

УДК 539.3

АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛУСЛОЯ С ЗАЩЕМЛЕННЫМ ТОРЦОМ

В. Т. ГРИНЧЕНКО, Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ, И. В. СТАРОВОЙТ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 12.06.2009

С помощью метода суперпозиции решена граничная задача об антисимметричных колебаниях упругого полуслоя со свободными боковыми поверхностями и защемленным торцом. Рассмотрен процесс отражения первой и второй распространяющихся мод. Проанализированы особенности распределения вносимой в упругий полуслой энергии между различными распространяющимися модами. Показано, что в данном случае, в отличие от симметричных колебаний, значительной трансформации энергии падающей волны в моды высших порядков не происходит.

За допомогою методу суперпозиції розв'язано граничну задачу про антисиметричні коливання пружного півшару з вільними бічними поверхнями і затисненим торцем. Розглянуто процес відбиття першої та другої мод, які поширюються. Проаналізовано особливості розподілу енергії, що вноситься у пружний півшар, між різними нормальними хвилями, які поширюються. Показано, що у даному випадку, на відміну від симетричних коливань, значної трансформації енергії падаючої хвилі у моди вищих порядків не відбувається.

The problem on antisymmetric vibrations of elastic half-layer with free lateral surfaces and fixed edge has been solved by a superposition method. The process of reflection of the first and second propagating normal waves has been considered. It has been analyzed how does the energy brought in the elastic half-layer distributes between various propagating modes. It was shown, that in this case, as opposed to the symmetric vibrations, there is no significant energy transformation from the incident wave to modes of higher orders.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ распространения волн в упругих телах конечных размеров позволил установить существование ряда специфических явлений, не имеющих аналогов в акустике и электродинамике. Особенности волновых эффектов в упругих телах обусловлены существованием двух типов волн и их взаимодействием на границе. Одним из наиболее простых и хорошо известных волновых движений, обусловленных взаимодействием двух типов волн на границе, является поверхностная волна Рэлея, которая распространяется вдоль свободной бесконечной границы упругого полупространства и затухает в глубину.

В пространственно ограниченных упругих телах волновая картина значительно усложняется за счет наличия конечного участка границы. Также могут появляться угловые точки в пересечении гладких частей границы, что ведет к существенному усложнению структуры волнового поля. Кроме того, сложность решения граничной задачи в значительной мере зависит от типа условий, принимаемых на разных частях границы упругого тела. Наиболее простыми оказываются задачи, связанные с одновременным заданием на одной части границы нормальной (касательной) компоненты смещения и касательной (нормальной) составляющей тензора напряжений, а на другой – обеих компонент смещения или напряжения. Граничные за-

дачи, в которых на всех участках границы одновременно заданы напряжения (смещения), значительно более сложны, однако на сегодняшний день методы их решения достаточно хорошо разработаны. Задачи со смешанными типами условий на стыках участков границ (две компоненты смещения и две компоненты напряжения) являются самыми трудными, поскольку в точках смены типа условий могут возникать локальные особенности поля, где наблюдается неограниченный рост определенных характеристик [1].

В целом при изучении волновых явлений в упругих телах конечных размеров следует выделить два момента. Первый из них связан с разработкой методов решения граничных задач для ограниченных тел, а второй – с анализом физических причин возникновения специфических волновых явлений в них.

В этой работе на примере рассмотрения задачи об антисимметричных колебаниях упругого полуслоя с защемленным торцом значительное внимание уделяется развитию метода суперпозиции для решения смешанных граничных задач. Кроме того, анализируются частотные зависимости энергетических характеристик волнового поля, возбуждаемого падающей нормальной волной. При этом особый акцент делается на структуре волнового поля и роли различных типов нормальных волн в его формировании.

Вначале кратко остановимся на анализе методов решения смешанных граничных задач теории упругости с угловыми точками. В настоящее время известно строгое решение ряда таких задач, прежде всего, для плоского клина с различными типами граничных условий на гранях и различными углами раствора [2]. На этих примерах показано, что напряженное состояние вблизи угловых точек – сложное, для него характерна быстрая изменчивость и наличие локальных интегрируемых особенностей. Как правило, при существовании локальных особенностей в характеристиках волновых полей возникает неоднозначность в решении граничной задачи, когда можно построить несколько решений, удовлетворяющих основным уравнениям задачи и отличающихся только скоростью стремления к бесконечности той или иной характеристики поля. В этом случае для построения единственного решения необходимо дополнительно выполнить условия на ребре, т.е. корректно определить характер особенности.

Вопрос об особенностях при гармонических процессах в упругих телах решается на основе анализа соответствующих статических граничных задач [3]. Решение последних в полярных координатах можно получить с использованием преобразования Меллина или на основе общего представления функции напряжения. Необходимо отметить, что исследования особенности, выполненные с помощью преобразования Меллина, относятся к прямым методам, в то время как локальные исследования путем построения местного решения – к полуобратным. Это следует из того, что в первом случае тип особенности следует из обратного преобразования Меллина для напряжений, а во втором – функции напряжений задаются в виде некоторого степенного ряда, показатели степени которого находят из условия существования нетривиального решения. Физически важным является требование конечности энергии деформации, накопленной в окрестности “подозрительных” на сингулярность точек границы.

Анализ результатов исследований особенностей в статических задачах теории упругости содержится в работах [4,5]. Кроме того, важен вывод о том, что эти особенности можно определить, рассматривая упругие поля в окрестности сингулярных точек, независимо от решения общей граничной задачи для области с углами, т.е. они, по-сути, заранее известны [6]. Знание характера особенности оказывается существенным при построении эффективных алгоритмов решения граничных задач для областей с угловыми точками.

В настоящее время предложен ряд подходов для

решения граничной задачи о симметричных колебаниях полуслоя со свободными боковыми поверхностями и заземленным торцом. Впервые граничная задача для полуполосы с заземленным торцом была рассмотрена Бенсемом [7], в работе которого особенность по напряжениям учитывалась путем введения отдельного члена в решении. Это приводило к переопределенности при нахождении напряжений и, следовательно, к плохой обусловленности системы уравнений. В дальнейшем эта задача изучалась в статье [8], где напряжение также представлялось в виде суммы бесконечного ряда по ортогональным функциям и отдельного члена, описывающего особенность, что не устраняло отмеченный недостаток.

