ISSN 1028-7507 Акустичний вісник. 2009. Том 12, N 2. С. 44–56

УДК 532.595

ЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КОНИЧЕСКОГО БАКА С ЖИДКОСТЬЮ

И. А. ЛУКОВСКИЙ, А. В. СОЛОДУН, А. Н. ТИМОХА

Институт математики НАН Украины, Киев

Получено 22.10.2009

С использованием вариационных методов решения базовых краевых задач линейной теории пространственного движения твердых тел с частично заполненными жидкостью полостями выведена модальная система уравнений движения и найдены значения гидродинамических коэффициентов для случая полости в виде усеченного кругового конуса. Приведены формулы для определения гидродинамических сил и моментов взаимодействия жидкости со стенками конических резервуаров. Использование линейной модальной модели проиллюстрировано на примере задачи Сретенского и для задачи о собственных частотах совместных колебаний водонапорной башни с коническим баком.

З використанням варіаційних методів розв'язання базових крайових задач лінійної теорії просторового руху твердих тіл з частково заповненими рідиною порожнинами виведено модальну систему рівнянь руху і знайдені значення гідродинамічних коефіцієнтів для випадку порожнини у формі зрізаного кругового конусу. Наведені формули для визначення гідродинамічних сил і моментів взаємодії рідини зі стінками конічних резервуарів. Застосування лінійної модальної моделі проілюстровано на прикладі задачі Сретенського і для задачі про визначення власних частот сумісних коливань водонапірної башти з конічним баком.

The modal system of motion equations has been derived and the hydrodynamic coefficients have been computed for the case of a tapered conical cavity, by using the variational methods for solving the basic boundary problems of the linear theory of three-dimensional motions of solid bodies with the cavities partially filled with a liquid. The formulas for the hydrodynamic force and moment acting on the tank's walls have been presented. The implementation of the linear modal theory has been illustrated on the examples of the Sretenski's problem and the problem on coupled eigen oscillations of water tower with a conical elevated tank.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования колебаний жидкости в резервуарах конической формы представляют большой интерес в связи с необходимостью решения комплекса проблем, связанных со строительством и эксплуатацией конструкций, имеющих в своем составе конические емкости с жидкостью. Они также постоянно стимулируются запросами авиационной, морской, ракетной и космической техники, а также ужесточением требований к проектированию таких гражданских объектов как наземные хранилища экологически небезопасных жидкостей, морских платформ и водонапорных башен, построенных в сейсмически опасных районах. Особо подчеркнем существенную роль экспериментальных исследований, позволяющих строить общие и упрощенные (в виде механических аналогов) математические модели, которые могут адекватно описывать динамику этих сложных многокомпонентных систем. Этот тезис убедительно подтверждается недавними работами Эл-Даматти и др. [12], Эл-Даматти и Свиден [13], Дутта и др. [11], Свиден [16], посвященными проблемам динамики жидкости в хранилищах конической формы. Они существенно дополняют более ранние экспериментальные исследования Микишева и Дорожкина [8], а также Бауэра и др. [10].

Общая методика математического моделирования динамического поведения жидкости в упомянутых объектах при различных внешних воздействиях считается в достаточной степени разработанной к настоящему времени. Сформулированы необходимые задачи для определения поля скоростей и давления в жидком объеме, а в случае пространственных безвихревых движений идеальной жидкости хорошо изучены спектральная краевая задача о собственных колебаниях жидкости и краевая задача Неймана для определения потенциалов Стокса – Жуковского. Решения этих задач позволяют определить полную совокупность гидродинамических характеристик системы, включая и моменты инерции жидких масс.

Для случая конических баков, за редким исключением, не существует точных решений упомянутых краевых задач, что требует построения специализированных приближенных методов их решения. Наиболее широкое применение нашли вариационные методы, а также различные версии методов конечных и граничных элементов. Особо подчеркнем важную роль вариационных методов, позволяющих строить приближенные реше-

© И. А. Луковский, А. В. Солодун, А. Н. Тимоха, 2009

ния в аналитической форме. Это не только упрощает анализ решения базовых краевых задач, но и существенно для дальнейшего развития модальных подходов в линейной и нелинейной теории совместных движений твердых тел с жидкостью. Развитие вариационных методов для конических резервуаров имеет ряд специфических особенностей, связанных с геометрией полости. Они дискутировались в фундаментальных работах Докучаева [1], Докучаева и Луковского [3], Луковского и др. [7], Фещенко и др. [9], Луковского [3, 4], Бауэра [10] и др.

В данной статье на основе метода Луковского [2] выводятся линейные модальные уравнения, описывающие движение жидкости в усеченном коническом баке, который совершает заданные малые поступательные и угловые перемещения, а также формулы для гидродинамических силы и момента (первая задача динамики). Дополняя ранее опубликованные работы [6, 14], для широкого диапазона геометрических параметров приводятся численные значения гидродинамических коэффициентов, включая момент инерции жидкости.

Несмотря на то, что обсуждаемая линейная модальная теория построена для решения первой задачи динамики, в статье даны два иллюстративных примера использования ее результатов для описания совместных (связанных) движений конструкций с коническим баком, частично заполненным жидкостью (вторая задача динамики). Первый из них посвящен задаче Сретенского, описывающей вынужденные горизонтальные колебания твердого тела с баком при наличии упругой связи и отсутствии трения. Во втором примере рассматриваются собственные частоты колебаний системы, состоящей из вертикальной балки и конического бака с жидкостью, жестко закрепленного на ее вершине. Такая механическая система используется для моделирования водонапорных башен.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается механическая система, состоящая из абсолютно твердого конического бака, частично заполненного однородной идеальной несжимаемой жидкостью. Предполагается, что бак имеет усеченную V-образную осесимметричную форму с углом полураствора θ_0. В положении статического равновесия ось симметрии бака параллельна вектору ускорения свободного падения. Смачиваемые боковые стенки сосуда обозначим как S_1, дно (основание) бака – S_2, а невозмущенную свободную поверхность жидкости – Σ_0

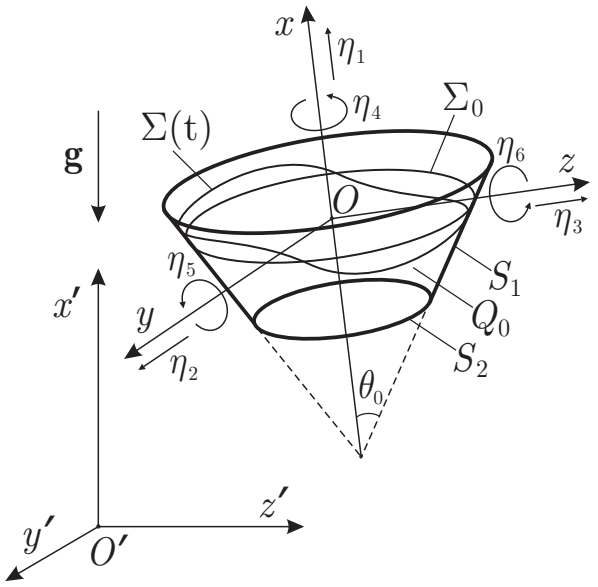

Рис. 1. Схема частично заполненного жидкостью конического бака, совершающего заданные малые колебательные движения в пространстве

(рис. 1). С центром круга Σ_0 жестко свяжем подвижную систему координат $Oxyz$, направив ось Ox вертикально вдоль оси симметрии бака. Система координат $Oxyz$ жестко связана с баком.

