

УДК 539.3

## АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛУСЛОЯ. НЕОДНОРОДНЫЕ ВОЛНЫ

В. Т. ГРИНЧЕНКО, Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ, И. В. СТАРОВОЙТ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 21.10.2009*

Проанализированы особенности резонанса на неоднородных волнах при антисимметричных колебаниях полуслоя со свободными боковыми поверхностями и свободным торцом в зависимости от коэффициента Пуассона. Найдено резонансное увеличение модуля амплитуды первой неоднородной волны в диапазоне, где распространяются две нормальные моды. Показано, что при переходе через резонансную частоту фаза комплексной амплитуды первой неоднородной волны меняет знак. Резонансное поведение первой неоднородной волны наблюдается не для всех коэффициентов Пуассона.

Проаналізовано особливості резонансу на неоднорідних хвилях при антисиметричних коливаннях півшару з вільними бічними поверхнями й вільним торцем в залежності від коефіцієнта Пуассона. Знайдено резонансне збільшення модуля амплітуди першої неоднорідної хвилі в діапазоні, де поширюються дві нормальні моди. Показано, що при переході через резонансну частоту фаза комплексної амплітуди першої неоднорідної хвилі змінює знак. Резонансна поведінка першої неоднорідної хвилі спостерігається не для всіх коефіцієнтів Пуассона.

The paper deals with analyzing the resonance features on the inhomogeneous waves at antisymmetric vibrations of a half-layer with free lateral surfaces and free edge, depending on the Poisson's ratio. The resonant increase of the amplitude's module of the first inhomogeneous wave has been found in that range where two propagating modes exist. The phase of the complex amplitude of the first inhomogeneous wave changes its sign when passing through the resonant frequency. The resonant behavior of the first inhomogeneous wave is observed not for all Poisson's ratios.

### ВВЕДЕНИЕ

Внимание к эффектам локализации движения вблизи вертикальных границ в волноводах со свободными боковыми поверхностями не ослабевает, несмотря на значительное количество посвященных этому вопросу работ и более чем полувековую историю исследований. В этом ряду наиболее известен и относительно хорошо изучен краевой резонанс – явление возбуждения колебаний на так называемой краевой форме колебаний, при которой имеет место сильная локализация движения вблизи торца волновода. Экспериментально краевой резонанс впервые наблюдался Шоу (Shaw) в 1956 г., когда при исследовании колебаний в круглых пьезокерамических дисках была обнаружена, что зона больших смещений сосредоточена вблизи края диска, а резонансная частота не зависит от его радиуса [1]. Аналогичная форма колебаний обнаружена в экспериментах на длинных стальных цилиндрах Оливером (Oliver) в 1957 г. [2]. В работе (Gazis) и Миндлина (Mindlin) [3] явление краевого резонанса впервые было связано со спецификой возбуждения неоднородных волн.

К настоящему времени накоплен огромный объем информации, основанный на экспериментальных, численных и численно-аналитических подходах, и описывающий различные стороны

проявления краевого резонанса. Для достижения более глубокого понимания специфики возбуждения неоднородных волн значительное внимание было уделено анализу краевого резонанса в полугограниченных телах [3–11]. Особо отметим статью [12], в которой приведены экспериментальные данные о краевом резонансе в алюминиевой пластине при падении на ее торец распространяющейся симметричной нормальной волны и проведено сравнение полученных результатов с расчетом по методу однородных решений и конечных элементов. Многочисленные работы по краевому резонансу в полугограниченных телах показали, что в объектах типа полуполосы и полуцилиндра частота краевого резонанса, на которой происходит локализация движения вблизи торца, совпадает с резонансной частотой в конечных цилиндрах и пластинах.

Для симметричных колебаний полуслоя краевой резонанс изучался при различных способах возбуждения волнового поля: вынужденной нагрузкой на торце или при отражении от него первой распространяющейся волны [8, 12–14]. В этом случае указанное явление наблюдается тогда, когда в волноводе существует только одна распространяющаяся нормальная волна (мода) – первая. При этом частота краевого резонанса существенно увеличивается с ростом коэффициента Пуассона  $\nu$ . Более того, при изменении величины  $\nu$  меняется степень

возбуждения неоднородных волн и ширина полосы частот, где они эффективно возбуждаются (добротность резонанса). Последнее явно указывает на зависимость характеристик краевого резонанса от соотношения сдвиговых и объемных компонентов в нормальной волне.

На частоте краевого резонанса амплитуда неоднородных волн остается конечной величиной практически для всех значений коэффициента Пуассона, кроме  $\nu=0$  и 0.224896 [4, 15, 16], что обусловлено связанностью единственной распространяющейся и неоднородных волн через граничные условия. Вследствие этого в полуслой вносятся радиационное демпфирование и амплитуды неоднородных волн остаются ограниченными. Что же касается двух отмеченных значений коэффициентов Пуассона, то для них можно получить действительный резонанс на неоднородных волнах при вынужденных колебаниях за счет соответствующего выбора нагрузки на торце. В этом случае первая нормальная мода отражается от свободного торца без возбуждения дополнительных волновых движений. Для  $\nu=0$  при вынужденных колебаниях полуслоя, вводя самоуравновешенную нагрузку, удастся устранить связь между распространяющейся и неоднородными волнами. Тогда на частоте краевого резонанса амплитуда неоднородной волны стремится к бесконечности [4, 5, 7, 9, 16]. Для  $\nu \sim 0.224896$  частота краевого резонанса совпадает с частотой моды Ламе, которая, как известно, ортогональна по напряжениям ко всем неоднородным волнам. Тогда связь между распространяющейся и неоднородными волнами можно устранить, возбуждая полуслой нагрузкой, ортогональной моде Ламе.