Энергетическим аспектам отражения первой симметричной волны от заземленного торца волновода посвящена работа [9], в которой граничная задача решалась методом однородных решений без учета особенности по напряжениям в угловой точке. В рамках указанного метода на основе свойства обобщенной ортогональности в работах [10,11] были предложены способы учета особенности по напряжениям в точке смены типа граничных условий, однако анализ ближнего поля не проводился. В статье [12] при рассмотрении симметричных колебаний полуслоя с заземленным торцом использовался метод суперпозиции. Данный метод учитывает особенность по напряжениям, возникающую в точке смены типа граничных условий, и позволяет создать алгоритм расчета, адекватно описывающий особенности ближнего поля. При этом напряжения и смещения, найденные методом суперпозиций, могут быть представлены как разложение по нормальным модам. Это позволяет провести достаточно полный анализ волнового поля в ближней зоне.

В этой статье метод суперпозиции развивается для решения задачи о колебаниях полуграничного слоя со свободными боковыми поверхностями и заземленным торцом. Особое внимание уделяется анализу особенностей распределения энергии по распространяющимся модам при отражении нормальных волн от заземленного торца полуслоя при его антисимметричных колебаниях. При этом нашей главной задачей было выяснение физических причин, вызывающих перераспределение энергии, вносимой в волновод, между различными распространяющимися модами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскую задачу определения свойств волнового поля в изотропном полубеско-

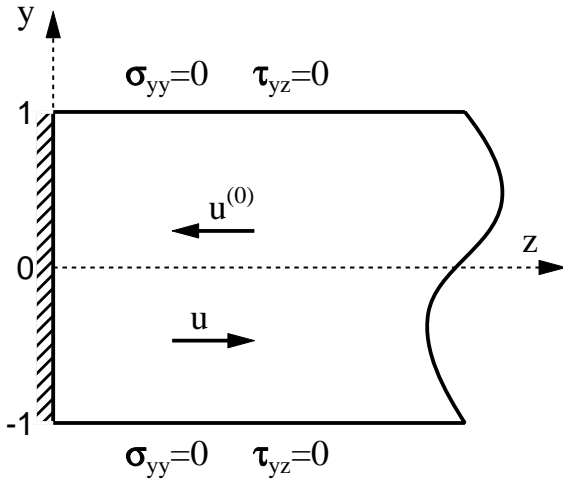


Рис. 1. Система координат и геометрия задачи

нечном упругом слое $|Z| \leq H, Z \geq 0, -\infty < Y < \infty$ (случай плоской деформации) с заданными физическими характеристиками: модулем сдвига μ , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Выбор системы координат геометрия области показаны на рис. 1. Волны предполагаются гармоническими с круговой частотой ω . Зависимость от времени кинематических и силовых характеристик поля задается множителем $e * -i\omega t$, который в последующих выкладках опускается. Частота ω считается положительной вещественной величиной. Рассматривается антисимметричное относительно плоскости $Y=0$ волновое поле. При построении решения вводятся безразмерные координаты соотношениями $y=Y/H, z=Z/H$.

Волновое поле в полуслое возбуждается при отражении от заземленного торца приходящих из бесконечности различных распространяющихся нормальных волн $\mathbf{u}^{(0)}(y, z)$, рис. 1. Для нахождения характеристик отраженных волн $\mathbf{u}^{(1)}(y, z)$ необходимо решить следующую граничную задачу для уравнений движения Ламе [3]:

$$\begin{aligned} u_z + u_z^{(0)} &= 0, & z = 0, & |y| \leq 1, \\ u_y + u_y^{(0)} &= 0, & z = 0, & |y| \leq 1, \\ \sigma_{yy} = \tau_{yz}(\pm 1, z) &= 0, & y = \pm 1, & z \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Индекс “0” соответствует падающей волне, смеще-

ния в которой задаются в виде

$$u_y^{(0)} = C^0 \xi \left(\alpha_2 \frac{\text{sh } \alpha_2 y}{\text{sh } \alpha_2} - \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2\alpha_1} \frac{\text{sh } \alpha_1 y}{\text{ch } \alpha_1} \right) e^{-i\xi z}, \quad (2)$$

$$u_z^{(0)} = C^0 i \left(\xi^2 \frac{\text{ch } \alpha_2 y}{\text{ch } \alpha_2} - \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2} \frac{\text{ch } \alpha_1 y}{\text{ch } \alpha_1} \right) e^{-i\xi z},$$

где ξ – постоянная распространения, равная действительному корню дисперсионного уравнения, которое для антисимметричных колебаний изотропного бесконечного слоя со свободными поверхностями записывается так:

$$\Delta(\xi) = \xi^2 \alpha_2 \text{th } \alpha_2 - (2\xi^2 - \Omega_2)^2 \frac{\text{th } \alpha_1}{4\alpha_1} = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\alpha_j = \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - \Omega_j^2}, & |\xi| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \xi^2}, & |\xi| < \Omega_j; \end{cases} \quad (4)$$

$\Omega_1 = \omega h/c_l; \Omega_2 = \omega h/c_s; c_l$ и c_s – скорости продольной и поперечной волн соответственно.

В дальнейшем количественные характеристики волновых полей будем нормировать на амплитуду падающей волны C^0 .

Дополнительно к граничным условиям (1) должны выполняться условия излучения, заключающиеся в том, что каждая распространяющаяся нормальная волна уносит энергию от торца полуслоя на бесконечность.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В данной статье применяем метод суперпозиции [3], в рамках которого строится решение граничной задачи для антисимметричных колебаний волновода. Следуя общей схеме метода [13], компоненты вектора смещений ($z \geq 0$) запишем в виде

$$\begin{aligned} u_y &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z} \right) \sin \beta_k y - \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_z(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \\ u_z &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z} \right) \cos \beta_k y + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_y(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

