

УДК 533.63, 534.23

НЕСТАЦИОНАРНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ТОНКОГО КРЫЛА: БЛИЖНЕЕ И ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ

П. В. ЛУКЪЯНОВ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 11.01.2008 ◊ Пересмотрено 02.12.2009*

При определенных ограничениях выведено уравнение распространения малых возмущений трехмерного нестационарного потенциального течения вокруг тонкого крыла. Показано, что оно в линейном приближении совпадает с известным уравнением акустики неоднородной движущейся среды. Проведен частотный анализ характерных случаев упрощения полученного уравнения. На основе классического подхода Кирхгофа с помощью обобщенной формулы Грина получено интегральное соотношение, непосредственно связывающее между акустическое ближнее и дальнее поле. Выполнен сравнительный анализ сквозного решения с имеющимися подходами. Приведен пример численного расчета ближнего и дальнего звукового поля, генерируемого при взаимодействии неоднородного потока с лопастью ротора вертолета.

При певних обмеженнях виведено рівняння поширення малих збурень тривимірної нестационарної течії навколо тонкого крила. Показано, що воно у лінійному наближенні співпадає з відомим рівнянням акустики неоднородного середовища. Проведено частотний аналіз характерних випадків спрощення одержаного рівняння. За допомогою класичного підходу Кірхгофа й узагальненої формули Гріна одержано інтегральне співвідношення, яке безпосередньо зв'язує акустичне ближнє й дальнє поле. Виконано порівняльний аналіз наскрізного розв'язку з існуючими підходами. Наведено приклад чисельного розрахунку ближнього й дальнього звукового поля, яке генерується при взаємодії неоднорідного потоку з лопаттю ротора вертольота.

Under certain limitations, an equation of small disturbances propagation in a three-dimensional unsteady flow around a thin wing has been derived. In a linear approximation, it has been shown to coincide with the known equation of acoustics of a moving heterogeneous medium. Frequency analysis of various cases of equation simplification has been carried out. Using the the generalized Green's formula and Kirchoff's approach, an integral relation has been obtained for interconnecting of the near and far field. A comparative analysis of the through solution with existing approaches is given. A numerical example is offered for computation of the near and far sound fields generated at interaction of helicopter's rotor blade with a nonuniform flow.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость написания данной работы возникла в результате знакомства автора с рядом публикаций, посвященных излучению звука вращающейся лопастью вертолета на различных режимах ее обтекания. Как оказалось, единой сквозной трактовки, позволяющей связать задачи аэродинамики и акустики в рамках оправданных предположений, до сих пор нет. Это обусловлено тем, что исследователи далеко не всегда интересовались акустическим аспектом явления. Основной акцент делался на изучении ударных волн, возникающих на поверхности лопасти вертолета (или крыла самолета), приводящих при эксплуатации летательных аппаратов к негативным последствиям.

Важные свойства ударных волн можно описать уже в рамках плоской (двумерной) нестационарной постановки задачи [10]. Трансзвуковое плоское нестационарное течение, а также трехмерное (при определенных ограничениях на торцах) стационарное трансзвуковое течение рассмотрено в работе [7]. На сегодняшний день не получе-

но общее уравнение, описывающее нестационарное трехмерное распространение малых возмущений при обтекании тонкого тела для различных скоростных режимов. Тем не менее, результаты расчета в стационарной трехмерной постановке для лопасти конечного размаха [14] показали, что интенсивность ударной волны меняется в зависимости от ее геометрии и расстояния до конца. Таким образом, необходимость решения задачи в трехмерной нестационарной постановке очевидна.

Существует еще один момент, который необходимо упомянуть: наличие на концах лопасти завихренности. Она появляется в результате взаимодействия набегающего на крыло потока при концевом обтекании и воздуха, частично выталкиваемого из под крыла. При малых скоростях набегающего потока такое индуктивное течение необходимо учитывать, поскольку оно приводит к появлению значительного индуктивного сопротивления. Но при больших скоростях (порядка одного Маха) индуктивное сопротивление резко падает и не играет большой роли. Остается лишь концевой эффект завихренности при вращении, который учитывают в более сложной постановке за-

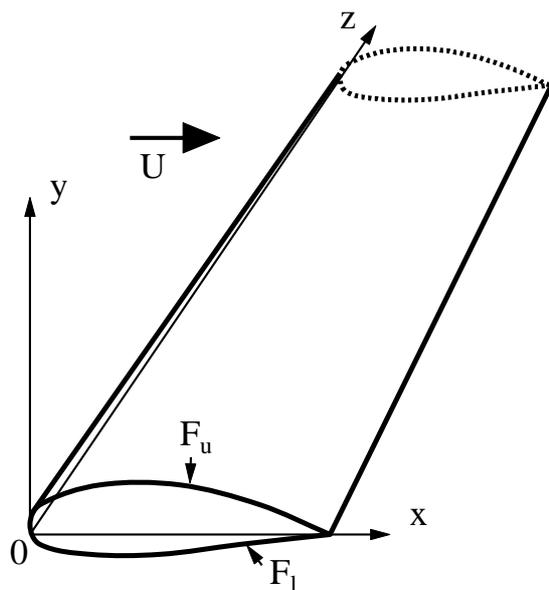


Рис. 1. Схема обтекания крыла потоком

дачи, когда рассматривается взаимодействие вихря с наступающей лопастью. Кроме того, современные конструкции лопастей роторов создаются с тем расчетом, чтобы погасить поле завихренности на их концах. Поэтому в данной работе концевой эффект не изучается, а рассматривается влияние изменения геометрии крыла и неоднородности потока на основные источники шума вращения – монопольный и дипольный. В свою очередь, шум вращения генерируется непосредственно на поверхности лопасти, а не на ее краях. Краевой же шум создается квадрупольными источниками. Он существенно ниже по уровню и поэтому не представляет большого интереса.

В работах, посвященных изучению дальнего поля от движущейся лопасти, часто используются линеаризованные модели течений, не учитывающие влияние важных нелинейных эффектов. Некоторые авторы [3, 4] пытались связать ближнее и дальнее поле путем подстановки вычисленных в ближнем поле значений потенциала и его производных, в интегральные соотношения для дальнего поля в качестве входных условий на границе. Это наиболее адекватный из имеющихся подходов для расчета дальнего поля. Его применение, однако, затрудняется отсутствием универсальных оценок расстояния от поверхности излучения, где уже можно пользоваться линеаризованным уравнением для расчета дальнего поля. Такая оценка есть лишь для плоского стационарного течения [11] и

составляет порядка двух хорд сечения лопасти.

В данной работе в трехмерной нестационарной постановке (при указанном ограничении на торцах) выведено уравнение распространения малых возмущений, исходящих от тонкого крыла при обтекании его однородным набегающим потоком, которое с точностью до линейного приближения совпадает с основным уравнением линейной аэроакустики. Таким образом, удалось показать непосредственную связь аэродинамической теории малых возмущений и аэроакустики. На основе классического подхода Кирхгофа, впервые примененного Морганом [13] для изучения звука от движущейся поверхности, с использованием обобщенной формулы Грина [2] выведено интегральное соотношение для дальнего поля.

1. УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Из сказанного следует, что при изучении шума вращения при достаточно больших скоростях можно пользоваться потенциальной моделью течения для протяженного крыла конечного размаха. При этом приближенно будем полагать края лопасти таковыми, что поток ее плавно обтекает.

Пусть трехмерное крыло конечного размаха расположено так, как показано на рис. 1, $Oxyz$ – прямоугольная декартова система координат. Хорда поперечного сечения крыла обозначена как c , протяженность – как R . Крыло считается тонким, поэтому его толщина является малым параметром задачи и будет введена позже. Ограничение на трехмерность заключается в том, что концевые эффекты, а также тонкая вихревая пелена, сходящая с крыла, в рассмотрение не принимаются (под концевыми эффектами подразумеваем выполнение условия проскальзывания потока при $z=0$ и R). В таком приближении боковые торцы лопасти фактически не возмущают течение. На самом же деле вблизи них присутствует определенная завихренность, которая не принимается во внимание в рамках применяемой здесь потенциальной теории.

Если крыло симметрично, то задачу можно рассматривать лишь для верхнего полупространства. Для несимметричного крыла численный расчет поля необходимо выполнять для верхнего ($y > 0$) и нижнего ($y < 0$) полупространств с учетом конкретной формы его нижней и верхней поверхностей.

Уравнение, описывающее баротропное течение идеальной сжимаемой жидкости (газа), имеет вид [8]

$$a^2 \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla) - 2\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0,$$

или с учетом потенциальности течения ($\mathbf{v} = \nabla\phi$):

$$a^2 \operatorname{div}(\nabla\phi) - \nabla\phi(\nabla\phi \cdot \nabla) - 2\nabla\phi \frac{\partial \nabla\phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Входящая в него скорость звука a связана с потенциалом течения уравнением Бернулли:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\nabla^2 \phi}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{U^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1}, \quad (2)$$

где U – скорость набегающего потока; γ – показатель адиабаты (для воздуха $\gamma = 1.4$).