Гидродинамический анализ предполагает, что движения бака известны, и рассматривается первая задача динамики. Кроме того, предполагается, что бак совершает малые колебательные движения относительно статического положения равновесия в гравитационном поле относительно некоторой инерциальной системы координат $O'x'y'z'$, связанной с Землей. Они полностью описываются вектором поступательной скорости $\boldsymbol{v}_0(t)=(\dot\eta_1,\dot\eta_2,\dot\eta_3)$ и вектором мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)=(\dot\eta_4,\dot\eta_5,\dot\eta_6)$. Шесть функций η_i, описывающих малые поступательные и угловые перемещения, определяют шесть независимых степеней свободы. В связанной системе координат $Oxyz$ линеаризованные проекции вектора ускорения силы тяжести имеют вид $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,g_3)=(-g,g\eta_6,-g\eta_5)$.

В предположении о безвихревых потенциальных течениях жидкости потенциал абсолютной скорости $\Phi(x,y,z,t)$ и функция $\zeta(x,y,z,t)=x-\xi(y,z,t)$, описывающая возмущенную поверхность жидкости, являются решениями следующей краевой задачи (см., например, Луковский и др. [5], Фалтинсен и Тимоха [15]):

$$\Delta\Phi=0 \quad \text{в} \quad Q_0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}) \quad \text{на} \quad S_0, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}) - \frac{\partial\xi}{\partial t} \quad \text{на} \quad \Sigma_0, \tag{1c}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_0, \tag{1d}$$

$$\int\limits_{\Sigma_0} \xi dS = 0. \tag{1e}$$

Здесь $S_0 = S_1 \bigcup S_2$ – смачиваемая поверхность полости в положении равновесия; $\boldsymbol{n}$ – орт внешней нормали к границе объема Q_0 и $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

Сформулированная краевая задача должна быть дополнена начальными условиями, которые задают начальное положение поверхности жидкости и распределение нормальных скоростей при $t = t_0$:

$$\xi(y, z, t_0) = \xi_0(y, z), \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\Sigma(t_0)} = \Phi_0(x, y, z). \tag{2}$$

Если рассматриваются вынужденные колебания жидкости под действием гармонических возмущений с периодом T, то начальные условия (2) могут быть заменены условиями периодичности:

$$\begin{gathered}\xi(y, z, t+T) = \xi(y, z, t),\\ \nabla\Phi(x, y, z, t+T) = \nabla\Phi(x, y, z, t).\end{gathered} \tag{3}$$

Решения задачи (1a) – (1e), подчиненные условиям периодичности (3), описывают так называемые установившиеся режимы движения жидкости.

Решив поставленную краевую задачу, можно найти распределение абсолютных скоростей частиц жидкости $\boldsymbol{v}_a = \nabla\Phi$. Используя линеаризованный интеграл Лагранжа – Коши в связанной системе координат

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r} + \frac{p - p_0}{\rho} = 0, \tag{4}$$

удается получить поле давления p (ρ – плотность жидкости; p_0 – атмосферное давление). Рассматривая соответствующие интегралы от давления по смоченным стенкам бака, определяем основные гидродинамические характеристики – количество движения и момент количества движения жидкости относительно точки O, а также результирующие гидродинамические силу и момент. Нахождение указанных факторов соответствует решению первой задачи динамики.

2. ЛИНЕЙНАЯ МОДАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

2.1. Общие модальные уравнения

Представим решение задачи (1a) – (1e) в виде [5, 15]

$$\xi(y, z, t) = \sum_N \beta_N(t)\phi_N\big|_{\Sigma_0} = \sum_N \beta_N(t)\xi_N(y, z), \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\Phi(x, y, z, t) = \boldsymbol{v}_0(t)\cdot\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}_0(x, y, z) +\\ + \sum_N R_N(t)\phi_N(x, y, z).\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $\xi_N(y, z) = \phi_N(0, y, z)$; $\phi_N(x, y, z)$ – система собственных форм колебания жидкости, определяемая решением краевой задачи на собственные значения:

$$\begin{gathered}\Delta\phi = 0, \quad \boldsymbol{r}\in Q_0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \quad \boldsymbol{r}\in S_0,\\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = \kappa\phi, \quad \boldsymbol{r}\in\Sigma_0, \qquad \int\limits_{\Sigma_0}\phi dS = 0,\end{gathered} \tag{7}$$

а гармоническая вектор-функция $\boldsymbol{\Omega}_0(x, y, z) = (\Omega_{01}, \Omega_{02}, \Omega_{03})$ – три потенциала Стокса – Жуковского – решение краевой задачи Неймана

$$\begin{gathered}\Delta\boldsymbol{\Omega}_0 = 0, \qquad \boldsymbol{r}\in Q_0,\\ \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_0}{\partial n} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{r}\in S_0 + \Sigma_0.\end{gathered} \tag{8}$$

В самом общем случае N – один или несколько целочисленных индексов, перенумеровывающих собственные формы $\phi_N(x, y, z)$ с учетом их кратности. Подставив выражения (5) и (6) в исходную краевую задачу (1a) – (1e) и учтя условие ортогональности

$$\int\limits_{\Sigma_0}\xi_{N_1}\xi_{N_2}dS = 0, \quad N_1\neq N_2,$$

получим соотношение $\dot\beta_N = \kappa_N R_N$ и следующую линейную модальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно модальных функций (обобщенных координат) $\beta_N(t)$:

$$\ddot\beta_N + \sigma_N^2\beta_N = K_N(t). \tag{9}$$

Здесь $\sigma_N^2 = g\kappa_N$;

$$\begin{gathered}K_N(t) = -\frac{\lambda_{2N}}{\mu_N}(\ddot\eta_2 - g\eta_6) - \frac{\lambda_{3N}}{\mu_N}(\ddot\eta_3 + g\eta_5) -\\ -\frac{1}{\mu_N}\sum_{k=4}^{6}\lambda_{0(k-3)N}\,\ddot\eta_k.\end{gathered} \tag{10}$$

Входящие в соотношение (10) гидродинамические коэффициенты определяются следующими интегралами:

$$\mu_N = \frac{\rho}{\kappa_N}\int\limits_{\Sigma_0}\xi_N^2 dS, \qquad \lambda_{2N} = \rho\int\limits_{\Sigma_0} y\xi_N\, dS,$$
$$\lambda_{3N} = \rho\int\limits_{\Sigma_0} z\xi_N dS, \qquad \lambda_{0kN} = \rho\int\limits_{\Sigma_0}\xi_N\Omega_{0k} dS. \tag{11}$$

Таким образом, если известны функции $\eta_k(t)$, $k=1,\ldots,6$, описывающие колебания сосуда с шестью степенями свободы, и гидродинамические коэффициенты (11), то $\beta_N(t)$ из системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (9) можно найти модальные функции. Это позволяет определить потенциал скоростей (6) и соответствующее поле давлений по формуле (4). Использование модальной теории избавляет нас от необходимости пространственной и временной дискретизации исходной краевой задачи.

Явные формулы для гидродинамических силы и момента в терминах функций β_M и η_j ($j=1,\ldots,6$) были получены Луковским [2] для наиболее общего, нелинейного случая. Независимый вывод формул Луковского в случае линейных и нелинейных колебаний жидкости также приведен в книге Фалтинсена и Тимохи [15]. Модальные уравнения (9) и упомянутые формулы Луковского для силы и момента значительно упрощаются в случае осесимметричности бака.

2.2. Модальная система в случае осесимметричных баков

Для осесимметричных сосудов естественным является переход к цилиндрической системе координат $x=x$, $y=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$ и отделение угловой переменной в базовых краевых задачах (7) и (8). При этом индексы $N=m,i,1$ и $N=m,i,2$ ($m=0,1,\ldots$, $i=1,2,\ldots$) и собственные функции имеют следующий вид:

$$\phi_{m,i,1} = \phi_i^{(m)}(x,r)\cos(m\theta),$$
$$\phi_{m,i,2} = \phi_i^{(m)}(x,r)\sin(m\theta). \tag{12}$$

Обе функции $\phi_{m,i,1}$ и $\phi_{m,i,2}$ при $m\neq 0$ соответствуют одному и тому же собственному значению $\kappa_{m,i}$, определяемому из задачи (7).