с неизвестными постоянными A_k, B_k ($k=1, 2, \dots$) и функцией $x(\tau)$. Кроме того, здесь положено

$$U_y(\tau, y) = \tau^2 \frac{\text{ch } p_2 y}{\text{ch } p_2} - \frac{(\tau^2 + p_2^2)}{2} \frac{\text{ch } p_1 y}{\text{ch } p_1};$$

$$U_z(\tau, y) = -\tau \left(p_2 \frac{\text{sh } p_2 y}{\text{ch } p_2} - \frac{(\tau^2 + p_2^2)}{2} \frac{\text{sh } p_1 y}{\text{ch } p_1} \right);$$

$$p_j = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & |\tau| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & |\tau| < \Omega_j; \end{cases}$$

$$q_j = \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & |\beta_k| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & |\beta_k| < \Omega_j; \end{cases}$$

$$\beta_k = \frac{2k-1}{2}\pi.$$

Представление (5) выбрано таким образом, чтобы условие отсутствия касательных напряжений на поверхностях $y = \pm 1$ выполнялось автоматически. Удовлетворение оставшихся граничных условий приводит к системе интегро-алгебраических уравнений относительно неизвестных $A_k, B_k, k=1, 2, \dots$ и функции $x(\tau)$:

$$x(\tau)\Delta(\tau) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{q_1(\beta_k^2 + \Omega_0^2)}{\tau^2 + q_1^2} + \beta_k \frac{q_2^2}{\tau^2 + q_2^2} \right) (-1)^k = 0,$$

$$A_k (-1)^k q_1 + B_k (-1)^k \beta_k =$$

$$= -\xi \left(\frac{2p_2^2}{p_2^2 + \beta_k^2} - \frac{\xi^2 + p_2^2}{p_1^2 + \beta_k^2} \right) \times$$

$$\times \left(A_k + B_k \frac{q_2}{\beta_k} \right) (-1)^k -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) a_k(\tau) d\tau = i a_k(\xi).$$

Здесь введены обозначения

$$a_k(\tau) = p_1^2(\tau) \left(\frac{2\tau^2}{\beta_k^2 + p_2^2(\tau)} - \frac{\tau^2 + p_2^2(\tau)}{\beta_k^2 + p_1^2(\tau)} \right);$$

$$2\Omega_0^2 = \Omega_2^2 - 2\Omega_1^2;$$

$\Delta(\tau) = 0$ – дисперсионное уравнение Рэлея–Лэмба, которое на действительной оси имеет конечное число корней $\pm \xi_j$ ($j=1, \dots, J$), значения которых и их количество J зависят от частоты ω .

В рассматриваемой граничной задаче необходимо удовлетворить граничные условия по смещениям (1), которые не имеют локальных особенностей в угловых точках, однако ряды по смещениям на граничной поверхности ($z=0, y=\pm 1$) при подходе к углу будут сходиться очень медленно и получить по ним достоверные результаты возможно только, если известно асимптотическое поведение неизвестных и функции $x(\tau)$. Анализ асимптотического поведения неизвестных в системе (6) основан на априорно известных свойствах напряжений вблизи угловых точек. В окрестности угла напряжения имеют степенную особенность, что позволяет записать выражение для напряжения в виде

$$\sigma_{zz}(\pm 1, z) = \frac{\sigma_1}{(1-y^2)^{1-\epsilon}} + \psi_1(y),$$

$$\sigma_{yy}(\pm 1, z) = \frac{\sigma_2}{(1-y^2)^{1-\epsilon}} + \psi_2(y).$$

Здесь $\psi_1(y); \psi_2(y)$ – некие гладкие функции.

Отметим, что асимптотика для неизвестных A_k, B_k ($k \geq N$) может быть представлена через выражения для обоих нормальных напряжений σ_{zz} и σ_{yy} , как в данной случае, или через разложения для нормального и касательного напряжений, как в [12, 14]. Это говорит о том, что форма представления для асимптотики неизвестных не будет однозначной. Неоднозначность представления асимптотики неизвестных не приводит к каким-либо трудностям при решении поставленной граничной задачи и не упрощает процедуру нахождения асимптотических свойств неизвестных. Естественно, что независимо от выбора формы представления для больших номеров A_k и B_k уравнение для определения показателя особенности сохраняет свою форму и совпадает с уравнением Дандерса [4].

Процедура нахождения асимптотики для неизвестных системы (6) аналогична описанной в работах [12, 14], поэтому здесь на ней останавливаться не будем. Приведем выражения для асимптотических значений неизвестных A_k, B_k и функции $x(\tau)$, полученные через слагаемые с особенностью в нормальных напряжениях (7):

$$\begin{aligned}
 A_k &= \frac{J_{\epsilon+0.5}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon-0.5}} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}, & R_3 &= \frac{\tau^2}{p_2^2} \left(\frac{1}{\Gamma(\epsilon + 0.5)2^{\epsilon+0.5}} - \frac{I_{\epsilon-0.5}(p_2)}{2p_2^{\epsilon-0.5} \operatorname{ch} p_2} \right) - \\
 B_k &= \frac{J_{\epsilon+0.5}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon-0.5}} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} + \frac{\sigma_1}{\beta_k^2} \right), & & - \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k J_{\epsilon-0.5}}{\beta_k^{\epsilon-0.5}} \frac{\tau^2}{\beta_k^2 + p_2^2}; \\
 x(\tau) &= \frac{\sqrt{2} \operatorname{cth} \frac{\pi \epsilon}{2} (\sigma_1(1 - \epsilon) + \sigma_2(1 + \epsilon))}{\sqrt{\pi} (\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \tau^{1+\epsilon}}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $J_\nu(x)$ – функция Бесселя ν -го порядка.

С учетом приведенных асимптотических выражений для неизвестных первое уравнение системы (6) принимает вид

$$\begin{aligned}
 x(\tau) \Delta(\tau) + 2 \sum_{k=1}^N \left(A_k \frac{q_1(\beta_k^2 + \Omega_0^2)}{\tau^2 + q_1^2} + \right. \\
 \left. + \beta_k \frac{q_2^2}{\tau^2 + q_2^2} \right) (-1)^k + S_N(\tau) = 0, \\
 S_N(\tau) = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi \epsilon}{2}}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)(\Omega_1^2 R_1 - 2R_2) + \right. \\
 \left. + 2\sigma_1(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)(-R_1 + R_3) \right].
 \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{1}{\Gamma(\epsilon + 0.5)2^{\epsilon+0.5}} + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k J_{\epsilon-0.5}}{\beta_k^{\epsilon+0.5}}; \\
 R_2 &= \tau^2 \frac{I_{\epsilon-0.5}(p_2)}{2p_2^{\epsilon-0.5} \operatorname{ch} p_2} - \left(\tau^2 - \frac{\Omega_2^2}{2} \right) \times \\
 &\times \frac{I_{\epsilon-0.5}(p_1)}{2p_1^{\epsilon-0.5} \operatorname{ch} p_1} + \frac{\Omega_1^2}{2} \frac{2\tau - \Omega_2^2}{2p_1^2} \times \\
 &\times \left(\frac{1}{\Gamma(\epsilon + 0.5)2^{\epsilon+0.5}} - \frac{I_{\epsilon-0.5}(p_1)}{2p_1^{\epsilon-0.5} \operatorname{ch} p_1} \right) + \\
 &+ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k J_{\epsilon-0.5}}{\beta_k^{\epsilon-0.5}} \left(\frac{\tau^2 \beta_k}{\beta_k^2 + p_2^2} - \right. \\
 &\left. - \frac{(2\tau^2 - \Omega_2^2)\beta_k}{2(\beta_k^2 + p_1^2)} + \frac{\Omega_1^2}{2} \frac{2\tau^2 - \Omega_2^2}{2\beta_k(\beta_k^2 + p_1^2)} \right);
 \end{aligned}$$