В дальнейшем производные по времени и координатах будем обозначать индексами снизу: $\partial^2 \phi / \partial x^2 = \phi_{xx}$ и т. п. Тогда уравнения (1), (2) можно переписать в эквивалентной форме [1]:

$$\begin{aligned} & (a^2 - \phi_x^2)\phi_{xx} - 2\phi_x\phi_{xt} + (a^2 - \phi_y^2)\phi_{yy} + \\ & + (a^2 - \phi_z^2)\phi_{zz} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} - 2\phi_y\phi_z\phi_{yz} - \\ & - 2\phi_x\phi_z\phi_{xz} - 2\phi_y\phi_{yt} - 2\phi_z\phi_{zt} - \phi_{tt} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \\ = \frac{U^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1}. \end{aligned} \quad (4)$$

В системе уравнений (3), (4) неизвестными являются потенциал ϕ и скорость звука a , которая изменяется вместе с производными потенциала ϕ . На верхней и нижней поверхностях крыла (см. рис. 1) задается условие непротекания:

$$F_t + \mathbf{v} \nabla F = 0. \quad (5)$$

Здесь индексы “ u ” (верхняя) и “ l ” (нижняя) у функции F опущены, чтобы избежать путаницы с дифференцированием, что не будет играть никакой роли при оценке порядков отдельных слагаемых уравнения, которое будет получено ниже. Для анализа выражения граничного условия это также не существенно, поскольку максимальные отклонения от средней линии как верхней, так и нижней поверхностей крыла – величины одного порядка малости. Таким образом, о различии необходимо помнить лишь во время расчета.

Функцию F можно представить в виде

$$F_{u,l} = F_{u,l}(x, z, t) = y - h_{u,l}(x, z, t) \equiv 0. \quad (6)$$

В выражении (6) $h(x, z, t) = \delta g(\xi, \zeta, \tau)$ – функция, задающая форму поверхности крыла; δ – отношение толщины крыла к длине хорды. Величина

F может быть нестационарной за счет движения крыла.

Кроме граничного условия (6), приближенно выполняется условие Кутта – Жуковского – отсутствие перепада давления на задней кромке [7]. Область существования звукового поля имеет две границы – поверхность крыла и поверхность некоторой сферы достаточно большого радиуса. На первой границе условие уже задано, а на второй предполагается, что малые возмущения давления и скорости затухают на бесконечности за счет малого затухания в среде. Аналитическое выполнение условий на бесконечности будет сделано при выводе выражения для потенциала давления в дальнем поле (раздел 1.2).

Поскольку рассматривается общая нестационарная постановка задачи об обтекании тонкого крыла, то необходимы начальные условия. Количество их должно соответствовать порядку дифференциального уравнения по переменной t . В явном виде эти условия будут поставлены в разделе 1.3.

1.1. Обезразмеривание расчетной системы уравнений

Введем безразмерные координаты:

$$\xi = \frac{x}{c}, \quad \eta = \lambda y, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad \tau = kt. \quad (7)$$

Потенциал течения с учетом характера набегающего потока представим в виде

$$\phi = Uc \left(\frac{x}{c} + \frac{\phi'}{c} \right) = U(x + \phi'), \quad (8)$$

где ϕ' – малые возмущения:

$$\frac{\phi'}{c} = \epsilon f(\xi, \eta, \zeta, \tau); \quad (9)$$

$f(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ – безразмерная форма малых возмущений потенциала. Величины ϵ , λ и k подлежат определению в дальнейшем.

С учетом соотношений (7) – (9) производные потенциала ϕ , входящие в уравнения (3), (4), запишутся как

$$\begin{aligned} \phi_x &= U(1 + \epsilon f_\xi), & \phi_y &= U\lambda \epsilon c f_\eta, \\ \phi_z &= U \frac{c}{R} \epsilon f_\zeta, & \phi_t &= U \epsilon k c f_\tau, \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{xx} &= \frac{U}{c} \epsilon f_{\xi\xi}, & \phi_{xy} &= U \lambda \epsilon f_{\xi\eta}, \\
 \phi_{yy} &= U \lambda^2 \epsilon c f_{\eta\eta}, & \phi_{xz} &= U \frac{\epsilon}{R} f_{\xi\zeta}, \\
 \phi_{yz} &= U \frac{c}{R} \lambda \epsilon f_{\eta\zeta}, & \phi_{xt} &= U k \epsilon f_{\xi\tau}, \\
 \phi_{ty} &= U \lambda \epsilon k c f_{\eta\tau}, & \phi_{zt} &= U \frac{c}{R} \epsilon k f_{\zeta\tau}, \\
 \phi_{tt} &= U k^2 \epsilon c f_{\tau\tau}.
 \end{aligned} \tag{10b}$$

Подставив выражения (10a), (10b) в уравнение (3), получим

$$\begin{aligned}
 (a^2 - U^2(1 + \epsilon f_{\xi})^2) U \frac{\epsilon}{c} f_{\xi\xi} - \\
 - 2U^2 \epsilon k (1 + \epsilon f_{\xi}) f_{\xi\tau} + \\
 + (a^2 - U^2(c \frac{\epsilon f_{\xi}}{R})^2) U \frac{c\epsilon}{R^2} f_{\zeta\zeta} - \\
 - 2U^2 (\lambda \epsilon)^2 k c^2 f_{\eta} f_{\eta\tau} - \\
 - 2U^3 (\frac{\lambda}{R})^2 (\epsilon c)^3 f_{\eta} f_{\zeta} f_{\eta\zeta} - \\
 - 2U^3 \frac{(c\epsilon^2)}{R^2} (1 + \epsilon f_{\xi}) f_{\zeta} f_{\xi\zeta} + \\
 + (a^2 - U^2(c \lambda \epsilon f_{\eta})^2) U c \lambda^2 \epsilon f_{\eta\eta} - \\
 - 2U^3 (1 + \epsilon f_{\xi}) (c \lambda \epsilon)^2 f_{\eta} f_{\xi\eta} - \\
 - 2U^2 \frac{(c\epsilon^2)}{R^2} k f_{\zeta} f_{\zeta\tau} - U \epsilon k^2 c f_{\tau\tau} = 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Запишем уравнение (4) в более удобной форме, выразив a^2 :

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2}{U^2} &= \frac{1}{M_1^2} + \\
 &+ \left[\frac{1}{2} - \frac{\phi_t}{U^2} - \frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2U^2} \right] (\gamma - 1),
 \end{aligned} \tag{12}$$

или

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2}{U^2} &= \frac{1}{M_1^2} - \epsilon \left[\frac{kc}{U} f_{\tau} + f_{\xi} + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \epsilon \left(f_{\xi}^2 + (\lambda c)^2 f_{\eta}^2 + \left(\frac{c}{R} \right)^2 f_{\zeta}^2 \right) \right] (\gamma - 1),
 \end{aligned} \tag{13}$$

где $M_1 = M_{\infty} = U/a_{\infty}$ – число Маха набегающего потока.

Слагаемые с множителем a^2 в уравнении (11) перенесем вправо, подставим соотношение (13) в (11) и разделим полученное выражение на $U^3 \epsilon$:

$$\begin{aligned}
 \frac{(ck)^2}{U^2} f_{\tau\tau} + (1 + \epsilon f_{\xi})^2 \frac{f_{\xi\xi}}{c} + \epsilon^2 \lambda^4 c^3 f_{\eta}^2 f_{\eta\eta} + \\
 + \frac{\epsilon^2}{R^4} c^3 f_{\zeta}^2 f_{\zeta\zeta} + 2\lambda^2 \epsilon c (1 + \epsilon f_{\xi}) f_{\eta} f_{\xi\eta} + \\
 + 2 \frac{(\lambda \epsilon)^2}{R^2} c^3 f_{\eta} f_{\zeta} f_{\eta\zeta} + 2 \frac{\epsilon}{R^2} c (1 + \epsilon f_{\xi}) f_{\zeta} f_{\xi\zeta} + \\
 + 2 \frac{k}{U} (1 + \epsilon f_{\xi}) f_{\xi\tau} + 2 \frac{\lambda^2 \epsilon k}{U} c^2 f_{\eta} f_{\eta\tau} + \\
 + 2 \frac{\epsilon k}{R^2 U} c^2 f_{\zeta} f_{\zeta\tau} = \left\{ \frac{1}{M_1^2} - \epsilon \left[\frac{kc}{U} f_{\tau} + f_{\xi} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\epsilon}{2} \left(f_{\xi}^2 + \lambda^2 c^2 f_{\eta}^2 + \frac{c^2}{R^2} f_{\zeta}^2 \right) \right] (\gamma - 1) \right\} \times \\
 \times \left[\frac{f_{\xi\xi}}{c} + f_{\eta\eta} \lambda^2 c + \frac{f_{\zeta\zeta}}{R^2} c \right].
 \end{aligned} \tag{14}$$