При симметричных колебаниях полуцилиндра для  $\nu=0$ , как и для полуслоя, связь между единственной распространяющейся и неоднородными волнами можно устранить за счет соответствующего выбора характера нагружения торца. Возбуждая полуграниченный волновод самоуравновешенной нагрузкой, на некоторой частоте можно получить действительный резонанс, когда амплитуды смещений обращаются в бесконечность. В случае неосесимметричных колебаний полуцилиндра в некотором частотном диапазоне распространяющиеся волны отсутствуют, независимо от величины  $\nu$ , поскольку наименьшая частота запертого волновода больше нуля. Здесь также наблюдается неограниченный рост амплитуд смещений, т. е. резонанс на неоднородных волнах проявляется в чистом виде [4].

Для антисимметричных (изгибных) колебаний полуслоя ситуация иная. Для такого вида дви-

жений краевого резонанса в области существования одной распространяющейся моды нет [19], хотя при ее отражении от торца возбуждается вся совокупность неоднородных волн. Отметим, что в низкочастотном пределе неоднородная амплитуда волны с чисто мнимым волновым числом превышает амплитуду распространяющейся волны в  $\sqrt{2}$  раз. Процесс отражения первой антисимметричной волны от свободного торца полуслоя рассматривался в публикациях [20–22]. В статьях [22, 23] показано, что в диапазоне существования двух распространяющихся мод наблюдается увеличение амплитуды неоднородной волны, соответствующей первому комплексному корню дисперсионного уравнения. В работе [23] волновое поле в полуслое возбуждалось первой распространяющейся волной, приходящей из бесконечности. В статье [22] обнаружено увеличение амплитуд смещений на торце полуслоя при вынужденных антисимметричных колебаниях. Показано, что на частоте максимума амплитуды волны с комплексным волновым числом увеличивается энергия, поступающая в волновод. За счет согласования характера распределения внешней нагрузки по толщине волновода с распределением напряжений в неоднородной волне можно увеличить степень ее возбуждения. Увеличение амплитуд смещений на соответствующей частоте достигается за счет изменения нагрузки на торце. При этом, в отличие от случая симметричных колебаний, при антисимметричных колебаниях полуслоя амплитуды неоднородных волн высших порядков не имеют максимумов на частоте максимума амплитуды первой неоднородной волны.

В этой работе рассматриваются особенности возбуждения неоднородных волн при антисимметричных колебаниях полуслоя. Показано, что явление типа краевого резонанса существует и при антисимметричных колебаниях, однако оно наблюдается не для всех коэффициентов Пуассона.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для случая плоской деформации рассмотрим задачу определения волнового поля в изотропном полубесконечном упругом слое

$$|Y| \leq H, \quad Z \geq 0, \quad -\infty < X < \infty$$

с заданными физическими характеристиками – модулем сдвига  $\mu$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и плотностью  $\rho$  (рис. 1). Волны предполагаются гармоническими с круговой частотой  $\omega$ . Зависимость кинематических и силовых характеристик

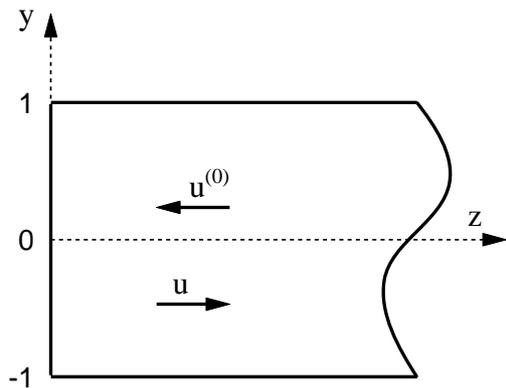


Рис. 1. Система координат и геометрия задачи

от времени задается множителем  $e^{-i\omega t}$ , который опускается в последующих выкладках. Частота  $\omega$  считается положительной вещественной величиной. Волновое поле полагается антисимметричным относительно плоскости  $Y=0$ . При построении решения вводятся безразмерные координаты  $y=Y/H$  и  $z=Z/H$ .

