μ и плотностью ρ при любом направлении волнового вектора продольная монохромная волна имеет скорость $C_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, а две сдвиговые волны с взаимно ортогональной поляризацией – одинаковую скорость $C_S = \sqrt{\mu/\rho}$ [1]. Физико-механические параметры материала явным образом входят в формулы для скоростей,

отношение которых

$$\frac{C_P}{C_S} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{\frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu}},$$

как и обратное к нему C_S/C_P , зависит только от коэффициента Пуассона ν . Это позволяет просто и однозначно определить соответствие между упругими и волноводными свойствами конкретного изотропного материала, а также провести их упорядочивание и сравнение.

При переходе к анизотропным материалам волноводные свойства становятся зависимыми от направления волнового вектора $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Поэтому в каждом направлении формируется свое волновое поле, состоящее из одной квазипродольной составляющей, распространяющейся со скоростью $C_{KP}(\mathbf{n})$, и двух квазипоперечных, распространяющихся с разными фазовыми скоростями и имеющих взаимно ортогональную поляризацию. При этом квазипоперечные составляющие принято разделять по скорости на быструю со скоростью $C_{KS}^{RP}(\mathbf{n})$ и медленную со скоростью $C_{KS}^{SL}(\mathbf{n})$. Таким образом, для сравнения и упорядочивания анизотропных материалов по волноводным свойствам нужны как дискретные волноводные характеристики (для фиксированного заданного направления волнового вектора), так и обобщенные по всем

направлениям критерии. Описываемая ниже методика позволяет определять указанные критерии сравнения и упорядочивания анизотропных материалов по волноводным свойствам на основе данных о фазовых скоростях монохромных волн по характерным направлениям [2]. Становится возможным также сопоставление с результатами сравнения рассматриваемых материалов по упругим свойствам с использованием обобщенных критериев [3].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ ПРОВЕДЕНИЯ СРАВНИТЕЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Исследуется пространственный волноводный объект, представляющий собой однородную идеально упругую среду из анизотропного материала кубической структуры с безразмерной плотностью ρ , которая задается с точностью до нормирующего множителя $\rho_0 = 10^3$ кг/м³. Волноводный объект, упругие свойства которого характеризуются тремя независимыми безразмерными упругими постоянными $C = C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $\lambda = C_{12} = C_{13} = C_{23}$ и $G = G_{12} = G_{13} = G_{23}$, задаваемыми с точностью до нормирующего множителя $C_0 = 10^{10}$ Н/м² [4], отнесен к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ с осями, направленными по осям упругой симметрии материала.

Основу для разработки предлагаемой методики составляет трехмерная математическая модель, представляющая собой полную систему основных уравнений трехмерной линейной динамической теории упругости для пространственного волноводного объекта и связывающая компоненты вектора перемещений $U_i(\mathbf{x}, t)$, тензора напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ и тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$. Она непосредственно состоит из уравнений движения, уравнений закона Гука и соотношений Коши. Указанная математическая модель известным образом сводится к системе уравнений движения в перемещениях, а затем (путем введения волнового векторного потенциала) – к основному разрешающему обобщенному векторному волновому уравнению [3].

С помощью описанной в работе [3] процедуры выделения главной части и характерных дополнительных слагаемых получены структурные базовые формы представления основного разрешающего обобщенного векторного волнового уравнения, из которых определены обобщенные упругие безразмерные характеристики $K_{12}^{(S)}$, $K_{13}^{(S)}$, $K_{23}^{(S)}$ и $K_{123}^{(S)}$. Анализ свойств и поведения обобщенных

упругих характеристик для широкого набора анизотропных материалов определил соответствующую методику их сравнения и упорядочивания.

В работе [2] на основе той же трехмерной математической модели приведен алгоритм расчета фазовых скоростей упругих монохромных волн в анизотропной среде и исследованы волноводные свойства материалов кубической структуры в зависимости от направления волнового вектора и физико-механических свойств материала. Эти исследования и являются основой для определения дискретных и обобщенных волноводных характеристик, а также разработки методики комплексного сравнения и упорядочивания анизотропных материалов по упругим и волноводным свойствам.