Задача о потенциалах Стокса – Жуковского также допускает отделение угловой переменной

$$\Omega_{01} = 0,$$
$$\Omega_{02} = -\chi(r,x)\sin\theta, \tag{13}$$
$$\Omega_{03} = \chi(r,x)\cos\theta,$$

где $\chi(r,x)$ – решение соответствующей краевой задачи в меридиональном сечении бака.

Структура решений (12) и (13) указывает на то, что ненулевые правые части уравнений (10) в модальной системе (9) связываются с гидродинамическими коэффициентами

$$\kappa_i = \kappa_{1,i}, \qquad \sigma_i^2 = g\kappa_i = \sigma_{1,i}^2,$$
$$\mu_{1,i,1} = \mu_{1,i,2} = \mu_i = \frac{\rho\pi}{\kappa_{1,i}}\int\limits_{L_0} r(\phi_i^{(1)})^2 dr,$$
$$\lambda_{2(1,i,1)} = \lambda_{3(1,i,2)} = \lambda_i = \rho\pi\int\limits_{L_0} r^2\phi_i^{(1)} dr, \tag{14}$$
$$\lambda_{03(1,i,1)} = -\lambda_{02(1,i,2)} = \lambda_{0i} = \rho\pi\int\limits_{L_0} r^2\chi\phi_i^{(1)} dr,$$

где L_0 – пересечение невозмущенной свободной границы с меридиональным сечением бака.

Таким образом, для осесимметричных баков имеется лишь две независимые линейные модальные системы с ненулевыми правыми частями. Они отвечают за колебания жидкости в плоскостях Oxy и Oxz:

$$\mu_i(\ddot{\beta}_i^c + \sigma_i^2\beta_i^c) = -\lambda_i(\ddot{\eta}_2 - g\eta_6) - \lambda_{0i}\ddot{\eta}_6, \tag{15a}$$

$$\mu_i(\ddot{\beta}_i^s + \sigma_i^2\beta_i^s) = -\lambda_i(\ddot{\eta}_3 + g\eta_5) + \lambda_{0i}\ddot{\eta}_5, \tag{15b}$$

где индекс $i=1,2,\ldots$ перенумеровывает собственные значения κ_i в порядке возрастания и соответственно – функции $\phi_i^{(1)}$ в представлении (12).

2.3. Гидродинамические сила и момент для осесимметричных баков

В соответствии с формулами Луковского [2, 15], линейные компоненты гидродинамической силы в связанной с баком системе координат используют положение центра тяжести невозмущенной жидкости:

$$\boldsymbol{r}_{lC_0} = (x_{lC_0}, y_{lC_0}, z_{lC_0}) = \frac{\rho}{M_l}\int\limits_{Q_0}\boldsymbol{r}\, dQ \tag{16}$$

в системе координат $Oxyz$ (M_l – масса жидкости). Для рассматриваемого осесимметричного случая $y_{lC_0} = z_{lC_0} = 0$ это приводит к следующим выражениям для проекций гидродинамической силы на оси системы координат $Oxyz$:

$$F_1(t) = F_x(t) = M_l(-g - \ddot{\eta}_1), \tag{17}$$

$$F_2(t) = F_y(t) = \\ = M_l(-\ddot{\eta}_6 x_{lC_0} + [g\eta_6] - \ddot{\eta}_2) - \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\beta}_k^c \lambda_k, \tag{18}$$

$$F_3(t) = F_z(t) = \\ = M_l(\ddot{\eta}_5 x_{lC_0} - [g\eta_5] - \ddot{\eta}_3) - \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\beta}_k^s \lambda_k. \tag{19}$$

При этом линейные компоненты $[g\eta_6]$ и $[g\eta_5]$ исчезают из выражений для $F_2(t)$ и $F_3(t)$ при проецировании линейной гидродинамической силы на инерционную систему координат, связанную с Землей.

Линеаризованная формула Луковского для гидродинамического момента относительно O содержит также элементы тензора инерции жидкости $\boldsymbol{J}_0^1$, определенного через потенциалы Стокса–Жуковского:

$$J_{0ij}^1 = \rho \int\limits_{S_0+\Sigma_0} \Omega_{0i} \frac{\partial \Omega_{0j}}{\partial n}\, dS.$$

Для осесимметричного бака этот тензор содержит лишь два ненулевых элемента:

$$J_{022}^1 = J_{033}^1 = J_0 = \rho\pi \int\limits_L \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} ds, \tag{20}$$

где $L = L_0 + L_1 + L_2$, а L_1 и L_2 – пересечения боковой поверхности S_1 и дна S_2 с меридиональным сечением бака.

Используя линеаризованные формулы Луковского [2, 15], можно показать, что для осесимметричного бака $F_4 = M_{Ox} = 0$, а две оставшиеся компоненты вычисляются по формулам

$$F_5(t) = M_{Oy}(t) = M_l x_{lC_0}(g\eta_5 + \ddot{\eta}_3) - \\ - J_0\ddot{\eta}_5 - \sum_{j=1}^{\infty} \big(- \lambda_{0j}\ddot{\beta}_j^s + g\lambda_j\beta_j^s \big), \tag{21}$$

$$F_6(t) = M_{Oz}(t) = M_l x_{lC_0}(g\eta_6 - \ddot{\eta}_2) - \\ - J_0\ddot{\eta}_6 - \sum_{j=1}^{\infty} \big(\lambda_{0j}\ddot{\beta}_j^c - g\lambda_j\beta_j^c\big). \tag{22}$$

Для пересчета гидродинамического момента относительно другой, произвольно взятой точки A можно воспользоваться формулой

$$\boldsymbol{M}_A^1 = \boldsymbol{r}_{AO} \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{M}_O, \tag{23}$$

где $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$; $\boldsymbol{M}_O = (F_4, F_5, F_6)$; $\boldsymbol{r}_{AO}$ – радиус-вектор начала координат O относительно точки A.

2.4. Безразмерные гидродинамические коэффициенты

Гидродинамические коэффициенты, возникающие в модальных уравнениях и выражениях для гидродинамической силы и момента, зависят от линейных размеров конического бака, угла полураствора и плотности жидкости. В этой работе в качестве характерного линейного размера бака выбран радиус невозмущенной свободной поверхности r_0.

Соотношение $\bar{r}_1 = r_1/r_0$ между радиусами основания конуса r_1 и радиуса невозмущенной свободной поверхности является функцией глубины заполнения бака. В частности, в пределе $\bar{r}_1 \to 1$ имеем $\bar{h} = h/r_0 \to 0$ (h – глубина жидкости). При фиксированном же $\bar{r}_1$ безразмерная глубина $\bar{h}$ стремится к нулю, если $\theta_0 \to \pi/2$.

Связь размерных и безразмерных гидродинамических коэффициентов (последние обозначаем с чертой сверху) имеет вид

$$\kappa_i = \frac{\bar{\kappa}_i}{r_0}, \qquad \mu_i = \rho r_0^3 \bar{\mu}_i, \qquad \lambda_i = \rho r_0^3 \bar{\lambda}_i, \\ \lambda_{0i} = \rho r_0^4 \bar{\lambda}_{0i}, \qquad J_0 = \rho r_0^5 \bar{J}_0. \tag{24}$$

В работе [6] авторами развит вариационный метод определения потенциалов Стокса–Жуковского для усеченных конических областей и соответственно расчета величины $\bar{J}_0$. В статье [14] построен вариационный метод определения собственных частот и собственных функций $\phi_i^{(1)}$ колебаний жидкости в конических баках. Зная $\phi_i^{(1)}$, можно эффективно вычислять гидродинамические коэффициенты $\bar{\mu}_i$, $\bar{\lambda}_i$ и $\bar{\lambda}_{0i}$. Однако нужно учесть, что функции $\phi_i^{(1)}$, а следовательно и гидродинамические коэффициенты $\bar{\mu}_i$, $\bar{\lambda}_i$, $\bar{\lambda}_{0i}$ определяются с точностью до произвольного множителя. Для того, чтобы исключить связанную с ним многозначность в определении гидродинамических коэффициентов, применим нормировку

$$\bar{\phi}_i^{(1)}(0, 1) = 1, \tag{25}$$

т. е. потребуем, чтобы собственные функции принимали максимальное абсолютное значение единица на линии контакта невозмущенной свободной границы и наклонной стенки. При таком нормировании, естественном для модальных теорий, модальные функции $\beta_i^c(t)$ и $\beta_i^s(t)$ играют роль безразмерной амплитуды волны на стенке.