Изучим процесс отражения приходящей из бесконечности первой нормальной волны  $\mathbf{u}^{(0)}(y, z)$  от свободного торца волновода. Для нахождения характеристик отраженных волн  $\mathbf{u}^{(1)}(y, z)$  для векторного уравнения движения Ламе [4]

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

необходимо решить граничную задачу

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) &= 0, \quad z=0, \quad |y| \leq 1, \\ \tau_{zy}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0) &= 0, \quad z=0, \quad |y| \leq 1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_{yy}(\pm 1, z) = 0, \quad \tau_{yz}(\pm 1, z) = 0, \quad y = \pm 1, \quad z \geq 0.$$

Напряжения в падающей волне задаются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{zz}^{(0)}}{2\mu} &= i \left( \frac{(\xi^2 + \alpha_2^2)}{2\alpha_1} (\xi^2 + \Omega_0^2) \alpha_1 \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\text{sh } \alpha_1 y}{\text{sh } \alpha_1} - \xi^2 \alpha_2 \frac{\text{sh } \alpha_2 y}{\text{ch } \alpha_2} \right) e^{-i\xi z}, \quad (3) \\ \frac{\tau_{zz}^{(0)}}{2\mu} &= \xi \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2} \left( \frac{\text{ch } \alpha_2 y}{\text{ch } \alpha_2} - \frac{\text{ch } \alpha_1 y}{\text{ch } \alpha_1} \right) e^{-i\xi z}, \end{aligned}$$

где  $\xi$  – постоянная распространения, равная действительному корню дисперсионного уравнения.

Дополнительно к граничным условиям (2) должны выполняться условия излучения на бесконе-

чности, заключающиеся в том, что каждая распространяющаяся нормальная волна уносит энергию от торца полуполосы на бесконечность.

Дисперсионное уравнение для изгибных колебаний изотропного бесконечного слоя со свободными поверхностями имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\xi) &= \xi^2 \alpha_2 \text{th} \alpha_2 - (2\xi^2 - \Omega_2)^2 \frac{\text{th} \alpha_1}{4\alpha_1} = 0, \\ \alpha_j &= \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - \Omega_j^2}, & |\xi| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \xi^2}, & |\xi| < \Omega_j; \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

$\Omega_1 = \omega h / c_l$ ;  $\Omega_2 = \omega h / c_s$ ;  $c_l$  и  $c_s$  – скорость продольной и поперечной волн соответственно. Это уравнение хорошо изучено. При фиксированном значении частоты оно имеет конечное число вещественных и чисто мнимых корней и бесконечное – комплексных [4].

В настоящей работе для решения поставленной граничной задачи использовался метод однородных решений. В его основе лежит представление волнового поля в виде ряда по системе нормальных волн, каждая из которых удовлетворяет условию отсутствия напряжений на боковых поверхностях полуслоя. Таким образом, общее решение граничной задачи (1), (2) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(0)}(\xi_1, y) e^{-i\xi_1 z} &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sigma_{zz}(\xi_j, y) e^{i\xi_j z}, \\ \tau_{zy}^{(0)}(\xi_1, y) e^{-i\xi_1 z} &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j \tau_{zy}(\xi_j, y) e^{i\xi_j z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\xi_1$  – первый действительный корень дисперсионного уравнения (4);  $C_j$  и  $\xi_j$  – соответственно комплексные амплитуды и волновые числа всех нормальных волн, которые могут существовать на данной частоте.

Решив систему функциональных уравнений (5), получим значения коэффициентов  $C_j$  и точное удовлетворение граничных условий на торце. Основная трудность при практическом ее решении связана с алгебраизацией краевой задачи. Поскольку в упругих волноводах нормальные волны образуют неортогональную систему функций, а сами эти функции и соответствующие им собственные значения комплексны, то на поверхности  $z=0$  необходимо разлагать  $\sigma_{zz}^{(0)}(\xi_1, y)$  и  $\tau_{zy}^{(0)}(\xi_1, y)$  по неортогональной системе частных решений  $\sigma_{zz}(\xi_j, y)$  и  $\tau_{zy}(\xi_j, y)$ . К настоящему времени методы точного решения таких функциональных урав-

нений не разработаны. Тем не менее, существует ряд приемов, позволяющих получить из соотношений (5) бесконечные системы алгебраических уравнений для определения  $C_j$ . В рамках метода однородных решений – это способ коллокаций [18, 23], метод наименьших квадратов [18], вариационные подходы для удовлетворения граничных условий [6, 8, 10]. Кроме них, необходимо отметить методики, основанные на использовании условия обобщенной ортогональности. Независимо от способа реализации метода однородных решений, бесконечная система алгебраических уравнений решается методом редукции.

В нашей работе использовался способ коллокаций, при котором для перехода от функциональных уравнений к алгебраическим граничные условия (2) удовлетворяются в некотором числе точек  $N$ . Общее количество точек равно количеству нормальных мод, которые учитываются для удовлетворения граничных условий на торце. В методе коллокаций используются все действительный и чисто мнимые корни, а также ограниченное количество пар комплексных корней дисперсионного уравнения (4), которые могут существовать на частоте заданной нагрузки. Нормальные моды с комплексными волновыми числами учитываются парами ( $\pm \text{Re } \xi + i \text{Im } \xi$ ), что позволяет организовать в отраженном поле стоячую волну, которая затухает по амплитуде, но энергию в дальнее поле не переносит. Для выбранной системы координат использовались корни дисперсионного уравнения (4) с положительной мнимой частью. Точки коллокаций, в которых точно удовлетворяются граничные условия, располагались по поверхности  $z=0$  равномерно. При этом точки коллокаций для нормального и касательного напряжений не совпадали, а чередовались. Последнее требование весьма существенно, так как без этого может наблюдаться падение точности выполнения граничных условий при увеличении числа точек.