В отличие от изотропного случая, волноводные свойства анизотропного материала для каждого фиксированного направления волнового вектора определяются тремя фазовыми скоростями: одной квазипродольной и двумя квазипоперечными скоростями монохромных волн в неограниченной упругой анизотропной среде. Поэтому в качестве одного из двух безразмерных дискретных параметров для сравнения волноводных свойств анизотропных материалов при фиксированном направлении волнового вектора можно взять отношение квазипоперечной ($C_{KS}(\mathbf{n})$) и квазипродольной ($C_{KP}(\mathbf{n})$) скоростей:

$$Vd_1(\mathbf{n}) = \frac{C_{KS}(\mathbf{n})}{C_{KP}(\mathbf{n})}.$$

К введенному дискретному волноводному параметру надо добавить еще один:

$$Vd_2(\mathbf{n}) = 2 \frac{C_{KS}^{RP}(\mathbf{n}) - C_{KS}^{SL}(\mathbf{n})}{C_{KS}^{RP}(\mathbf{n}) + C_{KS}^{SL}(\mathbf{n})}.$$

Эти два параметра определяют различие в волноводных свойствах анизотропных материалов кубической структуры для фиксированного направления волнового вектора. При переходе к изотропии первый из них принимает известное значение C_S/C_P , а второй тождественно обращается в нуль.

При разработке обобщенных волноводных критериев для сравнения и упорядочивания анизотропных материалов рассматриваемого класса необходимо учитывать волноводные свойства, обобщенные по всем направлениям. Основой для определения обобщенных волноводных критериев является поле фазовых скоростей в виде трех поверхностей, которые описывают соответствующие векторы фазовых скоростей монохромных волн при непрерывном изменении направления волнового вектора \mathbf{n} . Для изотропных материалов эти

поверхности представляют собой три концентрические сферы, две из которых совпадают, так как $C_{KS}^{RP} = C_{KS}^{SL}$. Таким образом, качественные и количественные отклонения геометрии этих поверхностей от сферической формы и будут представлять основу для определения обобщенных критериев. Очевидно, что в виду симметрии волноводных свойств всех рассматриваемых материалов относительно координатных плоскостей исследования достаточно проводить только в первом октанте.

2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ КОМПЛЕКСНОГО СРАВНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Материалы кубической структуры по обобщенным упругим свойствам делятся на две группы [3]. Принадлежность к одной из них определяется знаком обобщенного упругого безразмерного параметра

$$K^{(S)} = K_{12}^{(S)} = K_{13}^{(S)} = K_{23}^{(S)} = K_0 \frac{C + \lambda}{C},$$

где определяющим является безразмерная величина

$$K_0 = \frac{C - \lambda - 2G}{G},$$

по которой происходит деление всех анизотропных материалов кубической структуры на две группы (первая и вторая половина табл. 1, по 9 материалов) и упорядочивание этих материалов в пределах каждой группы.

Модуль обобщенного безразмерного упругого параметра

$$K_{123}^{(S)} = K^{(S)} K_2 = K_0 K_2 \frac{C + \lambda}{C}$$

является более чувствительным критерием для упорядочивания материалов, но только в пределах каждой группы, так как

$$K_2 = \frac{1}{G} \left(\frac{C - G - 2(\lambda + G)^2}{C + \lambda} \right) = K_0 \left(1 + \frac{\lambda + G}{C + \lambda} \right)$$

также выражается через K_0 и, следовательно,

$$K_{123}^{(S)} = K_0^2 \frac{C + 2\lambda + G}{C},$$

т.е. содержит квадрат параметра K_0 и, стало быть, всегда принимает положительные значения.

Результаты сравнения всех приведенных в табл. 1 материалов по обобщенным упругим свойствам полностью согласуются с результатами исследований [2, 3]. При этом между всеми рассмотренными обобщенными безразмерными упругими параметрами K_0 , K_2 , $K^{(S)}$, $K_{123}^{(S)}$ наблюдается соответствие. Результаты, касающиеся деления

анизотропных материалов кубической структуры на две группы, также подтверждают выводы работы [5], где для деления материалов на группы без их упорядочивания используется размерный обобщенный параметр $\Delta C = -K_0 G$. Это позволяет утверждать, что основной определяющий параметр для обобщенного сравнения и упорядочивания материалов кубической структуры по упругим свойствам – это безразмерный обобщенный упругий параметр K_0 .