Малость возмущений скорости

$$\frac{v'_x}{U} = \epsilon f_{\xi}, \quad \frac{v'_y}{U} = \epsilon \lambda c f_{\eta}, \quad \frac{v'_z}{U} = \frac{\epsilon c}{R} f_{\zeta} \tag{15}$$

подразумевает, что

$$\epsilon \ll 1, \quad \epsilon \lambda c \ll 1, \quad \frac{\epsilon c}{R} \ll 1. \tag{16}$$

Исходя из оценок (16), в уравнении (14) при $f_{\xi} f_{\xi\xi}$ оставим слагаемые порядка единицы (т.е. ϵ^0) и ϵ , поскольку в режиме трансзвукового обтекания последние необходимо учитывать:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{kc}{U} \right)^2 f_{\tau\tau} + \left[1 - \frac{1}{M_1^2} + (1 + \gamma) \epsilon f_{\xi} \right] f_{\xi\xi} + \\
 + 2 \frac{kc}{U} f_{\xi\tau} - \frac{(\lambda c)^2}{M_1^2} f_{\eta\eta} - \left(\frac{c}{R} \right)^2 \frac{1}{M_1^2} f_{\zeta\zeta} = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Полученное соотношение является уравнением распространения звука при обтекании тонкого тела с учетом нелинейного члена. С точностью до линейных слагаемых оно совпадает с аэроакустическим приближением [1, 2]. Нелинейный член играет важную роль в трансзвуковой области скоростей U и за счет него формируется слабая ударная волна. Пренебречь им нельзя [9], поскольку трансзвуковое течение возникает при различных условиях в разных зонах над крылом, а слабая ударная волна в пределе переходит в звуковую волну [15], существенно повышающую уровень акустического поля.

1.2. Коэффициент давления

Одной из наиболее важных характеристик ближнего поля является коэффициент давления C_p , описывающий изменение давления над (под) лопастью:

$$C_p = 2 \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U^2}. \quad (18)$$

Исходя из определения скорости звука $a_\infty^2 = \gamma p_\infty / \rho_\infty$ и справедливых для адиабатического случая соотношений

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(\frac{a^2}{a_\infty^2} \right)^{1/(\gamma-1)},$$

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma = \left(\frac{a^2}{a_\infty^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)},$$

получаем

$$\frac{p}{p_\infty} - 1 = \frac{p - p_\infty}{p_\infty} = \left(\frac{a^2}{a_\infty^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1. \quad (19)$$

Подставив соотношение (19) в формулу (18), имеем

$$C_p = 2 \frac{a_\infty^2}{\gamma U^2} \left[\left(\frac{a^2}{a_\infty^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right]. \quad (20)$$

В выражении (20) неизвестная величина a . Из уравнения (4) с учетом уравнения (11) после элементарных преобразований получим

$$\frac{a^2}{a_\infty^2} = 1 - \frac{(\gamma-1)M_1^2 \epsilon}{2} \left[\frac{2kc}{U} f_\tau + 2f_\xi + \right. \\ \left. + \epsilon \left(f_\xi^2 + (\lambda c)^2 f_\eta^2 + \left(\frac{c}{R} \right)^2 f_\zeta^2 \right) \right], \quad (21)$$

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\left\{ 1 - \frac{(\gamma-1)M_1^2 \epsilon}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\frac{2kc}{U} f_\tau + 2f_\xi + \epsilon \left(f_\xi^2 + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (\lambda c)^2 f_\eta^2 + \left(\frac{c}{R} \right)^2 f_\zeta^2 \right) \right] \right\}^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right). \quad (22)$$

Малость возмущений подразумевает малые отклонения как компонент скорости (15), так и возмущенного давления. Следовательно, на основании выражения (22) имеем

$$\epsilon M_\infty^2 \ll 1, \quad \frac{\epsilon M_\infty^2 kc}{U} \ll 1, \\ (\epsilon \lambda c M_\infty)^2 \ll 1, \quad \left(\frac{\epsilon M_\infty c}{R} \right)^2 \ll 1. \quad (23)$$

Полученные в этом разделе соотношения будут учитываться при анализе различных случаев обтекания крыла.

1.3. Граничное и начальные условия

Граничным условием является условие непротекания (5). На основании соотношений (5) и (6) получим

$$\frac{dy}{dt} = c \frac{dh}{dt}, \quad (24)$$

где смысл полной производной по времени раскрывается как

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + V \cdot \nabla(\cdot).$$

Если дополнительно учесть, что

$$\frac{dy}{dt} = \phi_y,$$

то выражение (24) запишется в виде

$$c(h_t + v_x h_x + v_z h_z) = \phi_y. \quad (25)$$

Поскольку

$$h_t = \delta k g_\tau, \quad h_x = \frac{\delta}{c} g_\xi, \quad h_z = \frac{\delta}{R} g_\zeta, \\ v_x = \phi_x = U(1 + \epsilon f_\xi), \quad v_z = U \frac{\epsilon c}{R} f_\zeta, \quad (26)$$

$$\phi_y = U c \epsilon \lambda f_\eta.$$

то формула (25) преобразуется в

$$c \delta [k g_\tau + U(1 + \epsilon f_\xi) g_\xi] + U \frac{c \epsilon}{R} f_\zeta \frac{c \delta}{R} g_\zeta = \epsilon \lambda c U f_\eta. \quad (27)$$

Учитывая, что $1 + \epsilon/c \approx 1$, а также пренебрегая последним слагаемым в левой части равенства (27) ввиду его малости, получаем

$$\delta \left[\frac{kc}{U} g_\tau + g_\xi \right] = \epsilon \lambda c f_\eta, \quad \eta = 0, \quad 0 < \xi < 1. \quad (28)$$

Поскольку в полном уравнении присутствует вторая производная по времени t , необходимо задать два начальных условия:

$$\phi' = 0, \quad \phi'_t = 0, \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (29)$$

1.4. Анализ уравнения (17)

Для того, чтобы граничная задача имела смысл [9], уравнение (17) перепишем в форме, в которой всегда будет присутствовать слагаемое $f_{\eta\eta}$.

Для этого разделим уравнение на коэффициент λ^2/M_1^2 при $f_{\eta\eta}$:

$$f_{\eta\eta} = \frac{(M_1 k)^2}{(\lambda U)^2} f_{\tau\tau} + \frac{M_1^2}{(\lambda c)^2} \left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right) f_{\xi\xi} + \frac{M_1^2}{(\lambda c)^2} (1 + \gamma) \epsilon f_{\xi} f_{\xi\xi} + 2 \frac{k c}{U} \frac{M_1^2}{(c \lambda)^2} f_{\xi\tau} - \frac{1}{(\lambda R)^2} f_{\zeta\zeta} = 0. \quad (30)$$

Граничное условие (28) позволяет выделить различные специальные случаи связи параметров λ , ϵ и δ .

До сих пор не уточнялся физический смысл параметра k в безразмерном времени $\tau = kt$. Поскольку предполагается, что приведенная выше теория при определенных допущениях будет использована для описания излучения звука вращающимся винтом, в качестве масштаба k выберем частоту вращения винта Ω : $\tau = \Omega t$. Теперь условие (28) переписется в виде

$$\delta \left[\frac{\Omega c}{U} g_{\tau} + g_{\xi} \right] = \epsilon \lambda c f_{\eta}, \quad \eta = 0, \quad 0 < \xi < 1. \quad (31)$$

В зависимости от частоты вращения Ω выделим следующие случаи:

- 1) $\frac{c\Omega}{U} \ll 1$, $\lambda = \frac{\delta}{c\epsilon}$, $g_{\xi} = f_{\eta}$;
- 2) $\frac{c\Omega}{U} \sim O(1)$, $\lambda = \frac{\delta}{c\epsilon}$, $\frac{\Omega c}{U} g_{\tau} + g_{\xi} = f_{\eta}$;
- 3) $\frac{c\Omega}{U} \gg 1$, $\lambda = \frac{\delta\Omega}{U\epsilon}$, $g_{\tau} = f_{\eta}$.

Случай 1 соответствует очень низким частотам, не характерным для вращения винта. Случай 2 соответствует реальным частотам вращения. Обратим внимание на величину U . Предполагается, что в данный фиксированный момент лопасть ометается с суммарной скоростью U , содержащей в себе как линейную скорость движения вертолета, так и некоторую осредненную скорость вращения винта, условно разделенного на несколько частей вдоль радиуса. Для каждой такой части лопасти эта скорость будет своя, а полученное уравнение справедливо для каждого из участков, но при разных суммарных скоростях. Случай 3 для вращающегося винта практически не реализуем, поскольку с ростом Ω автоматически растет и U .