Общее количество точек коллокаций выбиралось, исходя из требуемого качества выполнения граничных условий на торце. Точность решения задачи характеризовалась невязкой  $\epsilon$ , которая определялась в ряде точек, не совпадающих с точками коллокаций, согласно соотношению

$$\epsilon_1 = \left( \sigma_{zz}^0 - \sum_{j=1}^N C_j \sigma_{zy}(\xi_j, y_k) \right)^2 + \left( \tau_{zy}^0 - \sum_{j=1}^N C_j \tau_{zy}(\xi_j, y_k) \right)^2,$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\sigma_{zz}^0}} \times 100 \text{ \%}.$$

Таблица. Модули комплексных амплитуд первых двух распространяющихся нормальных волн для  $\nu=0.3$

$\Omega_2$	суперпозиция		однородн. решения	
	$ C_1 $	$ C_2 $	$ C_1 $	$ C_2 $
1.6	0.55799	0.21997	0.55796	0.21999
1.8	0.061710	0.43488	0.061701	0.43491
2.0	0.15488	0.49736	0.15492	0.49739
2.2	0.30446	0.52425	0.30465	0.52426
2.4	0.42502	0.53363	0.42517	0.53361
2.6	0.52959	0.53122	0.52932	0.53115
2.8	0.62333	0.51818	0.62334	0.51803
3.0	0.71338	0.49233	0.71321	0.49220
3.2	0.79945	0.44809	0.79933	0.44807
3.4	0.88158	0.37627	0.88147	0.37530
3.6	0.95255	0.26008	0.95256	0.25995
3.8	0.99559	0.08316	0.99577	0.08326
4.0	0.99051	0.13189	0.99058	0.13174
4.2	0.96704	0.25431	0.96687	0.25661
4.4	0.99799	0.06399	0.99801	0.06433
4.6	0.98073	0.19459	0.98112	0.19526
4.7	0.96370	0.26387	0.96390	0.26382

При учете двадцати пар комплексных корней погрешность удовлетворения граничных условий по напряжениям на торце полуслоя не превышала 0.5 % напряжения в падающей волне. Дополнительным критерием правильности полученных результатов был контроль за точностью удовлетворения закона сохранения энергии. Эта погрешность не превышала 0.02 % энергии падающей волны.

В работе [25] задача от отражении первой нормальной волны от свободного торца полуслоя со свободными боковыми поверхностями была решена методом суперпозиции. Решение граничной задачи, полученное в рамках этого метода, было представлено через комплексные амплитуды нормальных волн  $C_j$ .

В таблице приведены модули комплексных амплитуд первой ( $C_1$ ) и второй ( $C_2$ ) распространяющихся нормальных волн для коэффициента Пуассона  $\nu=0.3$ , полученные двумя различными методами – однородных решений и суперпозиции. Здесь и далее количественные характеристики волновых полей нормированы на амплитуду падающей волны. Видно, что для данной задачи в рассмотренном частотном диапазоне оба метода дают практически одинаковые (с точностью до трех знаков после запятой) значения амплитуд распространяющихся нормальных мод.

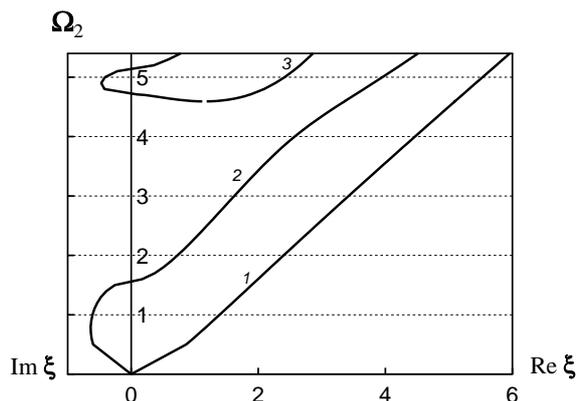


Рис. 2. Действительные и чисто мнимые участки спектра для антисимметричных колебаний полуслоя при  $\nu=0.2$

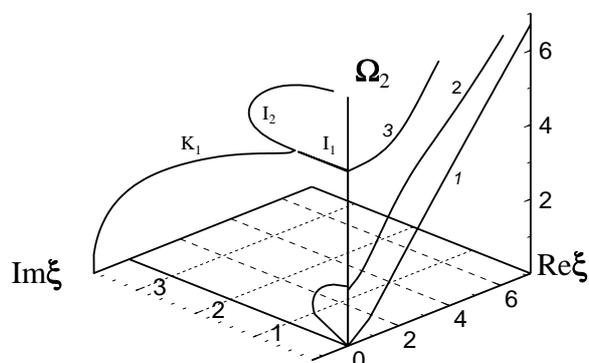


Рис. 3. Дисперсионные кривые для антисимметричных колебаний полуслоя при  $\nu=0.36$