Подробное исследование качественных и количественных особенностей в структуре поля скоростей монохромных волн для материалов кубической структуры с использованием ранее полученных формул для фазовых скоростей [2] дает возможность определить именно те характерные качественные и количественные различия в геометрии соответствующих трех волновых поверхностей, которые свойственны каждой из двух групп рассмотренных материалов. По результатам проведенных исследований определены основные сечения волновых поверхностей, которые являются определяющими для выработки обобщенных волноводных критериев сравнения и упорядочивания материалов кубической структуры. В качестве таковых следует выбирать три эквивалентных сечения координатными плоскостями (базовые сечения) и три эквивалентных сечения диагональными плоскостями, проходящими через координатную ось и бисектрису ортогонального к ней квадранта. В диагональных плоскостях находятся все три определяющих направления волнового вектора, поэтому эти сечения будут основными определяющими. Они, как и базовые, оказываются сечениями симметрии для волновых поверхностей.

Одно из определяющих направлений в каждом из трех диагональных сечений является базовым (b) и совпадает с направлением координатной оси. Скорость продольной составляющей в этом направлении, которая равна

$$C_P(b) = \sqrt{\frac{C_0 C}{\rho_0 \rho}},$$

будет максимальной для материалов первой группы (первая половина табл. 1 и 2) и минимальной для второй группы материалов (вторая половина обеих таблиц). Второе определяющее направление волнового вектора, совпадающее с проекцией диагональной плоскости на ортогональную к ней координатную плоскость, назовем диагональным (d). Скорость квазипродольной составляющей в этом направлении явным образом выражается через обобщенный упругий безразмерный параметр

K_0 и вычисляется по простой формуле

$$C_{KP}(d) = C_P(b) \sqrt{1 - \frac{GK_0}{2C}}.$$

Скорость квазипродольной составляющей в третьем (так называемом симметричном) определяющем направлении волнового вектора (s) – для него все три координаты волнового вектора равны между собой также имеет явное представление:

$$C_{KS}(s) = C_P(b) \sqrt{1 - \frac{2GK_0}{3C}}.$$

Из приведенных формул следует, что для материалов первой ($K_0 > 0$) и второй ($K_0 < 0$) группы одним из обобщенных волноводных критериев разделения служит характер распределения экстремумов в волновой поверхности для продольной составляющей. Для материалов первой группы максимум будет в базовом направлении, а минимум – в симметричном. Для материалов второй группы экстремальными будут также базовое и симметричное направления со взаимной сменой максимума и минимума. При этом степень рельефности этих экстремумов будет явно зависеть от модуля параметра K_0 .

Характерна особенность квазипоперечных волн для всех кубических материалов – равенство их фазовых скоростей не только в базовом (b), но и в симметричном направлении (s) [2]. Скорости двух поперечных составляющих в базовом направлении совпадают:

$$C_S(b) = \sqrt{\frac{C_0 G}{\rho_0 \rho}},$$

что соответствует минимальному значению поперечной составляющей для материалов первой группы и максимальному для второй группы. Для симметричного направления волнового вектора (s) фазовые скорости быстрой и медленной квазипоперечных составляющих одинаковы и также имеют явное представление:

$$C_{KS}(s) = C_S(b) \sqrt{1 + \frac{K_0}{3}}.$$

В диагональном направлении волнового вектора (d) фазовые скорости квазипоперечных волн различны. При этом одна из них всегда совпадает с базовым значением, а вторая задается как

$$C_{KS}(d) = C_S(b) \sqrt{1 + \frac{K_0}{2}}.$$

Это значение для материалов первой группы ($K_0 > 0$) будет максимальным, а для второй

($K_0 < 0$) – минимальным. Таким образом, диагональное направление волнового вектора является экстремальным для квазипоперечных скоростей, так как при пересечении квазипоперечных поверхностей волнового поля координатными плоскостями максимальное различие их значений будет именно в диагональном направлении (d).