Исходя из этих рассуждений, перейдем к более детальному анализу случая 2. Учтя, что $\lambda = \delta/\epsilon c$,

из уравнения (29) получим

$$f_{\eta\eta} = \left(\frac{c\Omega}{U}\right)^2 M_1 \frac{\epsilon^2}{\delta^2} f_{\tau\tau} + M_1^2 \frac{\epsilon^2}{\delta^2} \left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right) f_{\xi\xi} + M_1^2 \frac{\epsilon^2}{\delta^2} (1 + \gamma) \epsilon f_{\xi} f_{\xi\xi} + 2 \frac{c\Omega}{U} M_1^2 \frac{\epsilon^2}{\delta^2} f_{\xi\tau} - \left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{\epsilon^2}{\delta^2} f_{\zeta\zeta}. \quad (32)$$

Условия малости возмущений (16)–(23) в данном случае запишутся как

$$\epsilon \ll 1, \quad \delta \ll 1, \quad \epsilon M_{\infty}^2 \ll 1, \quad \epsilon M_{\infty}^2 \ll 1, \quad \delta M_{\infty} \ll 1. \quad (33)$$

В уравнении (32) имеем пять параметров:

$$c_1 = \frac{M_1^2}{\delta^2} \epsilon^3 (1 + \gamma), \quad c_2 = \frac{\epsilon^2}{\delta^2} (M_1^2 - 1), \\ c_3 = 2 \frac{\Omega c}{U} M_1^2 \frac{\epsilon^2}{\delta^2}, \quad c_4 = M_1^2 \left(\frac{c\Omega}{U}\right)^2 \frac{\epsilon^2}{\delta^2}, \quad c_5 = \left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{\epsilon^2}{\delta^2}, \quad (34)$$

анализ поведения которых позволяет детализировать возможные упрощения основного уравнения для случая 2.

Случай 2а

Пусть $c_1 = 1$, $c_2 = O(1)$, $c_3 = O(1)$. Поскольку имеются три неизвестных параметра (ϵ , δ , $\Omega c/U$), то этих трех условий достаточно.

Если $c_1 = 1$, то

$$\epsilon = \left(\frac{\delta}{M_1}\right)^{2/3} (1 + \gamma)^{-1/3}, \\ c_2 = \frac{M_1^2 - 1}{M_1^{4/3} \delta^{2/3}} (1 + \gamma)^{-2/3} = O(1), \\ c_3 = 2 \frac{\Omega c}{U} \frac{M_1^{2/3}}{\delta^{2/3}} (1 + \gamma)^{-2/3} = O(1). \quad (35)$$

Из выражения для c_2 имеем

$$M_1^2 - 1 = O\left(\left((1 + \gamma)\delta M_1^2\right)^{2/3}\right), \quad (36)$$

откуда $M_1 - 1 = O(\delta^{2/3})$, т. е. $M_1 \sim 1$. В этом случае из выражения для c_3 получаем $c\Omega/U = O((\delta)^{2/3})$. Таким образом, реализуется случай трансзвукового течения.

Учитывая выражение для ϵ , получаем

$$c_4 \sim \delta^{2/3} \ll 1, \quad c_5 = \frac{c^2}{R^2} \frac{1}{((\gamma + 1)\delta M_1^2)^{2/3}}. \quad (37)$$

Таким образом, коэффициентом c_4 можно пренебречь, а c_5 необходимо оставить, так как $R^2 \delta^{2/3} \sim 1$.

Окончательно имеем уравнение (32) для трансзвукового течения в виде

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\Omega c}{U} \frac{M_1^{2/3}}{(\delta(1+\gamma))^{2/3}} f_{\xi\tau} + \\ & + \left(\frac{M_1^2 - 1}{M_1^{4/3} (\delta(1+\gamma))^{2/3}} + f_{\xi} \right) f_{\xi\xi} - \\ & - f_{\eta\eta} - \frac{c^2}{R^2} \frac{1}{((\gamma + 1)\delta M_1^2)^{2/3}} f_{\zeta\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Случай 2б

Пусть $c_1 \ll 1$, $|c_2| = 1$, $c_3 = O(1)$. Ограничение $|c_2| = 1$ приводит к связи $\epsilon = \delta |1 - M_1^2|^{-1/2}$. Тогда условия (16)–(23) упрощаются:

$$\delta \ll 1, \quad \delta M_\infty \ll 1. \quad (39)$$

Так как $c_3 \sim O(1)$, то

$$\frac{c\Omega}{U} = O(|1 - M_1^{-2}|),$$

а из условия $c_1 \ll 1$ имеем

$$|1 - M_1^2| \gg \delta^{2/3}. \quad (40)$$

Соотношение (40) фактически говорит о том, что обтекание крыла происходит в до- или сверхзвуковом режиме. Для оставшихся коэффициентов справедливы выражения

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{2\Omega}{U} c \frac{M_1^2}{|1 - M_1^2|}, \\ c_4 &= \left(\frac{c\Omega}{U} \right)^2 \frac{M_1^2}{|1 - M_1^2|}, \\ c_5 &= \left(\frac{c}{R} \right)^2 \frac{1}{|1 - M_1^2|}. \end{aligned} \quad (41)$$

Окончательно уравнение (32) для данного случая примет вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c\Omega}{U} \right)^2 f_{\tau\tau} + \frac{2\Omega}{U} c f_{\xi\tau} + \\ & + |1 - M_1^{-2}| (f_{\xi\xi} - f_{\eta\eta}) - \left(\frac{c}{R} \right)^2 \frac{1}{M_1^2} f_{\zeta\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Случай 2в

Пусть $c_1 \ll 1$, $|c_2| \ll 1$, $c_3 = 1$. Тогда условия (16)–(23) сведутся к

$$\delta \ll 1, \quad \delta M_\infty \ll 1. \quad (43)$$

Из ограничений, наложенных на c_1 и c_2 , имеем

$$\frac{\Omega c}{U} \gg \delta^{2/3}, \quad \frac{\Omega c}{U} \gg \frac{1}{2} |1 - M_1^{-2}|. \quad (44)$$

Данный случай соответствует доминированию временных слагаемых.

Теперь уравнение (32) примет следующий вид:

$$\frac{c\Omega}{U} f_{\tau\tau} + 2(f_{\xi\tau} - f_{\eta\eta}) - \frac{U}{\Omega} \frac{c}{(RM_1)^2} f_{\zeta\zeta} = 0. \quad (45)$$

Дальнейшее упрощение уравнения (32) ничего нового не дает.

1.5. Пример численного расчета ближнего поля для случая трансзвукового течения

Как показал теоретический анализ общего уравнения (17), на практике могут реализоваться лишь до- и сверхзвуковое течения, а также трансзвуковое или сильно осциллирующее течения (что соответствует уравнениям (42), (38), (45)). Наиболее интересный случай с точки зрения звукообразования ротором вертолета – трансзвуковой. При трансзвуковых скоростях обтекание несущего винта ротора вертолета создает интенсивный шум даже в отсутствие подъемной силы. Заметим, что если в поле течения присутствуют вихри, уровень шума возрастает еще больше, но такой режим течения выходит за рамки потенциальной теории (и, следовательно, данной работы).

Рассмотрим случай трехмерного нестационарного течения вокруг ротора. В качестве метода расчета граничной задачи (38), (28) применим общий подход, предложенный в работе [12]. Напомним, что, поскольку концевые эффекты в данной постановке игнорируются (предполагается, что на концах профиль хорошо закруглен и поток на торцах проскальзывает), то фактически рассматривается генерация малых возмущений непосредственно поверхностью крыла (без краев). Пусть сечение винта представляет собой симметричный профиль, форма которого описывается зависимостью $g(x) = x(1-x)$. В расчетах полагалось $\delta = 0.06$, при этом длина хорды была $c = 0.3$ м, длина лопасти – $R = 3$ м. Следовательно, отношение R/c составляло 10.