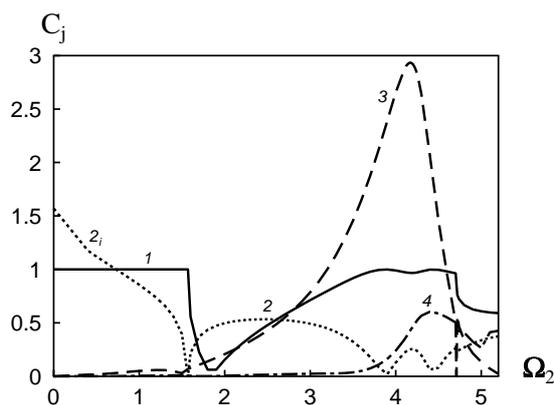


Рис. 4. Частотные зависимости модулей амплитуд нормальных волн в отраженном поле при  $\nu=0.3$

## 2. ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ

Прежде чем перейти к дальнейшему анализу результатов решения поставленной граничной задачи для различных значений частоты и коэффициента Пуассона, кратко остановимся на особенностях кривых, входящих в дисперсионный спектр при антисимметричных колебаниях полуслоя.

Отметим, что численные значения (до четырех цифр после запятой) действительных, чисто мнимых и первой пары комплексных корней дисперсионного уравнения (4) для коэффициента Пуассона  $\nu=0.3$  можно найти в работе [26]. Качественный анализ дисперсионного уравнения для симметричных колебаний содержится в монографии [4]. Представляет интерес проведение аналогичного анализа для антисимметричных колебаний. Рассмотрим некоторые особенности дисперсионного спектра в диапазоне частот  $\Omega_2$  от 0 до 5 для разных значений коэффициента Пуассона.

Структура действительных и чисто мнимых участков спектра для антисимметричных колебаний полуслоя с коэффициентом Пуассона  $\nu=0.2$  представлена на рис. 2. Здесь и далее номера кривых соответствуют номерам нормальных мод. Для данного коэффициента Пуассона первый комплексный корень дисперсионного уравнения вырождается в действительный в точке относительного минимума третьей дисперсионной ветви. Вблизи этой точки действительная ветвь опускается ниже частоты запираания и появляется участок спектра с отрицательной кривизной, описывающий “обратную” волну. Минимальное значение частоты, при котором еще существует распространяющаяся мода, является частотным минимумом и обозначается через  $\Omega_2^*$ . Оно, как и величина участка с отрицательной кривизной, существенным образом зависит от коэффициента Пуассона.

В отличие от симметричных колебаний, в данном случае первый комплексный корень переходит с ростом частоты в действительный не для всех коэффициентов Пуассона. Например, для коэффициентов Пуассона  $\nu > 0.32$  этот корень вырождается в чисто мнимый. На рис. 3 представлена именно такая ситуация (здесь  $\nu=0.36$ ).

Как будет показано в дальнейшем, такое качественное изменение поведения первого комплексного корня дисперсионного уравнения (4) с ростом коэффициента Пуассона обуславливает существенное изменение в характере возбуждения неоднородных волн при отражении падающей нормальной волны от торца волновода.

### 3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Перейдем к анализу численных результатов, характеризующих волновое поле при антисимметричных колебаниях полуслоя. Основное внимание будет уделено степени возбуждения неоднородных волн в зависимости от частоты и коэффициента Пуассона при отражении от свободного торца первой распространяющейся волны.

На рис. 4 представлены частотные зависимости модулей амплитуд нормальных волн в отраженном поле для коэффициента Пуассона  $\nu=0.3$ . Кривые 1 и 2 соответствуют первой и второй распространяющимся волнам, а кривые 3 и 4 – модам с первым и вторым комплексными волновыми числами. Часть кривой 2, обозначенная как  $2_i$ , соответствует участку существования этой моды в качестве неоднородной волны с чисто мнимым волновым числом. Как следует из графика, на частоте  $\Omega_2=4.17$  модуль амплитуды первой неоднородной волны (кривая 3) в 2.9 раза превышает амплитуду падающей волны и в 11 раз – амплитуду второй отраженной распространяющейся волны.

Еще одна характерная особенность зависимостей, представленных на рис. 4, – возрастание модуля амплитуды второй неоднородной волны на частоте  $\Omega_2=4.4$  (кривая 4). Хотя ее амплитуда меньше, чем у падающей или первой отраженной распространяющейся волны (см. кривую 1), однако она превышает амплитуду второй распространяющейся отраженной волны (см. кривую 2). Важная особенность возбуждения неоднородных волн в случае антисимметричных колебаний полуслоя состоит в том, что их амплитуды достигают максимума на разных, хотя и близких частотах.

Как известно, анализируя резонансную ситуацию, необходимо следить не только за ростом  $|C_j|$ , но и за изменением фазовых характеристик. Однако на частоте, для которой модуль амплитуды первой неоднородной волны достигает максимума, ее фаза не меняет знак. Поэтому в данном случае можно говорить только о существенном увеличении модуля амплитуды неоднородной волны, но не о существовании резонансной ситуации.