В статье [14] вариационное решение для собственной функции $\phi_i^{(m)}$ было представлено в виде

$$\phi_i^{(m)}(x,r) = \sum_{k=1}^{q} a_k^{(m,i)} w_k^{(m)}(x,r), \qquad m = 0,1,\ldots, \qquad i = 1,2,\ldots \tag{26}$$

Для того, чтобы обеспечить гармоничность функций $\phi_i^{(m)}(x,r)\cos(m\theta)$ и $\phi_i^{(m)}(x,r)\sin(m\theta)$, координатные функции $w_k^{(m)}(x,r)$ дополнительно удовлетворяли соответствующему уравнению в меридиональном сечении. Вариационной процедурой расчеты сводились к обобщенной спектральной матричной проблеме для определения собственных значений $\bar\kappa_{m,i}$ и собственных векторов $a_j^{(m,i)}$

$$\sum_{k,l=1}^{q} a_l^{(m,i)} (\alpha_{kl}^{(m,i)} - \bar\kappa_{m,i}\gamma_{kl}^{(m,i)}) = 0$$

при фиксированном m и индексе i, изменяющемся от 1 до q. Элементы матриц определялись по формулам

$$\alpha_{kl}^{(m)} = \int\limits_L r\frac{\partial w_k^{(m)}}{\partial n} w_l^{(m)} ds, \quad \gamma_{kl}^{(m)} = \int\limits_{L_0} r w_k^{(m)} w_l^{(m)} dr,$$

где L_0, L_1 и L_2 – меридиональные сечения Σ_0, S_1 и S_2 соответственно.

Условие нормировки (25) в применении к вариационному решению (26) означает, что при найденных собственных векторах $(a_1^{(1,i)}, a_2^{(1,i)}, \ldots, a_q^{(1,i)})$ приближение $\phi_i^{(1)}(x,r)\sin(\theta)$ следует поделить на

$$N_{1,i} = \sum_{k=1}^{q} a_k^{(1,i)} w_k^{(1)}(0,1). \tag{27}$$

Тогда безразмерные гидродинамические коэффициенты $\bar\mu_i$ и $\bar\lambda_i$ вычисляются по формулам

$$\bar\mu_i = \frac{\pi\bar\kappa_{1,i}}{N_{1,i}^2}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{q} a_k^{(1,i)} a_l^{(1,i)}\gamma_{kl}, \qquad \bar\lambda_i = \frac{\pi\bar\kappa_{1,i}}{N_{1,i}}\sum_{k=1}^{q}\gamma_{1k}a_k^{(1,i)}. \tag{28}$$

Более того, если для вариационного решения $\chi(x,r)$ в качестве базисного набора функций выбрать те же координатные функции, что и в работах [6, 14], то оставшиеся гидродинамические коэффициенты принимают вид

$$\bar\lambda_{0i} = \frac{\pi\bar\kappa_{1,i}}{N_{1,i}}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{q}\gamma_{kl}a_k^{(1,i)}b_l, \tag{29}$$

где указанное вариационное решение записывается как

$$\chi(x,r) = \sum_{k=1}^{q} b_k w_k^{(1)}(x,r). \tag{30}$$

Используя функциональный базис полиномиального типа [6, 14] и формулы (29), (30), можно эффективно рассчитывать собственные значения $\bar\kappa_i$, тензор инерции $\bar J_0$ и гидродинамические коэффициенты $\bar\mu_i$, $\bar\lambda_i$ и $\bar\lambda_{0i}$. Особенность численной реализации состоит в том, что точность подсчета $\bar\mu_i$, $\bar\lambda_i$ и $\bar\lambda_{0i}$ ниже точности подсчета $\bar\kappa_i$ и $\bar J_0$ на две значащих цифры. Это связано с тем, что собственные векторы определяются с меньшей точностью, чем собственные значения. Последнее влияет на точности суммирования в формулах (29), (30) и подсчета нормы (27).

В табл. 1–4 даны с дифференцированной точностью численные значения рассматриваемых гидродинамических коэффициентов. Удержаны лишь те значащие цифры, которые стабилизировались при применении нашего вариационного метода.

3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Совместное использование линейной модальной системы и формул для гидродинамических силы и момента позволяет рассматривать и решать задачи динамики совместных колебаний сложных композитных механических объектов, содержащих частично заполненный жидкостью конический бак. Рассмотрим две тестовые задачи, иллюстрирующие такую возможность.

3.1. Задача Сретенского

Рассмотрим механическую систему, которая состоит из платформы массой M_p, допускающей горизонтальное поступательное движение без трения и связанной с неподвижной стенкой пружиной, имеющей коэффициент Гука k (рис. 2). На платформе жестко закреплен твердый конический бак массой M_t, частично заполненный жидкостью массой M_l. Задача состоит в определении малых

Табл. 1. Безразмерные элементы тензора инерции $\bar{J}_0$ и собственные значения $\bar{\kappa}_i$ $(i=1,\ldots,7)$ для V-образного усеченного конуса

$\bar{r}_1$	J_0	$\bar{\kappa}_1$	$\bar{\kappa}_2$	$\bar{\kappa}_3$	$\bar{\kappa}_4$	$\bar{\kappa}_5$	$\bar{\kappa}_6$	$\bar{\kappa}_7$
$\theta_0 = 30°$								
0.0	0.517382	1.304395	4.922743	8.136674	11.30987	15.98363	20.0581	28.3418
0.2	0.487763	1.304377	4.922736	8.136621	11.30966	14.50351	18.4672	26.7118
0.4	0.380655	1.301685	4.921797	8.136589	11.30940	14.46874	17.5772	21.4216
0.6	0.276329	1.253965	4.906108	8.135757	11.30925	14.46827	17.6078	20.7919
0.8	0.184284	0.933815	4.739593	8.080329	11.29705	14.46603	17.6178	20.6563
$\theta_0 = 45°$								
0.0	0.175536	1.000000	4.483019	7.731563	10.91109	14.07253	17.2317	20.5515
0.2	0.171198	0.999553	4.482460	7.731550	10.91109	14.07253	17.2295	20.4839
0.4	0.159874	0.985702	4.465880	7.731183	10.91108	14.07252	17.2290	20.4407
0.6	0.145044	0.892940	4.371729	7.714013	10.90932	14.07228	17.2276	20.4253
0.8	0.105545	0.584313	3.855765	7.270504	10.68761	13.99165	17.2000	20.2425
$\theta_0 = 60°$								
0.0	0.090171	0.677680	3.621716	6.916305	10.11356	13.28055	16.4371	19.6142
0.2	0.089803	0.676232	3.617095	6.913924	10.11334	13.28054	16.4368	19.6025
0.4	0.088835	0.655289	3.557480	6.887986	10.10879	13.27960	16.4359	19.5647
0.6	0.083248	0.566042	3.366544	6.712571	10.01808	13.24914	16.4285	19.4858
0.8	0.060932	0.347496	2.669468	5.580759	8.93110	12.47492	15.9299	19.3281

Табл. 2. Безразмерные гидродинамические коэффициенты $\bar{\mu}_{1i}$ $(i=1,\ldots,7)$