На рис. 2 показано распределение коэффициента давления C_p в сечении лопасти винта для

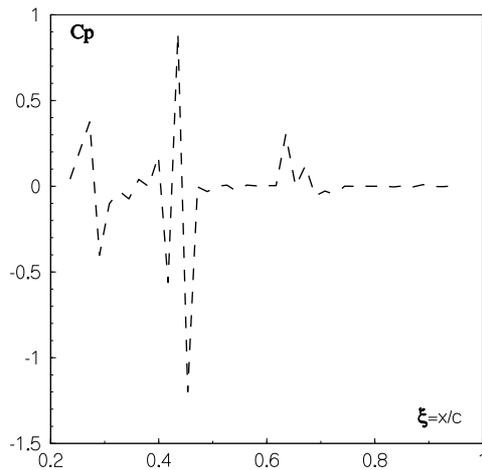


Рис. 2. Распределение коэффициента давления ($M_1 = 0.7$, $\Omega = 3000$ об/мин)

$M_1 = 0.7$, $\Omega = 3000$ об/мин. Вдоль оси абсцисс отложена безразмерная координата ξ . Как видно из представленных расчетных данных, на поверхности лопасти присутствует ряд чередующихся пиков, что указывает на достаточно сложный характер ближнего поля. Качественно эта картина очень похожа на результаты вычислений для плоского нестационарного течения [4]. Отличия, наблюдаемые в форме пиков, объясняется тем, что авторы статьи [4] решали задачу при наличии в поле течения вихрей, способствующих дополнительному звукообразованию.

2. ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ

С современными подходами к исследованию дальнего звукового поля движущегося крыла можно ознакомиться в работах [5, 6, 13, 16, 17, 23]. Цель большинства из них заключается в получении аналога формулы Кирхгофа для нестационарной поверхности. При этом внимание акцентируется на описании дальнего поля от движущегося источника (поверхности) при условии, что давление (потенциал) и компоненты скорости (производные потенциала) известны. Как указано в [2], именно проблема нахождения этих величин и составляет основное препятствие на пути непосредственного использования акустической аналогии Лайтхилла [5] или уравнения Фоукс-Уильямса – Хоукинса [6].

Разрешить эту трудность пытались по-разному. Так, в работе [16] использована теория обобщенных функций с целью представления потенциала

течения в виде обобщенной финитной функции, определяемой как

$$\Phi = \begin{cases} \Phi(x, t), & f \geq 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases} \quad (46)$$

Здесь f – уравнение границы излучающей поверхности. При $f < 0$ потенциал фактически доопределяется вовнутрь самой поверхности. Как видно из определения, обобщенный потенциал вводится в виде разрывной функции. Заметим, однако, что получаемые при этом дополнительные члены в правой части неоднородного волнового уравнения [16] не описывают какую-либо новую физическую закономерность течения, а являются результатом обобщенного дифференцирования в пространстве линейных функционалов.

Дальнее поле в [16] определяется на основе численного решения интегрального уравнения, записанного для потенциала давления.

Существует другой общий подход к описанию звука аэродинамического происхождения. Суть его состоит в том, что в течении предполагается присутствие трех типов источников: силовых, массовых и источников энтропии. В статье [17] предпринята незавершенная попытка разделить их в связанной нелинейной системе уравнений. Немного позже в работе [18] отмечалось, что массовые источники в классической нерелятивистской механике отсутствуют.

Еще один подход заключается в использовании в качестве расчетной модели для вычисления потенциала и его производных в ближнем поле теории распространения малых возмущений от тонкого тела в плоской нестационарной постановке [3, 4]. В работе [20] для описания дальнего поля использовалось интегральное представление, в котором в качестве значений на границе области выбранны расчетные данные, полученные по теории малых возмущений для ближнего поля. Однако при этом не конкретизировалось нелинейное слагаемое, которому не придавалось большого значения. Уже гораздо в более поздних исследованиях [21, 22], носящих систематизирующий характер, произошел возврат к методам описания течения наподобие акустической аналогии Лайтхилла. Последняя состоит в том, что в полученном нелинейном волновом уравнении нелинейная часть трактуется как внешняя нагрузка. Так, в работе [21] для идеальной сжимаемой жидкости (газа) приведено соотношение

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \sigma, \quad (47)$$

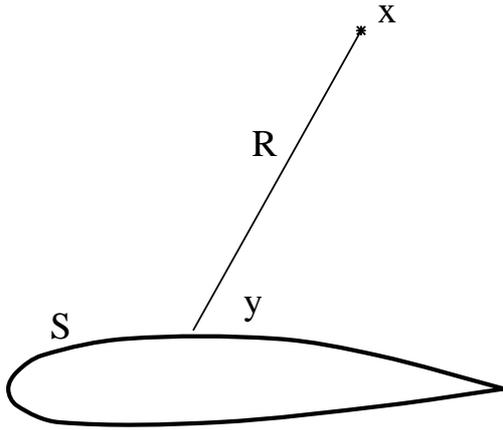


Рис. 3. Схема расположения текущей расчетной точки x на расстоянии R от источника, находящегося в точке y излучающей поверхности S

где

$$\sigma = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (\gamma + 1) \frac{U_\infty}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Однако в данном выражении не присутствует слагаемое с $f_{\xi\tau}$, которое, как было показано в первом разделе, может играть важную роль.

2.1. Вывод интегрального соотношения

Для получения интегрального соотношения для дальнего поля используем подход, приведенный в работе [2]. Для удобства дальнейшего изложения вернемся к размерным координатам (x, y, z) и $\phi' = \epsilon f$. Это позволит нам напрямую воспользоваться существующими общими выражениями.

Пусть имеется неоднородное волновое уравнение для равномерно движущейся среды, описывающее распространение звука в точке $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и в момент времени t_1 от источника, расположенного в точке $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ (рис. 3):

$$\nabla^2 \phi' - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{D_o^2}{Dt^2} \phi' = \nu(y, t) \quad (48)$$

с распределениями источника ν и значениями ϕ' на границе. Здесь операторы

$$\frac{D_o \phi'}{Dt} = \frac{\partial \phi'}{\partial t} + U \frac{\partial \phi'}{\partial x},$$

$$\frac{D_o^2 \phi'}{Dt^2} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x t} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} -$$

общепринятые в аэроакустике обозначения полных производных по времени [2].

Функция Грина $G(y, t|x, t_1)$ представляет собой решение неоднородного волнового уравнения для движущейся среды:

$$\nabla^2 G - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{D_o^2 G}{Dt^2} = -\delta(t_1 - t) \delta(x - y) \quad (49)$$

в некоторой пространственной области $V(t)$, ограниченной внутри или снаружи поверхностью $S(t)$, которая в общем случае считается подвижной. Тогда акустическое давление в произвольной точке x в момент времени t_1 связано с распределением γ источников в области ν обобщенной формулой Грина:

$$\begin{aligned} & \int_{-T}^T dt \int_{V(t)} \gamma(y, t) G(y, t|x, t_1) dy + \\ & + \int_{-T}^T dt \int_{S(t)} \left[G(y, t|x, t_1) \times \right. \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{v'_n}{a_\infty^2} \frac{D_o}{Dt} \right) \phi'(y, t) - \\ & \left. - \phi'(y, t) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{v'_n}{a_\infty^2} \frac{D_o}{Dt} \right) G(y, t|x, t_1) \right] dS(y) = \\ & = \begin{cases} \phi'(x, t_1), & x \in V(t), \\ 0, & x \notin V(t). \end{cases} \end{aligned} \quad (50)$$

В выражении (50) $v_n = (v_s - \mathbf{i}U \cdot \mathbf{n})$ – результирующая скорость поверхности по нормали в исходной системе координат, движущейся со скоростью $\mathbf{i}U$, а v_s – скорость поверхности. Область $V(t)$ может находиться либо внутри, либо снаружи замкнутой поверхности (или поверхностей) $S(t)$. Однако в последнем случае следует потребовать, чтобы интеграл по $S(t)$ был равен нулю, если интегрирование выполняется по большой сфере, граница которой расширяется до бесконечности.

Для постановки задачи, рассмотренной в разделе 1, поверхность крыла считается неподвижной, а на нее набегающий поток со скоростью $\mathbf{i}U$. Поэтому здесь формулу (50) можно использовать так, как если бы поверхность двигалась со скоростью, равной скорости набегающего потока, а среда покоилась. В этом случае $v'_n = U \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}$ – результирующая скорость поверхности крыла.

Для того чтобы непосредственно воспользоваться формулой (50), приведем выражение (17) в

размерных координатах в соответствие виду (48):

$$\nabla^2 \phi' - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{D_o^2}{Dt^2} \phi' = M_1^2 (1 + \gamma) \phi'_\xi \phi'_{\xi\xi}. \quad (51)$$

Тогда, исходя из вида правой части (51), равенство (50) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_{-T}^T dt \int_{V(t)} M_1^2 (1 + \gamma) \phi'_\xi \phi'_{\xi\xi} G(y, t|x, t_1) dy + \\ & + \int_{-T}^T dt \int_{S(t)} [G(y, t|x, t_1) \times \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{v'_n}{a_\infty^2} \frac{D_o}{Dt} \right) \phi'(y, t) - \\ & - \phi'(y, t) \times \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{v'_n}{a_\infty^2} \frac{D_o}{Dt} \right) G(y, t|x, t_1)] dS(y) = \\ & = \begin{cases} \phi', & x \in V(t), \\ 0, & x \notin V(t). \end{cases} \end{aligned} \quad (52)$$

Однако использование соотношения (52) затруднено невозможностью выполнить перестановку порядка интегрирования по времени и пространственным координатам, поскольку объем V и поверхность S зависят от времени. Этим, по-видимому, и объясняется то, что данная формула в ее общем виде не применяется.