Отметим, что между частотами  $\Omega_2=4.18$  и  $4.19$  изменяет знак мнимая часть комплексной амплитуды первой отраженной распространяющейся волны, а в диапазоне  $4.19 \leq \Omega_2 \leq 4.20$  перемена знака происходит у действительной части комплексной амплитуды второй отраженной распространяющейся волны. Таким образом, частоты, на которых равны нулю фазы амплитуд распространяющихся волн, близки, однако различны и не сов-

падают с частотой, на которой амплитуда неоднородной волны имеет локальный максимум.

Следует обратить внимание на то, что указанные частоты близки к частотам максимального возбуждения неоднородных волн (см. рис. 4). На первый взгляд это выглядит несколько необычно, поскольку сам факт отражения нормальной волны с изменением фазы как бы приближает рассматриваемую ситуацию к случаю классического отражения нормальной волны от торца акустического волновода. Однако для упругого волновода изменение фазы отраженной волны приводит к выполнению граничного условия по одной из компонент тензора напряжений и удвоению невязки по другой. Именно для одновременного выполнения обоих граничных условий и необходимо интенсивное возбуждение неоднородных волн.

Соотношение между сдвиговыми и продольными компонентами в нормальной волне существенно зависит от коэффициента Пуассона. Поэтому целесообразно продолжить изучение количественных оценок степени возбуждения неоднородных волн в зависимости от его значения. На рис. 5 показаны частотные зависимости модуля амплитуды неоднородной волны, соответствующей первому комплексному волновому числу дисперсионного уравнения (4), для различных значений коэффициента Пуассона. Как видно из графика, кривые 1 и 2 имеют только по одному максимуму амплитуды первой неоднородной волны. При этом с ростом  $\nu$  частота, на которой наблюдается максимум, увеличивается. Одновременно незначительно возрастает максимальная величина амплитуды неоднородной волны и сужается частотный диапазон, в котором наблюдается ее эффективное возбуждение.

Для коэффициента Пуассона  $\nu=0.1$  неоднородная волна, соответствующая первому комплексному корню, становится бегущей на частоте  $\Omega_2=4.419$ . Выше нее в отраженном поле не существует неоднородной волны, соответствующей первому комплексному корню, зато появляются “обратная” волна и третья распространяющаяся мода. Для коэффициента Пуассона  $\nu=0.2$  для неоднородной волны, соответствующей первому комплексному корню, он вырождается в действительный на частоте  $\Omega_2=4.592$ .

Для коэффициента Пуассона  $\nu=0.36$  (кривая 3) ситуация меняется – частотная зависимость имеет два максимума. Первый локальный максимум наблюдается на частоте  $\Omega_2=4.26$ , а фаза не меняет знак при ее прохождении. При дальнейшем увеличении частоты амплитуда неоднородной волны вначале уменьшается, а потом вновь начинает ра-

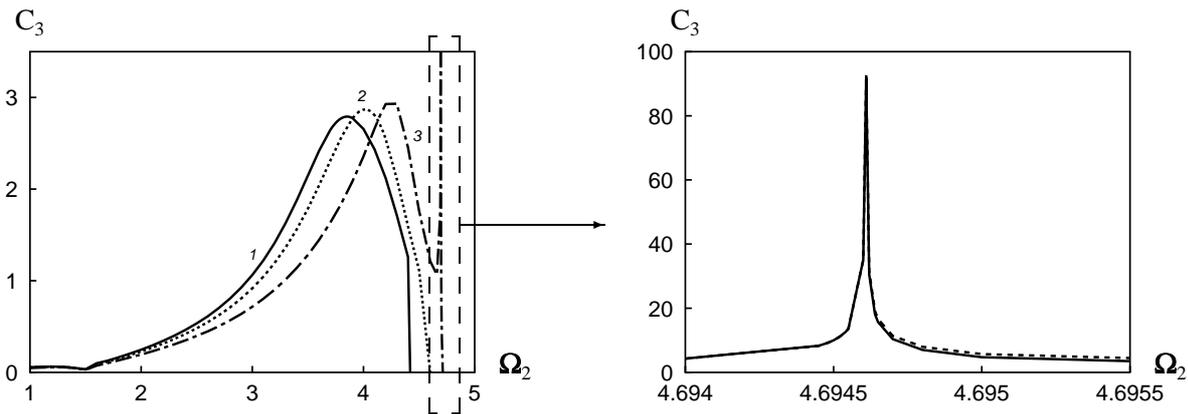


Рис. 5. Частотные зависимости модуля амплитуды неоднородной волны, соответствующей первому комплексному волновому числу:  
 1 -  $\nu=0.1$ ; 2 -  $\nu=0.2$ ; 3 -  $\nu=0.36$

сти, формируя второй пик, существенно превышающий первый.