$I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя;
 $\Gamma(\epsilon)$ – гамма-функция.

Используя соотношения (8) и сохраняя в системе (6) только главные члены, получим систему однородных уравнений. Условие существования ненулевого решения для постоянных σ_1, σ_2 дает трансцендентное уравнение для ϵ :

$$\begin{aligned}
 (3 - 4\nu) \sin^2 \frac{\pi \epsilon}{2} + (\epsilon - 2(1 - \nu)) \times \\
 \times (\epsilon + 2(1 - \nu)) = 0,
 \end{aligned}$$

которое совпадает с уравнением для определения особенности по напряжениям для четвертьплоскости [4].

Знание асимптотических свойств неизвестных A_k, B_k позволяет использовать метод улучшенной редукции при решении системы интегро-алгебраических уравнений (6). Это, в свою очередь, дает возможность определить с наперед заданной точностью значения неизвестных, а следовательно, поля напряжений и перемещений.

Переход от интегро-алгебраических уравнений (6) к системе линейных алгебраических уравнений аналогичен проделанному в работе [12] и здесь на нем останавливаться не будем. Отметим только, что для замыкания системы из $2K$ уравнений с $2K+2$ неизвестными A_k, B_k ($k=1, 2, \dots, 2K$), σ_1, σ_2 существует ряд подходов. Например, в качестве еще двух уравнений можно использовать асимптотические значения неизвестных в виде (8) или соотношения $u_z(\pm 1, 0) + u_z^{(0)}(\pm 1, 0) = 0, u_y(\pm 1, 0) + u_y^{(0)}(\pm 1, 0) = 0$. В этой работе для замыкания системы использовались соотношения (8). Для подтверждения достоверности полученного решения проверялась точность удовлетворения граничных условий на защемленной поверхности $z=0, y=\pm 1$.

С учетом асимптотических свойств неизвестных (8) выражение для смещений на торце может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 u_y = & \sum_{k=1}^N (A_k \beta_k + B_k q_2) \cos \beta_k y + \\
 & + \frac{\Omega_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2) + 2\sigma_1 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)}{2(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \times \\
 & \times \left(\frac{(1 - y^2)^\epsilon}{\sqrt{\pi} \epsilon \Gamma(\epsilon) 2^{\epsilon+0.5}} - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{k=1}^N \frac{J_{\epsilon+0.5}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon+0.5}} \cos \beta_k y \right) - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^N 2(-1)^k A_k q_1 (\beta_k^2 + \Omega_0^2) \times \right. \\
 & \times \left(\int_0^T \frac{U_y(\tau, y)}{\Delta(\tau)(\tau^2 + q_1^2)} d\tau + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^N 2(-1)^k B_k \beta_k q_2^2 \int_0^T \frac{U_y(\tau, y)}{\Delta(\tau)(\tau^2 + q_2^2)} d\tau + \\
 & \quad \left. + \int_0^T \frac{U_y(\tau, y) S_N(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau \right) + \\
 & + \frac{\text{ctg} \frac{\pi \epsilon}{2}}{\sqrt{2\pi}} ((1 + \epsilon)(\sigma_1 - \sigma_2) - 2\sigma_1) \times \\
 & \quad \times ((1 - y)^\epsilon \Gamma(1 - \epsilon, T(1 - y)) + \\
 & \quad \left. + (1 + y)^\epsilon \Gamma(1 - \epsilon, T(1 + y))) \right], \\
 u_z = & - \sum_{k=1}^N (A_k q_1 + B_k \beta_k) \sin \beta_k y - \\
 & - \frac{2\sigma_1 (\Omega_1^2 - 2\Omega_2^2) + \Omega_1^2 \sigma_2}{2(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \times \\
 & \times \text{ctg} \frac{\pi \epsilon}{2} \left(\frac{y(1 - y^2)^\epsilon}{\sqrt{\pi} \epsilon \Gamma(\epsilon) 2^{\epsilon+0.5}} - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{k=1}^N \frac{J_{\epsilon+1.5}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon+0.5}} \sin \beta_k y \right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\Gamma(\epsilon, T)$ – неполная гамма-функция.

В таблице приведены данные о значениях компонент смещения в различных точках на торце полуслоя при учете 20 неизвестных в рядах для частоты $\Omega_2 = 1.1$. Для неизвестных с номерами $k \geq 20$ использовались асимптотические зависимости (8). При выполнении расчетов верхняя граница в ин-

теграле принималась равной $T = 150$, а для больших значений τ использовались асимптотические зависимости. Для компоненты u_y в таблице приведены значения мнимых и действительных частей. Максимальная ошибка обусловлена именно действительными ее величинами. В падающей волне смещение u_y – чисто мнимое, а u_z – действительное. Рассчитанные мнимые части данной компоненты смещения в отраженном поле не приведены ввиду их малости (не более 10^{-8}). В последнем столбце таблицы для примера приведены величины $u_z^{(1)}$, полученные без учета асимптотических свойств неизвестных методом простой редукции.

Сравнение смещений в падающей волне и в отраженном поле показывает, что точность удовлетворения граничных условий на торце падает при приближении к угловой точке $z=0$, $y=\pm 1$, однако величина погрешности удовлетворения граничных условий в наихудшем случае не превышает 4.3 % от соответствующей компоненты падающей волны. Сравнение смещений, полученных при учете асимптотических свойств неизвестных и методом простой редукции, показывает, что в данной граничной задаче учет асимптотических свойств неизвестных лишь незначительно улучшает точность удовлетворения граничных условий. Тем не менее, для получения локальных характеристик поля (речь идет о напряжении на торцевой поверхности), асимптотические свойства неизвестных необходимо учитывать. При использовании метода простой редукции адекватно описать поле напряжений не удастся.