$\bar{r}_1$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{\mu}_3$	$\bar{\mu}_4$	$\bar{\mu}_5$	$\bar{\mu}_6$	$\bar{\mu}_7$
$\theta_0 = 30°$							
0.0	1.12237	4.9890	8.4272	11.9656	14.388	19.437	25.28
0.2	1.12236	4.9889	8.4190	11.7194	14.305	18.964	24.32
0.4	1.12113	4.9825	8.4113	11.7637	15.035	18.763	23.81
0.6	1.09833	4.8734	8.4074	11.7622	15.095	18.622	22.06
0.8	0.90121	4.4679	7.9889	11.6656	15.061	18.551	21.55
$\theta_0 = 45°$							
0.0	0.78540	3.2745	5.9642	8.4984	11.003	13.463	16.43
0.2	0.78523	3.2733	5.9640	8.4987	10.997	13.441	16.42
0.4	0.78098	3.2383	5.9591	8.4985	10.989	13.435	16.39
0.6	0.74680	3.0435	5.9148	8.4824	10.983	13.424	16.26
0.8	0.56645	2.9589	4.8744	7.8552	10.774	13.214	16.02
$\theta_0 = 60°$							
0.0	0.49801	1.79753	3.5197	5.2374	6.913	8.568	10.45
0.2	0.49771	1.79581	3.5146	5.2362	6.913	8.595	10.36
0.4	0.49301	1.76770	3.4560	5.2233	6.907	8.642	10.22
0.6	0.46482	1.66715	3.3546	4.9984	6.832	8.571	9.82
0.8	0.33850	1.84128	2.6135	4.2488	6.068	7.696	9.19

Табл. 3. Безразмерные гидродинамические коэффициенты $\bar{\lambda}_i$ $(i=1,\ldots,7)$

$\bar{r}_1$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_4$	$\bar{\lambda}_5$	$\bar{\lambda}_6$	$\bar{\lambda}_7$
$\theta_0 = 30^\circ$							
0.0	1.07172	0.13840	0.06427	0.03673	0.0270	0.0077	0.0066
0.2	1.07170	0.13841	0.06431	0.03899	0.0271	0.0194	0.0068
0.4	1.06998	0.14024	0.06457	0.03924	0.0272	0.0206	0.0071
0.6	1.03912	0.17076	0.07025	0.04207	0.0289	0.0212	0.0168
0.8	0.81051	0.30826	0.12846	0.06711	0.0429	0.0307	0.0234
$\theta_0 = 45^\circ$							
0.0	0.78540	0	0	0	0	0	0
0.2	0.78516	0.00049	−0.00007	0.00001	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	0.77761	0.01514	−0.00180	0.00005	0.0000	0.0000	−0.0000
0.6	0.72338	0.09687	−0.00088	−0.00211	−0.0002	0.0001	0.0001
0.8	0.50812	0.24294	0.08866	0.02223	0.0019	−0.0020	−0.0015
$\theta_0 = 60^\circ$							
0.0	0.51467	−0.05960	−0.00037	−0.00061	−0.0002	−0.0001	−0.0001
0.2	0.51397	−0.05755	−0.00179	−0.00021	−0.0003	−0.0001	−0.0001
0.4	0.50367	−0.02982	−0.01748	0.00187	0.0000	−0.0003	−0.0003
0.6	0.45432	0.05937	−0.03537	−0.01414	0.0004	0.0016	0.0002
0.8	0.30280	0.16554	0.05833	−0.00124	−0.0195	−0.0169	−0.0087

Табл. 4. Безразмерные гидродинамические коэффициенты $\bar{\lambda}_{0i}$ $(i=1,\ldots,7)$

$\bar{r}_1$	$\bar{\lambda}_{01}$	$\bar{\lambda}_{02}$	$\bar{\lambda}_{03}$	$\bar{\lambda}_{04}$	$\bar{\lambda}_{05}$	$\bar{\lambda}_{06}$	$\bar{\lambda}_{07}$
$\theta_0 = 30^\circ$							
0.0	0.60859	−0.15537	−0.08771	−0.05762	−0.0424	−0.0124	−0.0113
0.2	0.60841	−0.15525	−0.08757	−0.05714	−0.0408	−0.0303	−0.0163
0.4	0.59852	−0.14831	−0.08641	−0.05361	−0.0405	−0.0323	−0.0107
0.6	0.51675	−0.08966	−0.07462	−0.05061	−0.0369	−0.0266	−0.0227
0.8	0.25285	0.04294	−0.01615	−0.02484	−0.0221	−0.0181	−0.0158
$\theta_0 = 45^\circ$							
0.0	0.31416	−0.14873	−0.04966	−0.02531	−0.01535	−0.0103	−0.0075
0.2	0.31329	−0.14765	−0.04983	−0.02530	−0.01535	−0.0102	−0.0077
0.4	0.29689	−0.12663	−0.05254	−0.02523	−0.01533	−0.0102	−0.0079
0.6	0.22919	−0.04966	−0.05190	−0.02747	−0.01554	−0.0102	−0.0075
0.8	0.09420	0.02802	−0.00607	−0.01610	−0.01509	−0.0115	−0.0082
$\theta_0 = 60^\circ$							
0.0	0.13197	−0.08677	−0.00059	−0.00100	−0.0003	−0.0002	−0.0001
0.2	0.13086	−0.08481	−0.00209	−0.00057	−0.0004	−0.0002	−0.0002
0.4	0.11963	−0.06472	−0.01476	0.00118	−0.0002	−0.0003	−0.0002
0.6	0.08646	−0.01878	−0.02641	−0.00773	0.0002	0.0007	0.0001
0.8	0.03277	0.01268	−0.00168	−0.00790	−0.0077	−0.0051	−0.0024

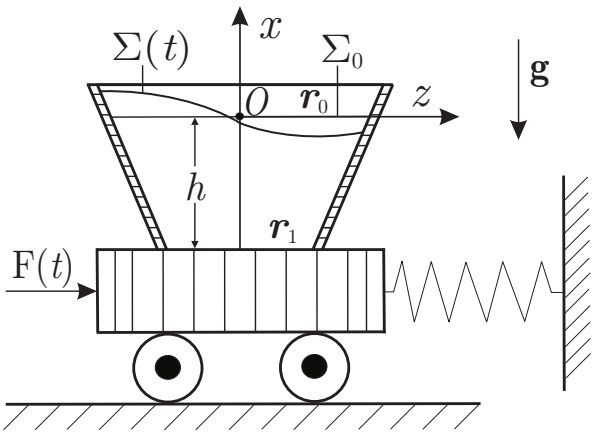

Рис. 2. Подвижная платформа с коническим баком, частично заполненным жидкостью

колебательных движений платформы относительно ее статического положения равновесия, вызванных воздействием малой горизонтальной вынуждающей силы, т. е. требуется решить вторую задачу динамики применительно к данной многокомпонентной механической системе. Поскольку постановка допускает лишь поступательные движения с одной степенью свободы (для простоты – вдоль оси Oz), то $\eta_1=\eta_2=\eta_4=\eta_5=\eta_6=0$. Следовательно, движения платформы описываются одной функцией $\eta_3(t)$. Предполагая, что $\eta_3(t)$ известно, найдем линейные вынужденные колебания жидкости из модальной системы (15b) с неоднородной правой частью, зависящей от $\ddot{\eta}_3$:

$$\mu_i(\ddot{\beta}_i^s+\sigma_i^2\beta_i^s)=-\lambda_i\ddot{\eta}_3,\quad i=1,2,\ldots, \tag{31}$$

а также определим приложенную к баку (платформе) горизонтальную гидродинамическую силу F_3 по формуле (19), которая в данном случае упрощается к виду

$$F_3(t)=-M_l\ddot{\eta}_3-\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{\beta}_k^s\lambda_k. \tag{32}$$

Из уравнений (31), (32) следует, что гидродинамическая сила – фактически функция η_3, поскольку модальные функции β_i^s зависят лишь от $\ddot{\eta}_3$ и начальных возмущений жидкости.