Вернемся к изначальной постановке задачи, т. е. будем считать, что поток набегающий на неподвижное крыло. Если в левой части уравнения (51) вместо D_o^2/Dt^2 оставить лишь $\partial^2/\partial t^2$, как в обычном волновом уравнении, то справа окажутся три слагаемых. Тогда становится возможным использование идеи акустической аналогии Лайтхилла, в рамках которой предполагается, что среда стационарна ($U=0$), а на поверхности действуют силовые нагрузки, которые выражаются в виде правой части неоднородного волнового уравнения для стационарной среды. Учтя сказанное, получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi' - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi' = \\ = M_1^2 \left\{ (1 + (1 + \gamma) \phi'_x) \phi'_{xx} + \frac{2}{U} \phi'_{xt} \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

При этом функция G удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 G - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G = -\delta(t_1 - t) \delta(x - y). \quad (54)$$

В силу того, что крыло тонкое, скорость набегающего потока практически перпендикулярна нормали к крылу, т. е. можно приближенно считать $U \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} = 0$. В таком случае с учетом соотношений (52) и (53) из формулы (49) следует

$$\begin{aligned} & \int_{-T}^T dt \int_V M_1^2 \left\{ (1 + (1 + \gamma) \phi'_x) \phi'_{xx} + \frac{2}{U} \phi'_{xt} \right\} \times \\ & \times G dy + \int_{-T}^T dt \int_S \left(G \frac{\partial \phi'}{\partial n} - \phi' \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \\ & = \begin{cases} \phi'(x, t_1), & x \in V, \\ 0, & x \notin V. \end{cases} \end{aligned} \quad (55)$$

Считаем, что объем V – область, ограниченная крылом изнутри и сферой большого радиуса снаружи. Функция Грина для волнового оператора имеет вид

$$G = \frac{\delta(t - t_1 + R/a_\infty)}{4\pi R}, \quad (56)$$

где R – расстояние между точками \mathbf{x} и \mathbf{y} . Для бесконечной области функция Грина определена единственным образом.

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\delta \left(t - t_1 + \frac{R}{a_\infty} \right) \right) = \frac{1}{a_\infty} \frac{\partial \delta}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial n}, \quad (57)$$

а также принимая во внимание свойства производных δ -функции [25], окончательно после интегрирования по времени получаем

$$\begin{aligned} & - \int_V \left[M_1^2 \left\{ (1 + (1 + \gamma) \phi'_x) \phi'_{xx} + \frac{2}{U} \phi'_{xt} \right\} \frac{1}{R} \right]_{t^*} dy + \\ & + \int_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial n} + \frac{1}{R a_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \right. \\ & \left. - \phi' \frac{\partial(1/R)}{\partial n} \right]_{t^*} dS = 4\pi \phi'(x, t_1), \end{aligned} \quad (58)$$

где t^* – время запаздывания.

Подынтегральное выражение первого слагаемого левой части равенства (58) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left\{ (1 + (1 + \gamma) \phi'_x) \phi'_{xx} + \frac{2}{U} \phi'_{xt} \right\} \frac{1}{R} = \\ & = \frac{\partial(F/R)}{\partial x} + \frac{F}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x}, \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$F = \phi'_x + \frac{1}{2}(1 + \gamma)(\phi'_x)^2 + \frac{2}{U}\phi'_t. \quad (60)$$

Поскольку

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y_1} = -\frac{x_1 - y_1}{R}, \quad (61)$$

то весь объемный интеграл I на основании теоремы о дивергенции запишется как

$$I = -M_1^2 \left(\int_{S+S_\infty} \left[\frac{F}{R} \right]_{t^*} dS_x + \int_V \left[F \frac{x_1 - y_1}{R^3} \right]_{t^*} dy \right), \quad (62)$$

где $dS_x = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S})_x$.

Первое слагаемое в правой части выражения (61) состоит из двух поверхностных интегралов: по поверхности крыла S и по бесконечно расширяющейся сфере S_∞ . Как указывалось выше, на основании условия излучения интеграл по сфере большого радиуса $R \rightarrow \infty$ равен нулю. Оставшийся объемный интеграл имеет вполне определенное числовое значение, поскольку

$$\begin{aligned} & \int_V \left[F \frac{x_1 - y_1}{R^3} \right]_{t^*} dy = \\ & = \int_{V \setminus V_\epsilon} \left[F \frac{x_1 - y_1}{R^3} \right]_{t^*} dy + \\ & + \int_{V_\epsilon} \left[F \frac{x_1 - y_1}{R^3} \right]_{t^*} dy, \end{aligned} \quad (63)$$

где V_ϵ – шар радиуса ϵ .

Второй интеграл при $\epsilon \rightarrow 0$ стремится к нулю. Покажем, что первый интеграл в правой части представления (63) – величина ограниченная. В общем нестационарном случае эту оценку выполнить непросто, о чем свидетельствует имеющееся в [7] выражение для дальнего поля, полученное для осесимметричного стационарного течения:

$$\begin{aligned} \Phi & \sim \frac{Dx}{R^3}, \\ D & = -\pi \left\{ \int_0^1 F^2(\xi) d\xi + \frac{\gamma+1}{K} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi_\xi^2 \rho d\rho d\xi \right\}, \\ K & = \frac{1 - M_\infty^2}{\delta^{2/3}}. \end{aligned}$$

В выражении для D присутствует интеграл по бесконечным интервалам, оценка которого не дана.

Однако на больших расстояниях от излучаемого тела (в дальнем поле) форма излучающей поверхности не влияет на качественную полевую картину. Ввиду того, что удлинение крыла мало по сравнению с расстоянием до исследуемой точки наблюдения в дальнем поле, можно выполнить приближенную оценку оставшегося объемного интеграла. При этом воспользуемся оценкой дальнего поля для нестационарного плоского течения [7]:

$$\Phi_\infty \sim \frac{1}{r}, \quad (64)$$

где r – большой радиус, соответствующий дальнему полю. Нетрудно видеть, что теперь $F \sim 1/r$, так, что

$$\begin{aligned} & \int_{V \setminus V_\epsilon} \left[F \frac{x_1 - y_1}{R^3} \right]_{t^*} dy \sim \\ & \sim \frac{1}{r} \int_{V \setminus V_\epsilon} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \right]_{t^*} dy = \\ & = -\frac{1}{r} \int_{S_\infty + S_\epsilon + S} \left[\frac{1}{R} \right]_{t^*} dS_x. \end{aligned} \quad (65)$$

Интеграл по S_ϵ – величина порядка ϵ . Интеграл по S_∞ в силу условия излучения равен нулю. Интеграл по поверхности крыла – S величина конечная и с учетом множителя $1/r$ этот член стремится к нулю при больших r . Следовательно, весь объемный интеграл (62) будет малой величиной, которой можно пренебречь. Как результат, формула (57) принимает вид

$$\begin{aligned} & -M_1^2 \int_S \left[\frac{F}{R} \right]_{t^*} dS_x + \int_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial n} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{Ra_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \phi' \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right]_{t^*} dS = \\ & = 4\pi \phi'(x, t_1). \end{aligned} \quad (66)$$

Выражение (66) перепишем несколько в иной форме, выделив одно слагаемое из первого интеграла:

$$\begin{aligned} & -M_1^2 \int_S \left[\frac{1}{R} \left(\phi'_x + \frac{1}{2}(1 + \gamma)(\phi'_x)^2 \right) \right]_{t^*} dS_x - \\ & - \frac{2M_1^2}{U} \int_S \left[\frac{\phi'_t}{R} \right]_{t^*} dS_x + \int_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial n} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{Ra_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \phi' \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right]_{t^*} dS = \\ & = 4\pi \phi'(x, t_1). \end{aligned} \quad (67)$$

Если отбросить нелинейный член в первом интеграле, полученное представление звукового потенциала в дальнем поле (67) практически совпадает с формулой [1, (1.106)]. Отличие состоит лишь в отсутствии множителя $1/\sqrt{1-\beta^2}$, поскольку здесь не использовалось растяжение координат. Однако за счет этого в первом интеграле (66) появляется дополнительное слагаемое, которое не содержится в явном виде в уравнении в сжатой системе координат.

Как видно из вышеизложенного, в данной работе акустическая аналогия Лайтхилла в ее оригинальном виде фактически не использовалась. Однако слагаемые в правой части уравнения (46) также могут физически трактоваться по Лайтхиллу – как внешняя нагрузка, генерирующая звук.