Используя значения неизвестных, полученные в рамках метода суперпозиции с учетом особенности по напряжениям в угловой точке, можно по аналогии с [12] определить коэффициент возбуждения j -ой нормальной волны:

$$\begin{aligned}
 C_j = & \left[\sum_{k=1}^N (-1)^k 2 \left(A_k \frac{(\beta_k^2 + \Omega_0^2) q_1}{\xi_j^2 + q_1^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + B_k \frac{\beta_k q_2^2}{\xi_j^2 + q_2^2} \right) + S_N(\tau) \right] \frac{1}{\Delta'(\xi_j)}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Важной характеристикой волновых процессов является трансформация энергии падающей волны в нормальные отраженные волны. Средний за период поток мощности, уносимый распространяющимися волнами, будет

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{j=1}^J W_j, \\
 W_j = & \mu \omega \frac{\Omega_2^2}{2} |C_j|^2 \Delta'(\xi_j) \Delta'(\xi_j).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Таблица. Компоненты смещения торца полуслоя при учете 20 неизвестных в рядах ($\Omega_2 = 1.1$)

y	$u_y^{(0)}$	$\text{Im}(u_y)$	$\text{Re}(u_y)$	$u_z^{(0)}$	u_z	$u_z^{(1)}$
0.02	0.6751	0.6751	$0.1415 \cdot 10^{-3}$	$0.4011 \cdot 10^{-2}$	$0.4011 \cdot 10^{-2}$	$0.3799 \cdot 10^{-2}$
0.1	0.6749	0.6750	$0.4645 \cdot 10^{-3}$	$0.2023 \cdot 10^{-1}$	$0.2023 \cdot 10^{-1}$	$0.2023 \cdot 10^{-1}$
0.2	0.6743	0.6745	$0.4824 \cdot 10^{-3}$	$0.4159 \cdot 10^{-1}$	$0.4159 \cdot 10^{-1}$	$0.4159 \cdot 10^{-1}$
0.3	0.6732	0.6733	$0.5149 \cdot 10^{-3}$	$0.6524 \cdot 10^{-1}$	$0.6524 \cdot 10^{-1}$	$0.6523 \cdot 10^{-1}$
0.4	0.6711	0.6713	$0.5668 \cdot 10^{-3}$	$0.9238 \cdot 10^{-1}$	$0.9237 \cdot 10^{-1}$	$0.9236 \cdot 10^{-1}$
0.5	0.6678	0.6679	$0.6482 \cdot 10^{-3}$	0.1242	0.1242	0.1242
0.6	0.6625	0.6627	$0.7789 \cdot 10^{-3}$	0.1624	0.1624	0.1623
0.7	0.6546	0.6549	$0.1006 \cdot 10^{-2}$	0.2082	0.2082	0.2081
0.8	0.6432	0.6436	$0.1469 \cdot 10^{-2}$	0.2635	0.2635	0.2634
0.9	0.6271	0.6278	$0.2781 \cdot 10^{-2}$	0.3303	0.3303	0.3299
0.92	0.6232	0.6233	$0.3960 \cdot 10^{-3}$	0.3452	0.3452	0.3436
0.94	0.6191	0.6179	$0.4458 \cdot 10^{-2}$	0.3606	0.3606	0.3602
0.96	0.6147	0.6133	$0.4681 \cdot 10^{-2}$	0.3767	0.3767	0.3792
0.98	0.6100	0.6111	$0.5869 \cdot 10^{-2}$	0.3933	0.3933	0.3953
1	0.6050	0.6110	$0.2631 \cdot 10^{-1}$	0.4106	0.4106	0.4017

Здесь J – число распространяющихся волн, которые могут существовать на данной частоте; W_j – поток мощности, переносимый j -ой волной. Выполнение закона сохранения энергии служит одним из критериев проверки правильности полученных результатов. Закон сохранения энергии при численных расчетах выполнялся с высокой точностью. Так, при учете только пяти членов ряда погрешность выполнения закона сохранения энергии при учете асимптотических свойств неизвестных составляла 0.1%, а при простой редукции системы – 0.26%. При увеличении числа членов ряда погрешность уменьшалась. Это еще раз подтверждает возможность расчета интегральных характеристик поля и характеристик дальнего поля без учета асимптотических свойств неизвестных.

3. АНАЛИЗ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ДАННЫХ

Переходя к анализу количественных данных, отметим, что мы рассматриваем диапазон частот, в котором может существовать три нормальные распространяющиеся волны. В него входит участок с “обратной” волной.

Прежде всего, остановимся на отражении от заземленного торца первой нормальной волны. Рассмотрим распределение энергии падающей волны между различными отраженными распространяющимися модами в зависимости от частоты Ω_2 . На рис. 2 приведены такие данные для среднего за период потока мощности E_j , переносимого j -ой распространяющейся отраженной волной, нор-

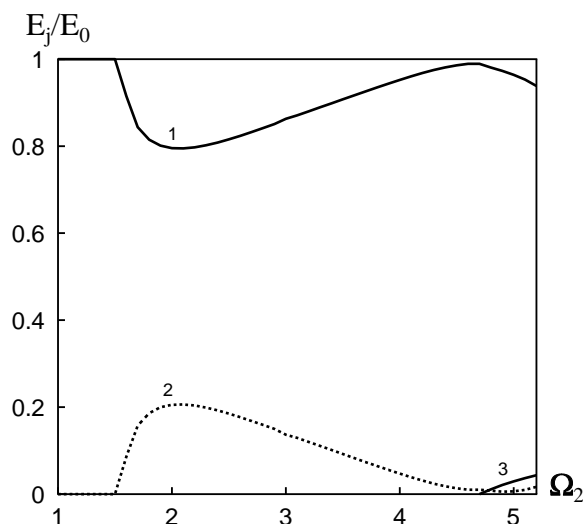


Рис. 2. Частотные зависимости среднего за период потока мощности для различных отраженных распространяющихся мод при падении на заземленный торец первой нормальной волны

мированного на на мощность падающей волны E_0 ($E_{0,j} = W_{0,j}/(\mu\omega)$). Номера кривых соответствуют номерам распространяющихся волн.