Выражение для гидродинамической силы должно теперь быть включено в динамическое уравнение платформы

$$(M_t+M_p)\ddot{\eta}_3=-k\eta_3+F_3+\mathrm{F}, \tag{33}$$

которое следует из второго закона Ньютона: на платформу действуют некоторая известная вынуждающая сила $\mathrm{F}(t)$, сила упругости пружины $-k\eta_3$ и гидродинамическая сила $F_3(t)$. С учетом формулы для гидродинамической силы (32) уравнение (33) перепишем как

$$M_0(\ddot{\eta}_3+\sigma_0^2\eta_3)+\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{\beta}_k^s\lambda_k=\mathrm{F}. \tag{34}$$

Здесь $M_0=M_t+M_p+M_l$ – суммарная массы всей системы; $\sigma_0^2=k/M_0$ – квадрат собственной частоты связанных с наличием пружины колебаний платформы с неподвижной (“замороженной”) жидкостью.

Таким образом, для решения второй задачи динамики, состоящей в определении движений платформы и жидкости при известной внешней силе $\mathrm{F}(t)$, необходимо решить систему связанных дифференциальных уравнений (34) и (31), где первое из них отвечает за движение платформы, а система модальных уравнений (31) описывает колебания свободной поверхности жидкости.

Рассмотрим частный случай, когда внешнее воздействие (сила) описывается гармоническим законом $\mathrm{F}=\eta_a M_0\sigma^2\cos(\sigma t)$, где η_a – амплитуда; σ – вынуждающая частота, и найдем установившиеся $2\pi/\sigma$-периодические установившиеся движения механической системы

$$\beta_i=A_i\cos(\sigma t),\quad \eta_3=B\cos(\sigma t). \tag{35}$$

Здесь B – амплитуда колебания платформы; A_i – амплитуды собственных форм.

Подставляя выражения (35) в уравнения (34) и (31), можно найти B и A_i. При этом безразмерная амплитуда колебания платформы описывается соотношением

$$\bar{B}=\frac{B}{\eta_a}=\left((\bar{\sigma}_0^2-1)-\frac{\rho r_0^3}{M_0}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\bar{\lambda}_i^2}{\bar{\mu}_i(\bar{\sigma}_i^2-1)}\right)^{-1}, \tag{36}$$

где $\bar{\sigma}_0=\sigma_0/\sigma$; $\bar{\sigma}_i=\sigma_i/\sigma$.

Проанализируем зависимость безразмерной амплитуды установившихся колебаний платформы $\bar{B}$ от возбуждающей частоты для случая, когда совпадают собственная парциальная частота платформы σ_0 и первая собственная частота жидкости σ_1. Наш численный анализ использует семь элементов (мод) бесконечной суммы в представлении (36). Как показали расчеты, это обеспечивает стабилизацию трех значащих цифр $\bar{B}$ для конических баков с углами полураствора $\theta_0=30^\circ$, 45° и 60° при $r_1=0.4$. В тестовых примерах, представленных на рис. 3, выбрано $\rho r_0^3/M_0=0.5$. Как видно из графиков, основной резонансный отклик колебания платформы наблюдается при $\sigma/\sigma_0<1$,

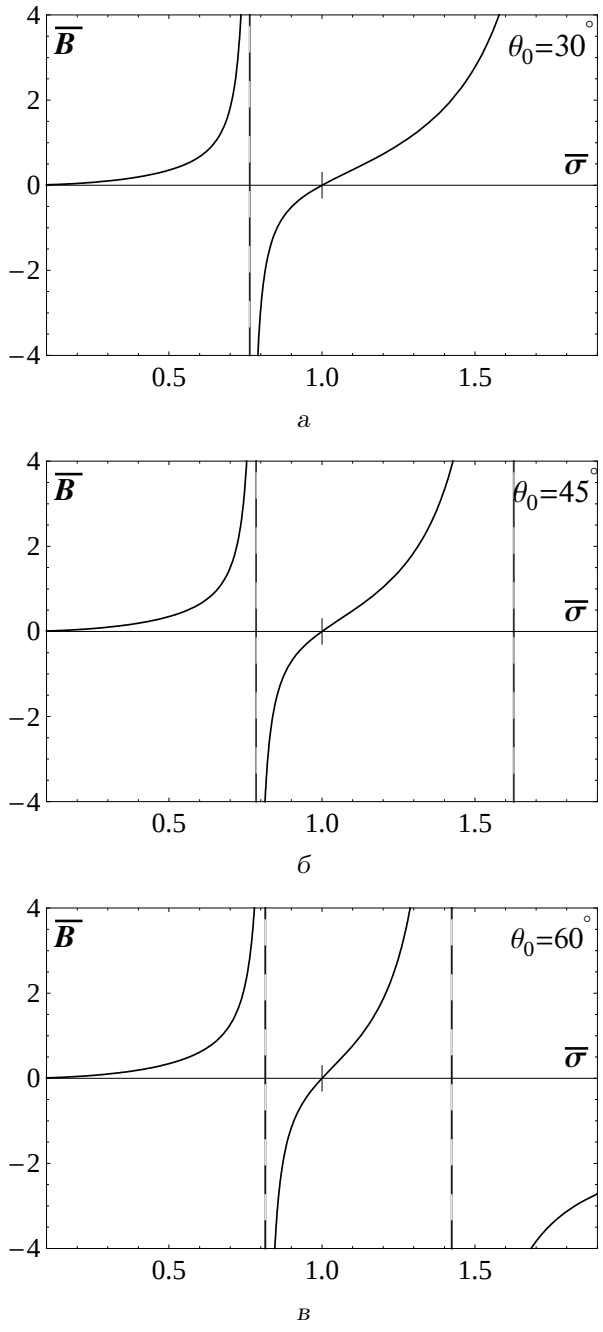

Рис. 3. Значение безразмерной амплитуды установившихся колебаний платформы как функция $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0$ ($\sigma_0 = \sigma_1$, $\rho r_0^3/M_0 = 0.5$, $r_1 = 0.4$):
а – $\theta_0 = 30°$, б – $\theta_0 = 45°$, в – $\theta_0 = 60°$

т. е. для возбуждающих частот, меньших, чем минимальные парциальные частоты $\sigma_0 = \sigma_1$. Когда $\sigma = \sigma_0 = \sigma_1$, амплитуда установившихся колебаний платформы становится нулевой, т. е. имеет место так называемое динамическое демпфирование.

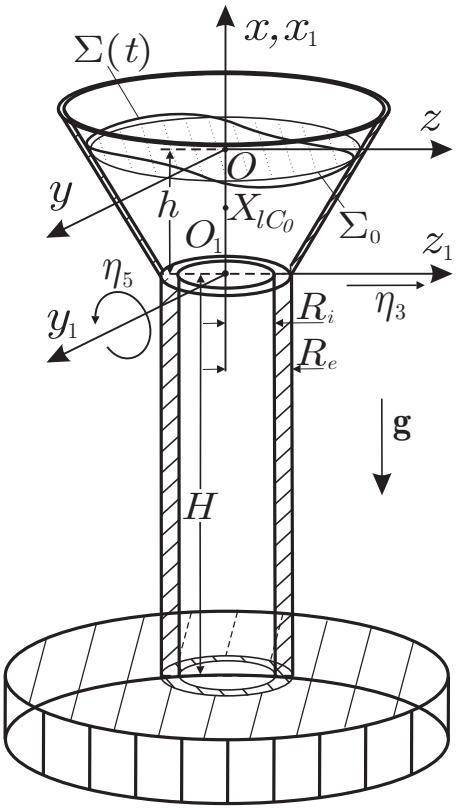

Рис. 4. Схематическое изображение водонапорной башни с коническим баком

Как следует из формулы (36), амплитуда колебания платформы также становится нулевой при $\sigma = \sigma_i$ ($i \geq 2$), когда вынуждающая частота совпадает с высшими собственными частотами колебаний жидкости.