Отсюда следует, что в качестве характерных дискретных волноводных параметров для материалов кубической структуры можно взять $Vd_1(b)$, $Vd_1(d)$, $Vd_1(s)$, значения которых для исследуемых материалов приведены в табл. 2 (первые три колонки). Характер их изменения индивидуален и неупорядочен. Они не согласуются ни между собой, ни с упорядоченным характером изменения характерного безразмерного упругого параметра K_0 .

Введение в рассмотрение безразмерных волноводных параметров

$$Vo(d) = \frac{C_{KP}(d) - C_P(b)}{C_P(b)},$$

$$Vo(s) = \frac{C_{KP}(s) - C_P(b)}{C_P(b)},$$

связанных с волновым полем квазипродольной составляющей, позволяет обобщить только качественные изменения, т. е. деление на группы (см. четвертую и пятую колонки табл. 2). Если же в качестве безразмерного обобщенного волноводного параметра взять отношение экстремальных значений характерных дискретных волноводных параметров, т. е. положить

$$Vo_1 = \frac{Vd_1(d)}{Vd_1(b)},$$

то получим полное согласование с упругими критериями (см. седьмую колонку табл. 2). Отметим, что разбивка на группы и упорядочивание совпадают как с характерным безразмерным упругим параметром K_0 , так и с приведенным в шестой колонке табл. 2 основным безразмерным обобщенным волноводным параметром

$$Vo_2 = 2 \frac{C_{KS}(d) - C_{KS}(b)}{C_{KS}(d) + C_{KS}(b)}.$$

При этом дискретный волноводный параметр $Vd_2(d)$ для всех материалов равен модулю параметра Vo_2 , а

$$Vd_2(b) = Vd_2(s) \equiv 0.$$

Полученные результаты также полностью согласуются и с выводами работы [2] (см. седьмую и

Табл. 1. Сравнение материалов по упругим свойствам

Материал	C	G	λ	ρ	$K^{(S)}$	$K_{123}^{(S)}$	K_0	K_2
K Br	3.46	0.515	0.56	2.75	4.2188	19.4150	3.6311	4.6021
K Cl	4.07	0.63	0.69	1.9891	3.9356	16.9161	3.3651	4.2983
Ag Cl	6.01	0.625	3.62	5.571	2.9226	7.6808	1.8240	2.6280
Cs Cl	3.64	0.8	0.92	3.988	1.7538	3.3815	1.4000	1.9281
Ag Br	5.63	0.72	3.3	6.476	1.9607	3.5146	1.2361	1.7926
Na I	3.04	0.72	0.9	3.655	1.2601	1.7288	0.9722	1.3720
Na Cl	4.911	1.284	1.285	2.1678	1.0396	1.2118	0.8240	1.1656
Na F	9.71	2.8	2.43	2.809	0.7502	0.6440	0.6000	0.8585
Bi ₄ (GeO ₄) ₃	11.58	4.36	2.7	7.12	0.0453	0.0025	0.0367	0.0548
Ba F ₂	9.04	2.53	4.06	4.893	-0.0458	0.0022	-0.0316	-0.0475
Sr TiO ₃	31.76	12.35	10.25	5.13	-0.3417	0.1357	-0.2583	-0.3973
MgO	29.59	15.39	9.54	3.576	-0.9220	1.0524	-0.6972	-1.1414
Ge	13.0	6.7	4.9	5.3267	-1.0892	1.4200	-0.7910	-1.3037
GaP	11.4	7.043	3.475	4.18	-1.1414	1.7045	-0.8748	-1.4933
GaAs	12.26	6.00	5.71	5.316	-1.3314	1.9974	-0.9083	-1.5002
LiF	11.2	6.32	4.56	2.64	-1.3359	2.1438	-0.9494	-1.6048
ZnSe	8.72	3.92	5.24	5.42	-1.7806	3.2800	-1.1122	-1.8421
β -ZnS	10.46	4.613	6.53	4.091	-1.8648	3.5450	-1.1481	-1.9010