На правом графике рис. 5 показан фрагмент кривой 3 с более мелким шагом по частоте. При  $\Omega_2 = 4.695$  модуль амплитуды неоднородной волны, соответствующей первому комплексному корню, достигает максимума. Здесь же для  $\nu = 0.36$  первый комплексный корень дисперсионного уравнения (4) вырождается в чисто мнимый в точке относительного минимума ветви  $\Omega_2 = f(\text{Im } \xi)$  (см. рис. 3, где кривая  $K_1$ , описывающая изменение комплексного корня с частотой, пересекает плоскость  $(\text{Im } \xi, \Omega_2)$  на частоте  $\Omega_2 = 4.695$ ). При дальнейшем росте частоты волновые числа двух появившихся неоднородных волн становятся чисто мнимыми (на рис. 3 они обозначены  $I_1$ , и  $I_2$ ). На правом графике рис. 5 кривая, соответствующая ветви  $I_1$ , показана сплошной кривой, а ветви  $I_2$  – штриховой.

Важная особенность частотных зависимостей комплексных амплитуд неоднородных волн, соответствующих первой паре комплексных корней, – изменение знака фазовых характеристик амплитуд при прохождении частоты максимума их модулей  $\Omega_2 = 4.695$ . При решении граничной задачи (2) комплексные корни образуют пары  $(\pm \text{Re } \xi + i \text{Im } \xi)$ , что позволяет формировать вблизи торца стоячую волну с убывающей амплитудой. Такие волны не переносят энергию вдоль волновода за период колебания. Фазы комплексных амплитуд обеих распространяющихся волн при переходе через данную частоту знак не изменяют.

В отличие от краевого резонанса на неоднородных волнах для симметричных колебаний, при антисимметричных колебаниях на частоте макси-

муму амплитуды первой неоднородной волны нормальные волны с волновыми числами, соответствующими комплексным корням высших порядков, максимумов не имеют.

Резонанс на неоднородных волнах при антисимметричных колебаниях полуслоя имеет место на частоте, на которой существуют две распространяющиеся волны. Поэтому механизм радиационного демпфирования, обуславливающий конечность амплитуд неоднородных волн, в данном случае более сложен – приносимая падающей волной энергия может перераспределяться между двумя бегущими волнами.

Рассмотрим распределение энергии падающей первой нормальной моды между двумя отраженными распространяющимися волнами. Средний за период поток мощности, уносимый ими, определяется соотношением

$$E = \sum_{j=1}^2 E_j, \quad E_j = \mu\omega \frac{\Omega_2^2}{2} |C_j|^2 \Delta'(\xi_j). \quad (6)$$

На рис. 6 представлено распределение среднего за период потока мощности падающей волны между распространяющимися волнами для  $\nu = 0.36$ . Сам поток мощности нормирован на мощность падающей волны. В диапазоне значительного возбуждения неоднородных волн как для первого локального максимума при  $\Omega_2 = 4.25$ , так и для второго при  $\Omega_2 = 4.695$  первая отраженная распространяющаяся волна переносит основную часть энергии, поступающей в полуслой (96.4 и 94.3 % соответственно). Вторая распространяющаяся мода возбуждается слабо, однако существует на обоих указанных частотах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано существование резонанса на неоднородных волнах при антисимметричных колебаниях полуслоя. Он проявляется в резком увеличении амплитудных характеристик и изменении фазовых неоднородной волны, соответствующей первому комплексному корню дисперсионного уравнения. Важная особенность резонанса на неоднородных волнах при антисимметричных колебаниях состоит в том, что резонансная ситуация наблюдается не для всех коэффициентов Пуассона. Частота резонанса совпадает с частотой, на которой первый комплексный корень дисперсионного уравнения вырождается в чисто мнимый. Характерной особенностью дисперсионного спектра при антисимметричных колебаниях является то, что первый комплексный корень может вырождаться как в действительный (для  $\nu \leq 3.2$ ), так и в чисто мнимый. Для тех коэффициентов Пуассона, при которых первый комплексный корень вырождается в действительный, резонанса на неоднородных волнах не наблюдается. Амплитуда неоднородной волны с волновым числом, равным первому комплексному корню дисперсионного уравнения, имеет локальный максимум без смены фазы.

В отличие от краевого резонанса на неоднородных волнах при симметричных колебаниях полуслоя, при антисимметричных колебаниях резонанс наблюдается только на одной неоднородной волне. Локальные максимумы амплитуд неоднородных волн с волновыми числами, равными комплексным корням дисперсионного уравнения высших порядков, наблюдаются на различных частотах. На резонансной частоте неоднородные волны высших порядков возбуждаются слабо, их амплитуды не имеют максимума, а фазы не изменяют знак.

Резонанс на неоднородных волнах существует в области частот, где две нормальные волны являются распространяющимися. При этом наиболее энергетически выражена первая отраженная распространяющаяся волна. Вторая распространяющаяся волна на резонансной частоте возбуждается слабо и переносит до 5 % энергии падающей волны. На резонансной частоте фазы обеих распространяющихся волн знаки не изменяют.

1. Shaw E. A. G. On the resonant vibration of thin barium titanate disks // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– 20, N 1.– С. 38–50.
2. Oliver J. Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique // J. Acoust. Soc. Amer.– 1957.– 29, N 2.– С. 189–194.