Выведенное соотношение (67) напрямую связывает акустическое ближнее и дальнее поле. До сих пор было принято разделять решение задачи для ближнего поля и использование интегрального представления для дальнего поля [3]. При этом в указанном интегральном представлении либо не учитывалось нелинейное слагаемое [20], либо упоминалось, что оно должно присутствовать, но без указания его конкретного вида [21]. В работах [3, 4] с помощью методов CFD выполнялся расчет ближнего поля, а затем на некотором расстоянии от поверхности лопасти винта использовалось интегральное выражение, полученное в [20]. Но, как указано в работе [19], четких критериев для выбора этого расстояния так и не было выработано.

2.2. Пример численного расчета дальнего поля для трехмерного трансзвукового течения

Рассмотрим эволюцию звуковой волны в зависимости от расстояния до поверхности винта вертолета. Результаты вычислений дальнего поля основаны на данных расчета ближнего поля для пространственной нестационарной задачи, проведенных для $M_1 = 0.4$ при различных расстояниях y от лопасти (координата y совпадает с вертикальной осью L). Ввиду удобства вычислений координаты лопасти вдоль осей представлены в размерном виде.

Приведенные волновые поверхности уровня звукового давления показывают характерные особенности излучения звука при обтекании лопасти винта вертолета в трансзвуковом диапазоне скоростей. Так, на картине поля для расстояния $y = 0.05$ м от ротора (рис. 4, а) четко прослеживаются два локальных максимума, причем наибольший уровень давления наблюдается ближе к концу лопасти. Это совпадает с уже устоявшим-

ся мнением о том, что наиболее интенсивным звукообразование происходит по мере приближения к концам лопастей вертолета. Кроме того, интенсивное звукообразование наблюдается в направлении, нормальном к поверхности лопасти. Это соответствует утверждению Кармана о том, что при обтекании тонких тел генерируются малые возмущения течения поперек основного потока. Вспомним также предположение Лайтхилла о том, что при взаимодействии твердой границы и потока происходит непосредственная генерация звука, совершенно отличная, например, от излучения звука колеблющейся пластиной. Это наглядно иллюстрируется распределением звукового давления на рис. 4, а: в начале обтекания амплитуда звуковой волны максимальна. Последнее обстоятельство подсказывает еще одно интересное сравнение. Известно, что при срыве потока с лопасти наблюдается вихревой звук, хотя и он достаточно слабый. Он создается непосредственно в момент срыва вихревого шнура (дорожки Кармана). Далее, вниз по потоку генерации звука нет. В рассматриваемом же случае при взаимодействии потока с возбуждающей его передней кромкой крыла происходит наиболее интенсивное звукообразование. По мере продвижения вдоль по лопасти поток как бы “успокаивается” и генерация звука существенно ослабевает.

При удалении от поверхности лопасти ($y = 0.1, 0.3, 0.5, 1$ м) влияние нелинейности постепенно ослабевает (см. рис. 4, б–д соответственно) и волна фактически приобретает сферическую форму.

Для всех указанных значений y были рассчитаны спектры давления (рис. 5). Как видно из рис. 5, а и б, на достаточно близких расстояниях до лопасти винта, в зоне локальных максимумов наблюдаются несколько повышенные уровни давления. При этом заметно также незначительное преобладание первых энергонесущих мод по сравнению с областью вне максимумов. Однако поскольку нелинейные эффекты сказываются лишь при достаточно малых удалениях от крыла, то уже на расстоянии порядка полутора хорд спектральный уровень начинает выравниваться. Дальнейшая картина выглядит так: существует некоторая промежуточная или переходная зона (до нескольких длин хорд), где уровень давления несколько изменяется вдоль лопасти, отражая форму звуковой волны в данный конкретный момент времени и положение ее в пространстве. Однако уже для y свыше 2 м спектральный уровень давления вдоль лопасти практически одинаков. Характер затухания уровня звукового давления, можно определить, используя разноудаленные расчетные

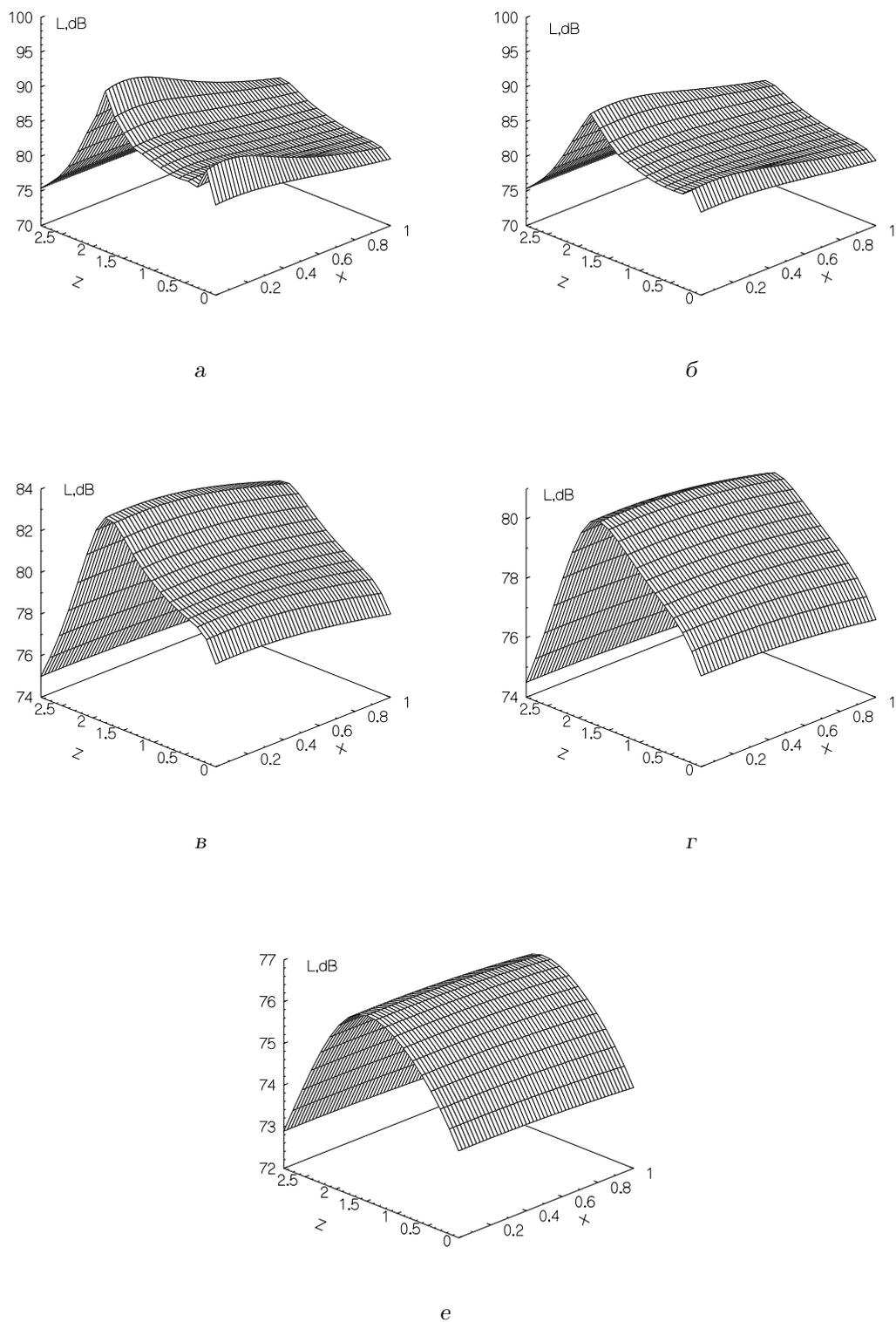


Рис. 4. Уровни нормированного давления (в м/с^2) в звуковой волне на разных расстояниях от лопасти ротора:
а – $y = 0.05 \text{ м}$; б – $y = 0.1 \text{ м}$; в – $y = 0.3 \text{ м}$; г – $y = 0.5 \text{ м}$; д – $y = 0.5 \text{ м}$; е – $y = 1 \text{ м}$