Отличительной особенностью отражения первой антисимметричной волны от заземленного торца является слабая трансформация энергии падающей волны в моды высших порядков. В диапазоне частот $0 < \Omega_2 \leq \pi/2$, где существует только одна распространяющаяся волна, вся подводимая

мая к торцу энергия уносится единственной отраженной распространяющейся волной. На частоте $\Omega_2 = \pi/2$ в отраженном поле появляется вторая распространяющаяся волна и переносимая первой отраженной волной энергия падает, достигая своего минимального значения – 79.4 % энергии падающей волны E_0 на частоте $\Omega_2 = 2.06$.

В отличие от отражения первой антисимметричной волны от свободного торца, в рассматриваемом случае первая отраженная волна остается наиболее энергетически выраженной и при дальнейшем увеличении частоты ее энергия возрастает. Вблизи частоты запираия для третьей нормальной волны первая отраженная волна переносит практически всю поступающую в полуслой энергию, т.е. существует частота, на которой в отраженном поле вторая мода практически вырождается. Как и при отражении первой антисимметричной волны от свободного торца [15], здесь “обратная волна” возбуждается слабо и переносит всего несколько процентов энергии падающей волны. Она существует в узком частотном диапазоне и на рис. 2 не представлена.

Начиная с частоты запираия для третьей моды, энергия первой отраженной волны падает, а энергия, которую переносит третья мода, увеличивается. Хотя моды высших порядков и проявляют частотную зависимость, однако они возбуждаются относительно слабо. Таким образом, при антисимметричной деформации полуслоя с заземленным торцом первая распространяющаяся волна во всем рассмотренном частотном диапазоне не теряет своего доминирующего значения и наблюдается лишь слабая трансформация энергии падающей волны в моды высших порядков.

Сравним процесс отражения первой антисимметричной волны при силовых и кинематических граничных условиях на торце, воспользовавшись данными работы [15], в которой приведены частотные зависимости переносимого распространяющимися модами среднего за период потока мощности при отражении первой антисимметричной волны от свободного торца полуслоя. Очевидно, что явление перекачки энергии падающей волны в отраженные моды высших порядков в упругом волноводе наблюдается всегда, независимо от типа граничных условий на торце. Как отмечалось в [15], этот эффект обусловлен тем, что в упругом волноводе невозможно выполнить граничные условия на торце только за счет наложения отраженной волны того же типа, что и падающая, но с измененной фазой. Если учитывать только падающую и одну отраженную волну, то для полуслоя со свободным торцом выполнение граничных

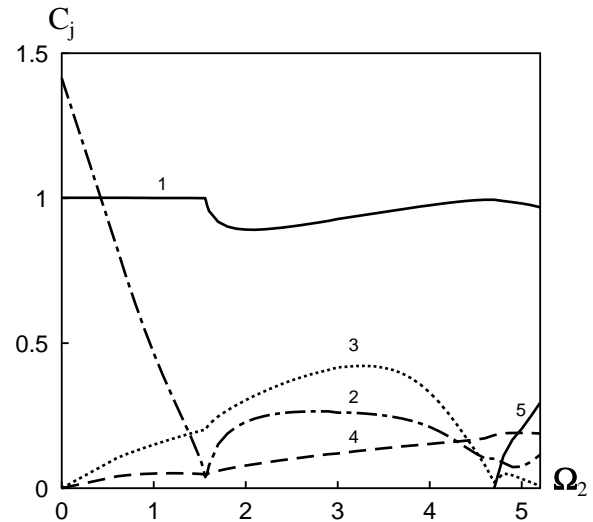


Рис. 3. Частотные зависимости модулей амплитуд нормальных волн при отражении первой нормальной волны от заземленного торца полуслоя

условий по нормальным напряжениям приводит к двукратному увеличению касательных напряжений на торце. Для заземленного торца ситуация аналогична – выполнение граничных условий по горизонтальной компоненте смещения при учете только двух (падающей и одной отраженной) волн, приводит к удвоению вертикального смещения на торце.

Тип граничных условий на торце определяет интенсивность процесса трансформации энергии падающей волны и частотные зависимости энергии, которую переносят волны в отраженном поле. При отражении от свободного торца наблюдается существенная трансформация энергии падающей волны в моды высших порядков и существуют диапазоны частот, в которых такие моды энергетически наиболее выражены. Более того, на определенных частотах в отраженном поле первая мода отсутствует полностью [15].

Таким образом, изменение типа граничных условий на торцевой поверхности качественно изменяет процесс отражения первой антисимметричной волны от торца упругого полуслоя. Следует отметить, что пространственное распределение напряжений и смещений в нормальных модах отраженного поля не зависит от типа граничных условий на торце, а определяется дисперсионными соотношениями. Поэтому объяснение отличий при отражении нормальной волны от торца при кинематических и силовых граничных условиях следует искать, анализируя частотные зависимости ам-

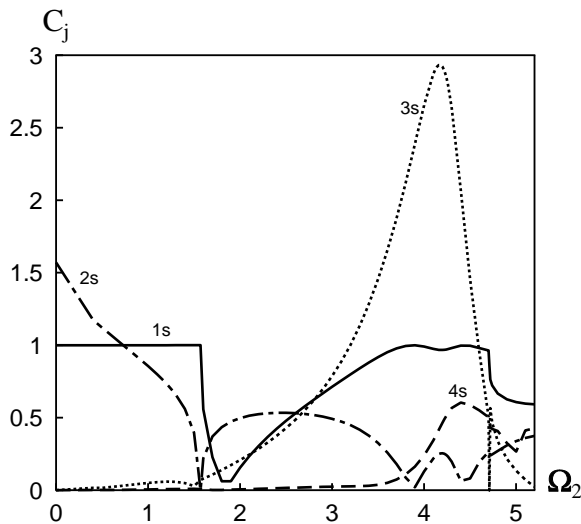


Рис. 4. Частотные зависимости модулей амплитуд нормальных волн при отражении первой нормальной волны от свободного торца полуслоя

плитуд нормальных волн. Такие зависимости для нормальных волн отраженного поля, генерируемого нормальной волной, падающей на заземленный торец упругого полуслоя, приведены на рис. 3. Кривой 1 представлена первая распространяющаяся волна. Кривая 2 в диапазоне частот $0 \leq \Omega_2 \leq \pi/2$ соответствует чисто мнимому корню дисперсионного уравнения, а при $\Omega_2 \geq \pi/2$ описывает амплитуду второй распространяющейся моды. Кривая 3 в диапазоне $0 \leq \Omega_2 \leq \Omega^*$ соответствует первому комплексному корню дисперсионного уравнения (3), который вырождается в действительный на частоте Ω^* . Начиная с нее, кривая 3 описывает амплитуду третьей распространяющейся волны. Для $\nu = 0.3$ имеем $\Omega^* = 4.713$. Кривая 4 дает амплитуду нормальной волны, соответствующей второму комплексному корню, а кривая 5 – амплитуду волны с чисто мнимым волновым числом.