3.2. Модель водонапорной башни с коническим баком

Рассмотрим задачу, возникающую при моделировании колебаний водонапорной башни с коническим баком, который жестко закрепленным на ее вершине. Схематически соответствующая механическая система изображена на рис. 4. При моделировании ее колебаний предполагаем, что масса конического бака M_t значительно меньше, чем масса жидкости M_l, а башня совершает в плоскости Oxz поперечные колебательные движения без кручений и сжатий (вертикальным сжатием башни благодаря массе жидкости пренебрегаем). Кроме того, допустим, что колебания башни достаточно точно описываются в рамках модели балки Эйлера. Высота башни составляет H, внешний радиус равен радиусу дна конической

полости $R_b=r_1$, а внутренний (радиус шахты) – $R_i=k_ir_1$, где $0<k_i<1$. Все геометрические параметры считаем постоянными. Колебания водонапорной башни с жидкостью описываются в неподвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$, которая связана с основанием (дном) бака, совпадающим с верхней точкой башни, к которой бак жестко прикреплен в статическом положении равновесия.

3.2.1. Уравнение балки и краевые условия на нижнем (закрепленном) конце

Колебания балки моделируются уравнением Эйлера

$$m_b\ddot{W} + (EIW'')'' = 0, \tag{37}$$

где функция $W(x_1,t)$ описывает отклонение балки в плоскости $O_1x_1z_1$; E– модуль упругости Юнга; ρ_c – плотность материала; $m_b = \pi\rho_c(R_b^2-R_i^2)$ – линейная (на единицу длины) масса балки; I – экваториальный момент инерции балки. Он постоянен для неизменного сечения и равен $I_b=\pi(R_b^4-R_i^4)/4$. В уравнении (37) точкой обозначено дифференцирование по времени, а штрихом – по линейной координате x_1. Граничные условия на закрепленном конце (основании башни) имеют вид

$$W(-H,t)=0, \quad W'(-H,t)=0. \tag{38}$$

3.2.2. Краевые условия на верхнем конце

На верхнем конце балки (в точке крепления бака) с учетом того, что масса самого бака игнорируется, должно выполняться краевое условие, выражающее равенство крутящих моментов и упругих сил балки и гидродинамических моментов и сил, связанных с жидкостью. В нашем случае оно имеет вид

$$EIW''(0,t)=-F_5^{O_1}, \quad (EIW'')'(0,t)=-F_3^{O_1}, \tag{39}$$

где $F_3^{O_1}(t)$ – горизонтальная компонента гидродинамической силы в системе координат $O_1x_1y_1z_1$; $F_5^{O_1}(t)$ – гидродинамический момент относительно оси O_1y_1.

В свою очередь, гидродинамические сила $F_3^{O_1}(t)$ и момент $F_5^{O_1}(t)$ возникают благодаря тому, что верхний конец балки совершает горизонтальное смещение $u(t)$ и наклон на малый угол $\theta(t)$:

$$u = W(0,t), \quad \theta = -W'(0,t). \tag{40}$$

По сути, $F_3^{O_1}(t)$ и $F_5^{O_1}(t)$ являются сложными функциями от $W(0,t)$, $W'(0,t)$ и их производных по времени. Соответствующие выражения для гидродинамических силы и момента можно получить с помощью линейной модальной теории. При этом нужно учесть положение неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и следующую связь между u, θ и η_3, η_5:

$$\eta_5 = \theta, \quad \eta_3 = u - h\theta,$$

Указанные величины присутствуют как известные входные параметры в исходной краевой задаче, модальной системе (15b) и выражениях для гидродинамических силы и момента (19), (21).

С учетом формул (19), (21) и (23) при $A = O_1$, гидродинамические силу и момент в условиях (39) определим как

$$F_3^{O_1} = M_l(\ddot{\theta}X_{lC_0} - \ddot{u}) - \sum_{k=1}^{\infty}\ddot{\beta}_k^s\lambda_k, \tag{41}$$

$$F_5^{O_1} = M_lX_{lC_0}(g\theta + \ddot{u}) - J_0^{O_1}\ddot{\theta} - \\ - \sum_{j=1}^{\infty}\big(-\lambda_{0j}^{O_1}\ddot{\beta}_j^s + g\lambda_j\beta_j^s\big). \tag{42}$$

Здесь X_{lC_0} – вертикальная координата центра масс жидкости в системе $O_1x_1y_1z_1$; $J_0^{O_1}=M_lh(2X_{lC_0}-h)+J_0$; $\lambda_{0i}^{O}=\lambda_{0i}=\lambda_{0i}^{O_1}+h\lambda_i$; модальные функции β_j^s – решения уравнений (15b), которые можно переписать в виде

$$\mu_i(\ddot{\beta}_i^s + \sigma_i^2\beta_i^s) = -\lambda_i(\ddot{u} + g\theta) + \lambda_{0i}^{O_1}\ddot{\theta}. \tag{43}$$

Таким образом, краевые условия на верхнем конце имеют вид (39), где правые части зависят от $W(0,t)$, $W'(0,t)$ и их производных по времени посредством выражений (41) и (42), $u(t)$ и $\theta(t)$ определены равенствами (40), а β_i^s – решения модальной системы (43), которые также зависят лишь от $u(t)$, $\theta(t)$ и начальных возмущений жидкости.

3.2.3. Собственные совместные колебания

Рассмотрим собственные совместные колебания системы, положив

$$W(x_1,t) = \mathcal{W}(x_1)\cos\sigma t, \quad \beta_i^s(t) = B_i\cos\sigma t, \tag{44}$$

где σ – неизвестная собственная частота, а переменные B_i и функция $\mathcal{W}(x_1)$ задают амплитуды собственных форм колебания жидкости и геометрию прогиба балки на соответствующей форме собственных колебаний.

Подстановка условий (44) в модальные уравнения (43) позволяет явно найти

$$B_i = \frac{\sigma^2}{\mu_i(\sigma_i^2-\sigma^2)}\left[\lambda_i\mathcal{W}(0) + \left(\frac{\lambda_ig}{\sigma^2} + \lambda_{0i}^{O_1}\right)\mathcal{W}'(0)\right]$$

и тем самым получить более простые выражения для краевых условий на свободном конце для функции $\mathcal{W}(x_1)$. Задача о совместных собственных колебаниях сводится к определению нетривиальных решений однородной задачи

$$-\sigma^2 m_b \mathcal{W} + (EI\mathcal{W}'')'' = 0, \quad x_1 \in [-H, 0], \quad (45a)$$

$$\mathcal{W}(-H) = \mathcal{W}'(-H) = 0, \quad (45b)$$

$$EI\mathcal{W}''(0) = \sigma^2[A_1\mathcal{W}(0) + A_3\mathcal{W}'(0)], \quad (45c)$$

$$(EI\mathcal{W}'')'(0) = -\sigma^2[A_2\mathcal{W}(0) + A_1\mathcal{W}'(0)] \quad (45d)$$

относительно функции $\mathcal{W}(x_1)$ и неизвестного параметра σ^2. Здесь коэффициенты $A_1(\sigma^2)$, $A_2(\sigma^2)$ и $A_3(\sigma^2)$ зависят от σ^2 и имеют явный вид :

$$\begin{aligned} A_1 &= M_l X_{lC_0} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(\lambda_{0j}^{O_1} + \lambda_j g/\sigma^2)}{\mu_j(\bar{\sigma}_j^2 - 1)}, \\ A_2 &= M_l + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{\mu_i(\bar{\sigma}_j^2 - 1)}, \\ A_3 &= \frac{M_l X_{lC_0} g}{\sigma^2} + J_0^{O_1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_{0j}^{O_1} + \lambda_j g/\sigma^2)^2}{\mu_j(\bar{\sigma}_j^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Задача (45a) – (45d) допускает вариационную формулировку, сводящую ее к определению экстремальных точек квадратичного функционала

$$\begin{aligned} F(\mathcal{W}) = &\int_{-H}^{0} \left[\sigma^2 m_b \mathcal{W} - (EI\mathcal{W}'')^2\right] dx_1 + \\ &+\sigma^2[A_2\mathcal{W}^2 + A_3(\mathcal{W}')^2 + 2A_1\mathcal{W}\mathcal{W}']_{x_1=0} \end{aligned} \quad (47)$$

при кинетическом ограничении (45b). Это позволяет применить вариационные методы решения, представив $\mathcal{W}(x_1)$ в виде

$$\mathcal{W} = \sum_{k=1}^{q} a_k \psi_k,$$

где каждая из функций $\psi_k(x_1)$ удовлетворяет однородным краевым условиям (45b).