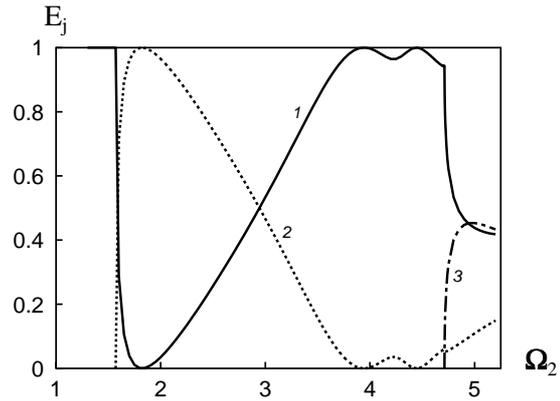


Рис. 6. Распределение среднего за период потока мощности падающей волны между распространяющимися волнами ( $\nu=0.36$ )

3. Gazis D. C., Mindlin R. D. Extensional vibration and waves in a circular disk and semi-infinite plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 1960.– 27, N 3.– С. 541–547.
4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. О резонансе в полубесконечной упругой полосе // Прикл. мех.– 1980.– 16, N 2.– С. 58–63.
6. Auld B. A., Tsao E. J. A variational analysis of edge resonance in semi-infinite plate // IEEE Trans. SU.– 1977.– 24, N 5.– С. 317–326.
7. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. Free localized vibration of semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Amer.– 2000.– 107, N 3.– С. 1383–1393.
8. Torvic P. J. Reflection of wave trains in semiinfinite plates // J. Acoust. Soc. Amer.– 1967.– 41, N 2.– С. 346–353.
9. Roitberg J., Vassiliev D., Wilde M. V. Edge resonance in an elastic semi-strip // Q. J. Mech. Appl. Math.– 1998.– 51.– С. 1–13.
10. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer.– 1972.– 51, N 1, Pt. 2.– С. 265–283.
11. Onoe M. Frequency of edge mode of isotropic thin rectangular plate, circular disk and rod // J. Acoust. Soc. Amer.– 1961.– 33, N 11.– С. 1627.
12. Le Clezio E., Predoi M. V., Castaings M., Hoster B., Rousseau M. Numerical predictions and experiments on the free-plate edge mode // Ultrasonics.– 2003.– 41.– С. 25–40.
13. Городецкая Н. С. Еще раз о краевом резонансе // Акуст. вісн.– 2000.– 3, N 4.– С. 35–44.
14. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Анализ физических особенностей явления краевого резонанса в упругих телах // Акуст. вісн.– 2004.– 7, N 1.– С. 30–43.
15. Zernov V., Pichugin A. V., Kaplunov J. Eigenvalue of semi-infinite elastic strip // Proc. Roy. Soc. Lond.– 2006.– A462.– С. 1255–1270.
16. Pagneux V. Revisiting the edge resonance for Lamb waves in semi-infinite plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 2006.– 120, N 2.– С. 649–656.

17. *Wilkie-Chancellier N., Duffo H., Tinel A., Duclon J.* Numerical description of the edgemode at the beveled extremity of a plate // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2005.– **117**, N 1.– С. 194–199.
18. *Гомилко А. М., Городецкая Н. С.* Отражение волн Рэлея–Лэмба от криволинейного торца волновода // *Прикл. мех.*– 1997.– **33**, N 10.– С. 78–82.
19. *Dilligent O., Lowe M. J.S., Le Clesio E., Castings M., Hoster B.* Prediction and measurement of nonpropagating Lamb modes at the free end of a plate when the fundamental antisymmetric mode  $A_0$  is incident // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2003.– **113**, N 6.– С. 3032–3042.
20. *Cho Y. H., Rose J. L.* A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1996.– **99**, N 4, Pt. 1.– С. 2097–2109.
21. *Ribay G., Catheline S., Clorennec D., Ing R. K., Fink M.*  $A_0$  mode interaction with a plate free edge: Theory and experiment at a very low frequency by thickness product // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2007.– **122**, N 2.– С. 711–714.
22. *Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Мелешко В. В.* Краевой резонанс при вынужденных изгибных колебаниях полуполосы // *Акуст. ж.*– 1991.– **37**, N 5.– С. 908–914.
23. *Гринченко В. Т., Городецкая Н. С.* Краевой резонанс при изгибных колебаниях полуполосы // *Докл. АН УССР. Сер.А.*– 1985.– N 4.– С. 20–23.
24. *Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Мелешко В. В.* Краевой резонанс при вынужденных изгибных колебаниях полуполосы // *Акуст. ж.*– 1991.– **37**, N 5.– С. 908–914.
25. *Городецкая Н. С., Гринченко В. Т., Старовойт И. В.* Особенности возбуждения нормальных волн при изгибных колебаниях полуполосы // *Акуст. вісн.*– 2007.– **10**, N 3.– С. 42–54.
26. *Potter D. S., Leedham C. D.* Normalized numerical solutions for Rayleigh's frequency equation // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1967.– **41**, N 1.– С. 143–153.