На рис. 4 приведены частотные зависимости модулей амплитуд нормальных волн при отражении первой моды от свободного торца полуслоя. Обозначения кривых аналогичны (они помечены индексом s). Сравнивая рис. 3 и 4, прежде всего, отметим, что вблизи частоты запирания для второй распространяющейся волны $\Omega_2 \approx \pi/2$ амплитуда моды, соответствующая первому комплексному корню (C_{3s}), при силовых и кинематических граничных условиях существенно отличается. Для заземленного торца она превышает амплитуду второй моды (для $\Omega_2 \leq \pi/2$ – это волны с чи-

сто мнимым волновым числом, а для $\Omega_2 \geq \pi/2$ – распространяющаяся волна). Для свободного торца амплитуда волны с первым комплексным корнем (C_{3s}) значительно меньше амплитуд распространяющихся волн. При этом $C_{3s} \ll C_3$. Отметим еще одно характерное различие в поведении амплитуд нормальных волн при отражении первой моды от свободного и заземленного торцов. При свободном торце первая отраженная распространяющаяся волна на частоте запирания для второй моды изменяет знак, что соответствует набегу ее фазы, равному π . В то же время, при отражении от заземленного торца при переходе через указанную частоту запирания эта фаза остается постоянной.

Таким образом, хотя моды с комплексными волновыми числами и не переносят энергию от торца волновода, однако они оказывают значительное влияние на структуру поля вблизи торца волновода, а уровень их возбуждения определяется типом граничных условий на торце полуслоя.

При анализе энергетических характеристик интересно рассмотреть влияние типа симметрии задачи на процесс отражения от торца упругого волновода. Отражение симметричной нормальной волны от свободного торца волновода изучалось в [16–18]. Отражению симметричной нормальной волны от заземленного торца посвящены работы [17, 19]. Анализируя их, следует отметить, что для обоих типов граничных условий на торце наблюдается сильная трансформация энергии падающей волны в моды высших порядков. Значительное возбуждение указанных мод для обоих типов граничных условий наблюдалось до частоты запирания для четвертой распространяющейся моды. Для более высоких частот при кинематических граничных условиях первая отраженная волна переносит более 50 % величины E_0 , а при силовых – сильная трансформация энергии падающей волны в моды высших порядков сохраняется [16, 17].

Таким образом, независимо от типа симметрии, при отражении первой моды от свободного торца существуют частоты, на которых в отраженном поле первая мода отсутствует. В то же время, независимо от типа симметрии, при отражении от заземленного торца нет частот, на которых первая отраженная волна вырождается. Тем не менее, для обоих типов симметрии на частоте запирания для третьей моды в отраженном поле вся энергия уносится первой распространяющейся волной, а вторая мода практически вырождается.

Независимо от типа симметрии и граничных условий на торцевой поверхности, энергия, которую переносят моды высших порядков, увеличива-

ется, когда частота превышает соответствующие частоты запирания. Станут ли эти моды наиболее энергетически выраженными, зависит от типа симметрии, граничных условий на торце и способа возбуждения волнового поля [12, 13, 15, 17, 19].

Рассмотрим отражение второй нормальной волны от свободного торца. Она становится распространяющейся, начиная с $\Omega_2 = \pi/2$. На рис. 5 представлена частотная зависимость нормированного на мощность падающей волны среднего за период потока мощности E_j/E_0 для различных отраженных распространяющихся мод. Как и в случае, когда волновое поле создается первой антисимметричной волной, при возбуждении полуслоя второй модой в области частот, где существуют только две распространяющиеся волны, наблюдается слабая трансформация энергии падающей волны в другие нормальные волны. “Обратная волна” здесь также возбуждается слабо и в узком частотном диапазоне (на рис. 5 она не приведена). Начиная с частоты запирания для третьей моды, ситуация меняется. Энергия, переносимая третьей модой, с ростом частоты резко возрастает и в узком диапазоне $\Omega_{k3} \geq \Omega_2 \geq 5.05$ эта мода доминирует.

Как и при отражении первой моды, в данном случае вблизи частоты запирания для третьей моды вся энергия уносится от торца только второй волной, т. е. волной того же типа, что и падающая. В отраженном поле первая мода на указанной частоте вырождается практически полностью. Подчеркнем, что в обоих случаях это одна и та же частота, на которой первый комплексный корень вырождается в действительный – $\Omega_2 = \Omega^* = 4.709$.

Отметим еще один интересный результат, который следует из сравнения рис. 2 и 5. В диапазоне частот, когда в полуслое существует только две бегущие изгибные волны, оба рисунка практически совпадают (с точностью до замены номеров кривых 1 и 2). Аналогичное подобие кривых, характеризующих трансформацию энергии при отражении первой и второй антисимметричных мод, было обнаружено в [15] для случая свободного торца. Это позволяет распространить приведенное в указанной работе правило взаимности на случаи отражения первой и второй антисимметричных волн от заземленного торца. Пусть процесс отражения первой нормальной волны от заземленного торца полуслоя описывается некоторым зависящим от частоты коэффициентом трансформации энергии во вторую нормальную волну λ_{12} : $E_2 = \lambda_{12}E_1$. По сути, кривая 2 на рис. 2 в этом частотном диапазоне дает величину λ_{12} . Она с графической точностью совпадает с кривой 1 на рис. 5, которая является коэффициентом трансформации энергии в первую