Используя необходимое условие экстремума функционала (47), приходим к определению нулей детерминанта

$$D(\sigma) = \det|\{e_{ij}\} - \sigma^2\{f_{ij}\}| = 0, \quad (48)$$

где элементы матриц вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \int_{-H}^{0} EI\psi_i''\psi_j'' dx_1, \\ f_{ij} &= \int_{-H}^{0} m_b\psi_i\psi_j dx_1 + \left[A_2(\sigma^2)\psi_i\psi_j + \right. \\ &\left. + A_3(\sigma^2)\psi_i'\psi_j' + A_1(\sigma^2)(\psi_i\psi_j' + \psi_i'\psi_j)\right]_{x_1=0}. \end{aligned} \quad (49)$$

3.2.4. Численные эксперименты

Определим собственные частоты совместных колебаний механической системы. Воспользуемся вариационным методом решения задачи (45a) – (45d), где базисные функции $\psi_k = \widehat{\psi}_k/N_k$ имеют вид

$$\widehat{\psi}_k(x_1) = (x_1 + H)^{(k+1)},$$

$$N_k = \sqrt{\int_{-H}^{0} \widehat{\psi}_k{}^2(x_1) dx_1}.$$

Проанализируем случай, когда совпадают первая собственная частота колебаний жидкости σ_{11}, связанная с подвижностью свободной поверхности, и первая собственная частота балки с баком и жидкостью σ_{01}, свободная поверхность которой не совершает колебаний (закрыта “абсолютно твердой крышкой”). Последняя парциальная частота может быть определена в рамках нашего вариационного метода, где в формулах (46) следует положить $B_i = 0$.

Приравняем σ_{01} и σ_{11}, фиксируя $r_1 = R_b = 0.4$ и $\theta_0 = \pi/4$. Теперь, чтобы найти подходящие значения физических и геометрических величин, обеспечивающие равенство парциальных частот, можно варьировать соотношение R_b/H_b, в котором входящие величины выражены через коэффициенты $k_b > 1$ и $0 < k_i < 1$ ($H_b = H = k_b r_1$, $R_i = k_i r_1$).

Условие $\sigma_{01} = \sigma_{11}$ выполняется, например, в случае $k_i = 0.7$, $k_b = 28.15$, что справедливо для конструкции со следующими весьма реалистичными геометрическими параметрами: диаметром свободной поверхности резервуара 2.5 м, высотой заполнения жидкостью 1.5 м, диаметром балки 1 м и высотой 28.15 м. При расчете предполагалось, что жидкость – вода ($\rho_l = 10^3$ кг/м^3), а башня построена из железобетона ($\rho_c = 2.4 \cdot 10^3$ кг/м^3, $E = 6 \cdot 10^6$ Н/м^2).

График функции $D(\sigma)$ – уравнение (48) – для указанных входных геометрических и физических параметров приведен сплошной линией на рис. 5.

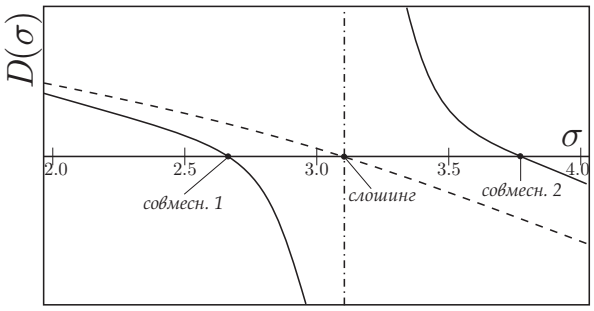

Рис. 5. График детерминанта $D(\sigma)$

Здесь совпадающие парциальные частоты обозначены словом "слошинг". Если не учитывать подвижность свободной поверхности жидкости, то зависимость $D(\sigma)$ совпадет с убывающей монотонной функцией, представленной штриховой линией.

ВЫВОДЫ

С использованием вариационных методов решения базовых краевых задач, разработанных в предыдущих работах, построена линейная модальная теория плескания жидкости в коническом баке. Проведены необходимые расчеты и затабулированы все значения безразмерных гидродинамических коэффициентов модальной теории для практически важных геометрических пропорций конических баков.

На основе линейной модальной теории решена задача Сретенского о совместных поступательных колебаниях платформы с коническим баком, содержащем жидкость, при упругой связи, а также задача о собственных связанных колебаниях водонапорной башни с коническим резервуаром.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Авторы благодарят Немецкое исследовательское общество за финансовую поддержку (проект DFG 436UKR 113/33/00).

1. *Докучаев Л. В.* К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях // Прикл. мат. мех.– 1964.– **28**, вып. 1.– С. 151–154.
2. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику тел с полостями, частично заполненными жидкостью.– К.: Наук. думка, 1990.– 296 с.
3. *Луковський І. О.* До побудови розвязку нелінійної задачі про вільні коливання рідини в посудинах довільної геометричної форми.– Доп. АН УРСР. Сер. А: 1969, N 3.– 207–210 с.
4. *Луковський І. О.* До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках // Доп. НАН України. Сер. А.– 2002.– N 5.– P. 53–58.
5. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости.– К.: Наук. думка, 1984.– 212 с.
6. *Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н.* О потенциале Стокса – Жуковского для полости в виде усеченного кругового конуса // Збірн. праць Ін-ту мат. НАН України.– 2008.– **9**.– С. 134-143.
7. *Луковский И. А., Троценко В. А., Фещенко С. Ф.* Расчет динамических характеристик жидкости в подвижных полостях.– К.: АН УССР, 1968.– 265 р.
8. *Микишев Г. Н., Дорожкин Н. Я.* Экспериментальные исследования свободных колебаний жидкости в контейнерах // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, мех. и машиностр.– 1961.– N 4.– С. 48–53.
9. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях.– К.: Наук. думка, 1969.– 250 с.
10. *Bauer H. F.* Sloshing in conical tanks // Acta Mechanica.– 1982.– **43**(3-4).– P. 185–200.
11. *Dutta S., Mandal A., Dutta S.C.* Soilstructure interaction in dynamic behaviour of elevated tanks with alternate frame staging configurations // J. Sound Vib.– 2004.– **277**.– P. 825–853.
12. *El Damatty A., Korol R. M., Tang L. M.* Analytcial and experimental investigation of the dynamic response of liquid-filled conical tanks // Proc. World Conf. Earthquake Eng..– New Zeland, 2000.– Pap. 966, Topic 7.– P. 8.
13. *El Damatty A., Sweedan A. M. I.* Equivalent mechanical analog for dynamic analysis of pure conical tanks // Thin-Wall. Struct.– 2006.– **44**.– P. 429–440.
14. *Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A.* Natural sloshing frequencies in rigid truncated conical tanks // Eng. Comput.– 2008.– **25**, N 6.– P. 518–540.
15. *Faltinsen O. M., Timokha A. N.* Sloshing.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009.– 608 p.
16. *Sweedan A. M. I.* Equivalent mechanical model for seismic forces in combined tanks subjected to vertical earthquake excitation // Thin-Wall. Struct.– 2009.– **47**.– P. 942–952.