Табл. 2. Сравнение материалов по волноводным свойствам

Материал	Vd ₁ (b)	Vd ₁ (d)	Vd ₁ (s)	Vo(d)	Vo(s)	Vo ₂	Vo ₁	Vo ₃
K Br	0.3858	0.7578	0.7172	-0.1457	-0.2002	0.5063	1.9642	1.6780
K Cl	0.3934	0.7493	0.7093	-0.1400	-0.1921	0.4836	1.9045	1.6378
Ag Cl	0.3225	0.4687	0.4375	-0.0486	-0.0654	0.3213	1.4534	1.3828
Cs Cl	0.4688	0.6645	0.6368	-0.0801	-0.1084	0.2638	1.4174	1.3038
Ag Br	0.3576	0.4740	0.4493	-0.0403	-0.0542	0.2395	1.3255	1.2720
Na I	0.4867	0.6307	0.6087	-0.0593	-0.0800	0.1974	1.2959	1.2191
Na Cl	0.5113	0.6432	0.6238	-0.0554	-0.0746	0.1721	1.2580	1.1883
Na F	0.5370	0.6406	0.6254	-0.0442	-0.0594	0.1310	1.1929	1.1402
Bi ₄ (GeO ₄) ₃	0.6136	0.6214	0.6202	-0.0035	-0.0046	0.0091	1.0126	1.0091
Ba F ₂	0.5290	0.5237	0.5247	0.0022	0.0029	-0.0080	0.9899	0.9921
Sr TiO ₃	0.6236	0.5678	0.5771	0.0248	0.0329	-0.0691	0.9106	0.9332
MgO	0.7212	0.5355	0.5670	0.0869	0.1143	-0.2135	0.7426	0.8071
Ge	0.7179	0.5087	0.5462	0.0972	0.1277	-0.2504	0.7086	0.7775
GaP	0.7860	0.5231	0.5672	0.1270	0.1663	-0.2856	0.6655	0.7501
GaAs	0.6996	0.4675	0.5130	0.1056	0.1386	-0.3004	0.6682	0.7388
LiF	0.7512	0.4835	0.5331	0.1260	0.1650	-0.3191	0.6437	0.7248
ZnSe	0.6705	0.3995	0.4606	0.1180	0.1547	-0.4006	0.5959	0.6662
β -ZnS	0.6641	0.3872	0.4512	0.1194	0.1565	-0.4203	0.5830	0.6527

восьмую колонки табл. 2), если учесть, что

$$V_{03} = \frac{C_{KS}(d)}{C_S(b)}, \quad K_{PS} = \frac{1}{V_{01}}, \quad K_{SS} = \frac{1}{V_{03}}.$$

Таким образом, все три обобщенных волноводных параметра V_{01} , V_{02} и V_{03} полностью согласуются с основным обобщенным упругим параметром K_0 и могут быть использованы в качестве обобщенных критериев деления по волноводным свойствам материалов кубической структуры на группы и последующего их упорядочивания в пределах каждой из групп.

ВЫВОДЫ

Проведенные исследования показали полное совпадение качественных и количественных результатов сравнения и упорядочивания анизотропных материалов кубической структуры по упругим и волноводным свойствам на основе введенных обобщенных критериев K_0 , V_{01} , V_{02} и V_{03} . Этот результат имеет очевидное прикладное

значение при подборе конкретных материалов для проведения качественных исследований закономерностей и особенностей поведения волновых, кинематических, силовых и энергетических характеристик при формировании физико-механических полей в волноводах из таких материалов.

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. Мелешко В. В., Моисеенко В. А. Волноводные свойства упругих материалов кубической структуры // Теор. прикл. мех. – 2007. – **43**. – С. 135–143.
3. Моисеенко В. А. Разработка методики сравнения анизотропных материалов по упругим свойствам // Акуст. вісн. – 2008. – **11**, N 3. – С. 76–84.
4. Блистанов А. А., Бондаренко В. С., Чкалова В. В. и др. Акустические кристаллы. Справочник. – М.: Наука, 1982. – 632 с.
5. Кулиев И. Г., Кулиев И. И. Упругие волны в кубических кристаллах с положительной и отрицательной анизотропией модулей упругости второго порядка // Физ. тверд. тела. – 2007. – **49**, N 3. – С. 422–429.