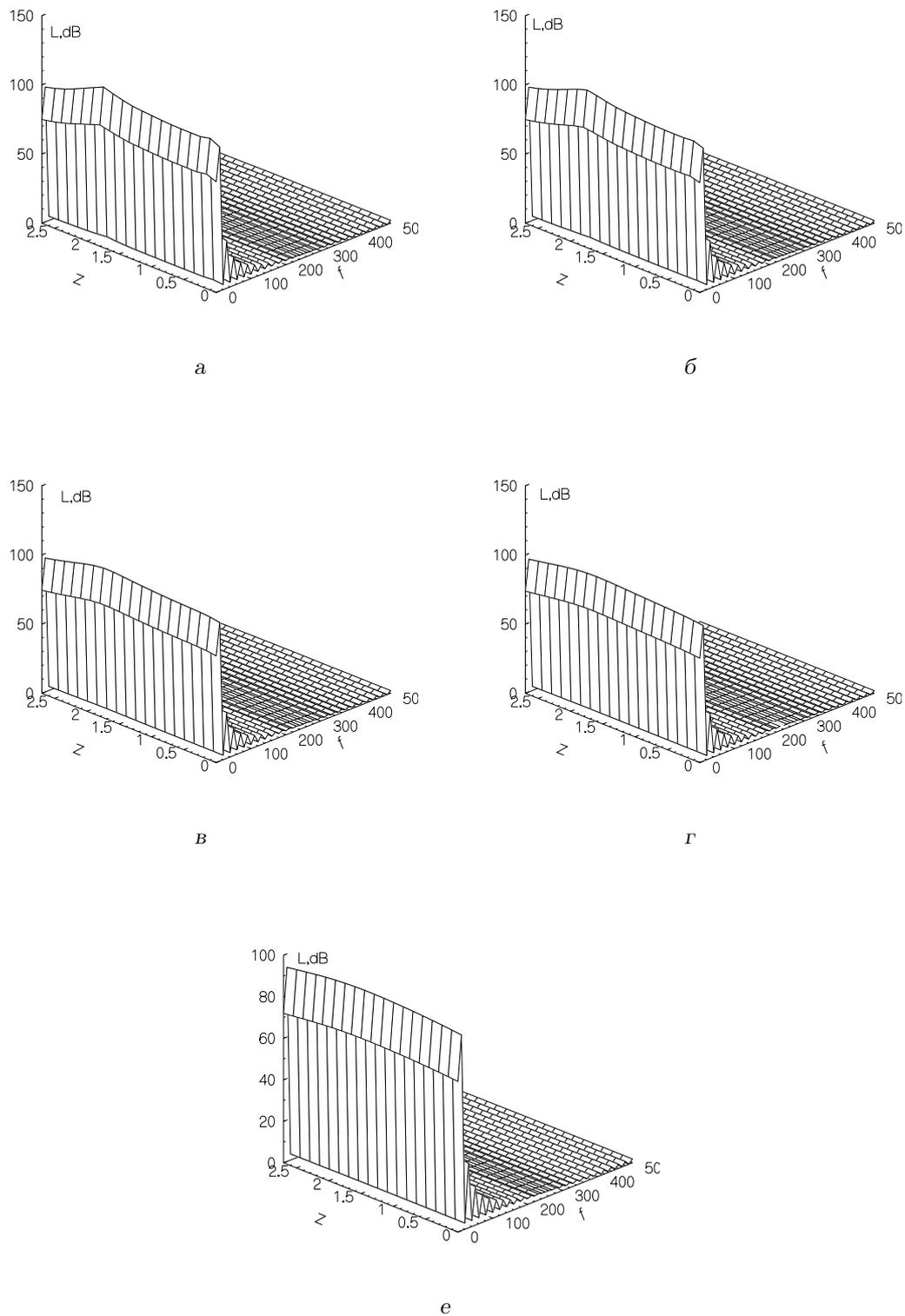


Рис. 5. Спектральные уровни давления (в Дб) в звуковой волне на разных расстояниях от лопасти ротора:
 а - $y = 0.05$ м; б - $y = 0.1$ м; в - $y = 0.3$ м; г - $y = 0.5$ м; д - $y = 0.5$ м; е - $y = 1$ м

точки: рис. 5а и г. Оказывается, что при изменении расстояния до лопасти в десять раз уровень давления снижается примерно на 20 дБ, что соответствует его убыванию как $1/r$.

Сложное поведение звуковой волны говорит о том, что ее формой можно управлять, меняя параметры задачи, конфигурацию лопасти. Таким образом, основную перспективную задачу подобных исследований можно сформулировать следующим образом: необходимо научиться управлять процессом генерации звука с целью поиска конфигураций бесшумных винтов. Разумеется, в такой всеобъемлющей постановке этот вопрос выходит за рамки данной работы.

ВЫВОДЫ

1. В рамках модели идеальной сжимаемой среды выведено уравнение распространения звука при обтекании тонкого крыла (лопасти винта) изэнтропическим течением. Выполнен расчет характеристик ближнего поля для случая линейного распределения скорости вдоль размаха лопасти.
2. Получено представление звукового потенциала в дальнем поле. Расчет спектра давления в звуковой волне показал, что максимум излучения наблюдается ближе к концу лопасти. На расстоянии нескольких длин хорд отмечается нелинейный характер излучаемых волн.
3. Предложенный подход сквозного расчета звукового поля позволил существенно сократить количество вычислений, поскольку использует данные ближнего поля в непосредственной близости от крыла для расчета дальнего поля.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает огромную благодарность академику В. Т. Гринченко за тщательный анализ данной работы, в результате которого был учтен ряд замечаний по формулировке задачи. В итоге работа приобрела более четкое и ясное для широкого круга читателей изложение.

1. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды.– М.: Наука, 1981.– 206 с.
2. Голдстейн М. Е. Аэроакустика.– М.: Машиностроение, 1981.– 296 с.
3. *Lyrantzis A. S., George A. R.* Far field noise of transonic blade-vortex interactions // Amer. Helicopter. Soc. J.– 1989.– **27**, N 7.– P. 30–39.
4. *Lyrantzis A. S., Xue Y.* Study of the noise mechanisms of transonic blade-vortex interactions // AIAA J.– 1991.– **29**, N 10.– P. 1562–1572.
5. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. I: General theory // Proc. Roy. Soc. Lond.– 1952.– **211 A**, N 1107.– P. 564–587.
6. *Ffowcs Williams J. E., Hawkings* Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion.– Phil. Trans. Roy. Soc: 1969, **A264**, N 1151.– 321–342 p.
7. Коул Дж., Кук Л. Транзвуковая аэродинамика.– М.: Мир, 1989.– 360 с.
8. Путьята В. Й., Сидляр М. М. Гідроаеромеханіка.– К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1963.– 480 с.
9. *Von Karman T.* The similarity law of transonic flow // J Math. Phys.– 1947.– **26**, N 3.– P. 182–190.
10. *Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S.* On Two-Dimensional Non-Steady Motion of a Slender Body in a Compressible Fluid // J Math. Phys.– 1948.– **27**, N 3.– P. 220–231.
11. *Murman E. M., Cole J. D.* Calculation of plane steady transonic flows // AIAA J.– 1971.– **9**, N 1.– P. 114–121.
12. Лукьянов П. В. Применение численно-аналитического метода для решения задач акустики // Збірн. праць акуст. симпоз. Консонанс-2005.– К.: Ін-т гідромеханіки НАН України.– 2005.– С. 225–230.
13. *Morgans W. R.* The Kirchhoff formula extended to a moving surfaces // Phil. Mag.– 1930.– **9**, S 7, N 55.– P. 141–161.
14. *Caradonna F. X., Isom M. P.* Subsonic and transonic potential flow over helicopter rotor blades // AIAA J.– 1972.– **10**, N 12.– P. 1606–1612.
15. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны.– М.: ИИЛ, 1950.– 426 с.
16. *Farassat F., Myers M. K.* Extension of Kirchhoff's formula to radiation from moving surfaces // J. Sound Vib.– 1988.– **123**, N 3.– P. 451–461.
17. *Fedorchenko A. T.* On some fundamental flaws in present aeroacoustic theory // J. Sound Vib.– 2000.– **232**, N 4.– P. 719–782.
18. *Hirschberg A., Schram Ch.* A primitive approach to aeroacoustics.– Berlin: Springer, 2002.– 30 p.
19. *Brentner K. S., Farassat F.* An analytical comparison of the acoustic analogy and Kirchhoff formulation for moving surfaces // AIAA J.– 1998.– **36**, N 8.– P. 1379–1386.
20. *Morino L.* A general theory of unsteady compressible potential aerodynamics.– NASA CR-2464, 1974.– P. 1–70.
21. *Morino L.* Boundary integral equations in aerodynamics // Appl. Mech. Rev.– 1993.– **46**, N 8.– P. 445–466.
22. *Morino L., Bernardini G.* On the sound generated by moving surfaces – The effects of vorticity // 7-th Int. Congr. Sound Vib.– Garmisch Partenkirchen, Germany, 2000.– P. 1339–1346.
23. Хромов В. А. К обобщению теоремы Кирхгофа для случая поверхности, движущейся произвольным образом // Акуст. ж.– 1963.– **9**, N 1.– С. 88–93.
24. Володко А. М. Основы аэродинамики и динамики полета вертолетов.– М.: Транспорт, 1988.– 344 с.
25. Владимирова В. С. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1981.– 512 с.