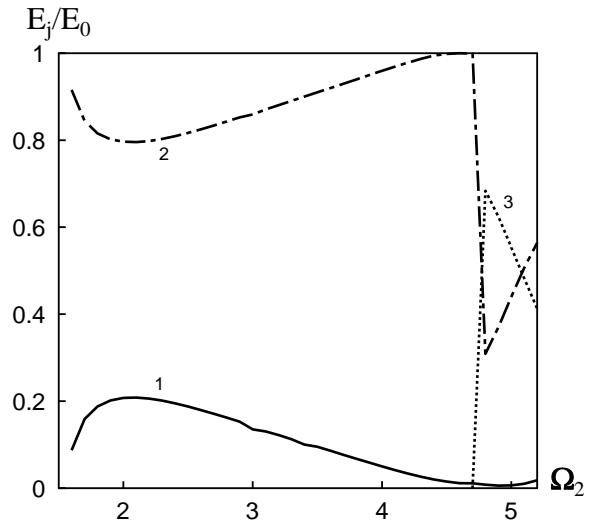


Рис. 5. Частотные зависимости среднего за период потока мощности для различных отраженных распространяющихся мод при падении на заземленный торец второй нормальной волны

моду при отражении второй волны, т. е. λ_{21} . Из сравнения двух графиков следует, что $\lambda_{12} = \lambda_{21}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены частотные зависимости энергии, которую переносят различные распространяющиеся моды при антисимметричных колебаниях полуслоя с заземленным торцом. Волновое поле в полуслое возбуждалось при отражении первой или второй распространяющихся волн от заземленного торца. Установлено, что в области частот, где существуют только две распространяющиеся волны, не наблюдается значительной трансформации энергии падающей волны в распространяющиеся моды высших порядков. При отражении первой распространяющейся волны эта мода сохраняет свою доминирующую роль выше частоты запирания второй и третьей моды. При отражении второй распространяющейся волны от заземленного торца в отраженном поле вторая распространяющаяся мода переносит более 80 % энергии падающей волны до частоты запирания для третьей моды.

Отмеченная особенность отражения нормальных антисимметричных мод от заземленного торца не наблюдалась при их отражении от свободного торца. Для отражения от свободного торца первой антисимметричной моды выше частоты запирания для второй моды происходит резкое изменение энергии, которую переносит первая отра-

женная волна. Для случая отражения второй антисимметричной моды от свободного торца также характерна значительная трансформация энергии падающей волны в моды другого порядка выше частоты запираения для второй моды. При изменении типа симметрии (т.е. при отражении первой симметричной волны как от свободного, так и от заземленного торца) выше частоты запираения для второй моды наблюдается сильная трансформация энергии падающей волны в моды высших порядков.

Слабая трансформация энергии падающей волны в моды других порядков при отражении антисимметричной волны от заземленного торца вблизи частоты запираения для второй моды обусловлена значительным возбуждением мод с комплексными волновыми числами. В окрестности частоты запираения для второй моды модуль амплитуды волны с первым комплексным числом для частот $\Omega_2 \leq \Omega_{k2}$ больше амплитуды волны с чисто мнимым волновым числом, а для частот $\Omega_2 \geq \Omega_{k2}$ – больше амплитуды второй распространяющейся волны. Такое значительное возбуждение волн с первым комплексным волновым числом при отражении антисимметричной волны от свободного торца и симметричной волны от свободного или заземленного торцов вблизи частоты запираения для второй моды не наблюдалось.

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // *Мат. мет. фіз.-мех. поля.*– 1998.– **41**, N 1.– С. 77–82.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.– Л.: Наука, 1967.– 402 с.
3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
4. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы // *Прикл. мех. Тр. Амер. общ-ва инж.-мех.*– 1971.– **38**, N 2.– С. 87–96.
5. Bogy D. B. The plane solution for joined dissimilar elastic semistrips under tension // *Trans. ASME, E.*– 1975.– **45**, N 1.– P. 93–98.
6. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // *Прикл. мат. мех.*– 1967.– **31**, N 1.– С. 178–186.
7. Benthem J. P. A Laplace transform method for the solution of semi-infinite and finite strip problem in stress analysis // *Quart. J. Mech. Appl. Math.*– 1963.– **16**.– P. 413–429.
8. Gregory R. D., Gladwell I. The reflection of a symmetric Rayleigh–Lamb wave at the fixed or free edge of a plate // *J. Elast.*– 1983.– **13**.– P. 185–206.
9. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Трансформация энергии падающей волны при отражении от заземленного торца полуполосы // *Прикл. мех.*– 1991.– **27**, N 5.– С. 77–82.
10. Гетман И. П., Лисицкий О. Н. Об отражении изгибных волн Лэмба от границы раздела двух состыкованных полуполос // *Прикл. мех.*– 1991.– **27**, N 5.– С. 77–82.
11. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Лапина О. Н. Дифракция нормальных мод в составных и ступенчатых упругих волноводах // *Прикл. мат. мех.*– 1998.– **62**, N 2.– С. 297–303.
12. Городецкая Н. С. К задаче об отражении первой симметричной нормальной волны от заземленного торца полуполосы // *Акуст. вісн.*– 1999.– **2**, N 2.– С. 26–34.
13. Мелешко В. В., Татуян В. Б. Возбуждение гармонических волн Лэмба в полубесконечном упругом слое // *Акуст. ж.*– 1987.– **33**, N 5.– С. 919–926.
14. Гринченко В.Т., Городецкая Н. С. Метод суперпозиції стосовно граничних задач для неоднорідних хвилюводів // *Мат. мет. фіз.-мех.поля.*– 2006.– **49**, N 1.– С. 20–33.
15. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С., Старовойт И. В. Особенности возбуждения нормальных волн при изгибных колебаниях полуслоя // *Акуст. вісн.*– 2007.– **10**, N 3.– С. 42–54.
16. Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Мелешко В. В. Продольные волны Лэмба в полубесконечном упругом слое // *Прикл. мех.*– 1991.– **27**, N 6.– С. 53–59.
17. Gregory R. D., Gladwell I. The reflection of a symmetric Rayleigh–Lamb wave at fixed or free edge of a plate // *J. Elast.*– 1984.– **20**, N 9.– P. 12–16.
18. Morvan B., Wilkie-Chancellier N., Duffo H., Tinel A., Duclos J. Lamb wave reflection at the free edge of a plate // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2003.– **113**, N 3.– P. 1417–1425.
19. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Трансформация энергии падающей волны при отражении от заземленного торца полуполосы // *Прикл. мех.*– 1991.– **27**, N 5.– С. 77–82.